

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 3

Aufgabe 9 Man begründe, daß jede Lösung der Gleichung $u'' + u = 0$ die Form $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ mit zwei reellen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 10 (a) Finden Sie einen weiteren wahren selbstreferentiellen Satz der in der Vorlesung angegebenen Form.

(b) Formulieren Sie die Aufgabenstellung für andere Systeme als das Dezimalsystem, geben Sie für das Zahlensystem zur Basis 4 einen wahren Satz der angegebenen Form an.

(c) Übersetzen Sie den periodischen Orbit

$$z_1 = (1, 7, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)^T, z_2 = (1, 8, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^T$$

für die Abbildung Ψ aus (1.15) in (einen) sprachliche(n) Sätze (Satz).

Aufgabe 11 Es sei $L : \mathbb{N}^{10} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch

$$L(x) = \sum_{i=1}^{10} x_i.$$

Zeigen Sie für die Abbildung Ψ aus Gleichung (1.15), dass

(a) für alle $x \in \mathbb{N}^{10}$ gilt $L(\Psi(x)) \geq 20$,

(b) für alle $x \in \mathbb{N}^{10}$ mit $L(x) \leq 21$ gilt $L(\Psi(x)) \leq 21$.

(c) für $x \in \mathbb{N}^{10}$ mit $L(x) > 21$ gilt

$$L(\Psi(x)) < L(x).$$

Was folgt für L -Werte der Iterierten eines Punktes $x_0 \in \mathbb{N}^{10}$?

Aufgabe 12 (a) Zeigen Sie, dass eine Folge $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V_n \in \text{Lip}(W; \mathbb{R}^N)$ genau dann bzgl. d_{Lip} konvergent ist, wenn die Folge auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset W$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der stetigen Vektorfelder $V : W \rightarrow \mathbb{R}^N$ bzgl. der Metrik d_{Lip} vollständig ist.

Gilt die letzte Aussage auch für $\text{Lip}(W; \mathbb{R}^N)$? Geben sie ohne Beweis Gründe an.

Abgabe: 23.4.2012