

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 5

Aufgabe 17 Betrachten Sie die Familie von Abbildungen

$$f_\lambda : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto 1 - \lambda x^2$$

für $\lambda \in [0, 2]$. Zeigen Sie

- (a) Für alle $\lambda \in [0, 2)$ gibt es einen eindeutigen Fixpunkt $x^*(\lambda)$.
- (b) Es gibt ein $\lambda^* \in [0, 2]$, so dass die kompakte invariante Menge $\{x^*(\lambda)\}$ für $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ global attraktiv und für $\lambda > \lambda^*$ instabil ist.
- (c) Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für $\lambda^* < \lambda < \lambda^* + \delta$ genau ein periodischer Orbit $p_2^*(\lambda) = \{x_1(\lambda), x_2(\lambda)\}$ der Länge 2 existiert, der als kompakte invariante Menge attraktiv ist. Ist dieser Orbit global attraktiv?
- (d) Es sei $F_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$. Dann ist

$$F'_\lambda(x_1(\lambda)) = F'_\lambda(x_2(\lambda)).$$

Verallgemeinern Sie die Aussage für Orbits mit beliebiger Periode und beweisen Sie diese.

Aufgabe 18 Wir bezeichnen die Spur einer Matrix A mit $\text{tr}(A)$, die Determinante mit $\det(A)$, und die Transponierte mit A^T . Zeigen Sie:

- (a) $\det(E(A, t)) = e^{\text{tr}(A)t}$.
- (b) $E(A^T, t) = E(A, t)^T$.
- (c) Ist A schiefsymmetrisch, so ist $E(A, t)$ orthogonal, und hat Determinante 1.

Aufgabe 19 Zeigen Sie den Satz der Vorlesung: Die Menge der nichtwandernden Punkte ist positiv invariant. Ist $\mathbb{T}$ eine Gruppe, so ist $\Omega(\varphi)$ invariant.

Aufgabe 20 Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass eine kompakte, invariante und attraktive Menge nicht notwendig stabil ist.

Abgabe: 7.5.2012