

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 12

Aufgabe 45 Überzeugen Sie sich, dass der Satz von Poincaré-Bendixson auf der zweidimensionalen Sphäre gilt. Beweisen Sie, dass jedes Vektorfeld auf der Sphäre mindestens eine Ruhelage hat. Skizzieren Sie einen Fluss auf der 2-Sphäre mit genau einer Ruhelage.

Herausforderung: Können Sie ein Vektorfeld angeben, das einen solchen Fluss mit genau einer Ruhelage auf der 2-Sphäre erzeugt?

Aufgabe 46 Es sei $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen, $H \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $\dot{u} = J\nabla H(u)$ ein Hamiltonsystem.

- (a) Zeigen Sie: Ist y ein regulärer Wert von H , so gibt es kein $u_0 \in H^{-1}(y)$ mit $\alpha(u_0)$ oder $\omega(u_0)$ enthält eine Ruhelage.
- (b) Ist $n = 1$, y ein regulärer Wert von H und $H^{-1}(y)$ beschränkt, so besteht $H^{-1}(y)$ aus einer Vereinigung minimaler Mengen für die obige Differentialgleichung.

Aufgabe 47 Wir betrachten erneut die Gleichung $\ddot{\alpha} + \sin \alpha = 0$ oder

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= u \\ \dot{u} &= -\sin \alpha\end{aligned}\tag{1}$$

Entscheiden Sie ob das System (1) hamiltonsch ist.

Aufgabe 48 Es sei J der Operator, der zur Definition von Hamilton-Systemen herangezogen wurde. Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ heißt symplektisch, falls $A^T J A = J$. Zeigen Sie:

- (a) Ist A symplektisch, so ist $|\det(A)| = 1$.
- (b) Ist A symplektisch, so ist $\det(A) = 1$ (Beschränken Sie sich auf den Fall $n = 1$ falls Sie mit dem allgemeinen Fall nicht zurecht kommen).
- (c) Beweisen Sie die Menge der symplektischen linearen Abbildungen bildet eine Gruppe $\mathrm{Sp}(n)$. Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(n)$ ist nicht kompakt.
- (d) Mit A ist auch A^T symplektisch.

Abgabe: 2.7.2012