

## Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 1

**Aufgabe 1** Betrachten Sie den Raum  $c$  der beschränkten, reellen Folgen, also

$$c = \left\{ \mathbf{x} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists_{M>0} : \forall_{i \in \mathbb{N}_0} |x_i| < M \right\}.$$

(a) Definieren Sie eine Norm auf  $c$ , so dass  $(c, \|\cdot\|)$  zum Banachraum wird.

(b) Betrachten Sie  $\text{sh}^- : c \rightarrow c$  und zeigen Sie

$\mathbf{x}$  ist eine periodische Folge  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (\text{sh}^-)^n \mathbf{x}$  ist eine periodische Folge in  $c$

(c) Ist  $\mathbf{x}$  eine periodische Folge und ist  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge, so dass  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\mathbf{x}$  konvergiert (in dem Sinne, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0)$$

so konvergiert  $(\text{sh}^-)^n(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x}$ .

**Aufgabe 2** Zeigen Sie, dass für  $n \leq 20$  gilt: Es existiert eine natürliche Zahl  $j = j(n)$  mit

$$(\text{sh}^-)^j C(n) = \mathbf{p}.$$

**Aufgabe 3** (a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

mit  $x(0) = 0$  auf jedem reellen Intervall  $I$ , das die Null enthält genau eine Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt} = \beta x$$

mit  $x(t_0) = x_0$  auf jedem  $t_0$  enthaltenden Intervall genau eine Lösung besitzt.

**Aufgabe 4** Entscheiden Sie, ob die zeitlichen Entwicklungen der Population mit konstanter Geburts- und Sterberate, die einerseits durch die diskrete Dynamik und andererseits durch die gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben werden, für Zeiten  $t \in \mathbb{N}_0$  gleiche Zustände für die Population liefern und begründen und erklären Sie Ihre Antwort.

**Abgabe: 9.4.2012**