

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 13

Aufgabe 49 Man betrachte die Gleichung (van der Pol Gleichung)

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u - \sigma v - u(u^2 + v^2) \\ \dot{v} &= \sigma u + v - v(u^2 + v^2) - \gamma.\end{aligned}$$

Zeigen Sie dass für einen Wert von Parametern (σ, γ) eine Sattel-Knoten-Verzweigung eintritt. (Erfordert längere Rechnung.)

Aufgabe 50 Zeigen Sie, dass für $\sigma = 10$ und $\beta = \frac{8}{3}$ in den Lorenz-Gleichungen eine Hopf-Verzweigung von den Gleichgewichtslösungen ungleich 0 auftritt.

Aufgabe 51 Wir betrachten die Gruppe $\mathbb{T}$, die aus Elementen von $SO(3)$ besteht, die ein reguläres Tetraeder in sich überführen. Beweisen Sie:

- (a) Die Ordnung von $\mathbb{T}$ ist 12.
- (b) Vertauscht eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit allen $g \in \mathbb{T}$, so ist A ein Vielfaches von $\mathbb{1}$.
- (c) Es gibt ein Tetraeder in $\mathbb{R}^3$, so dass die Elemente der Ordnung genau zwei Variablen auf die jeweiligen negativen abbilden und ein Elemente der Ordnung 3 eine zyklische Vertauschung der drei Koordinaten bewirkt.
- (d) Finden Sie Untergruppen $H \subset \mathbb{T}$ mit eindimensionalen Fixpunktraum.
- (e) Zeigen Sie, dass äquivariante Abbildungen Fixräume in sich abbilden.

Aufgabe 52 (a) Zeigen Sie in der Situation der vorigen Aufgabe, dass die folgenden polynomialen Abbildungen äquivariant sind:

$$e_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad e_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \quad e_{3a,b} = \begin{pmatrix} x(\pm y^2 + z^2) \\ x^2y \pm yz^2 \\ \pm x^2z + y^2z \end{pmatrix}$$

- (b) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f(x, y, z, \lambda) = \lambda e_1(x, y, z) + 3e_2(x, y, z) + 5e_3(x, y, z)$$

und weisen Sie in eindimensionalen Fixpunkträumen entsprechender Untergruppen nichttriviale Lösungen von $f(x, y, z, \lambda) = 0$ nach.

Abgabe: 9.7.2012