

Lösungsskizzen zu den Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 5

Aufgabe 17 (a) Offensichtlich existiert für jedes $\lambda \in [0, 2)$ ein Fixpunkt. Dieser ist auch offenkundig eindeutig (für $\lambda < \frac{1}{2}$ folgt dies aus dem Banachschen Fixpunktsatz, damit folgt für diesen Parameterbereich auch die globale Attraktivität.). Wir geben die Fixpunkte explizit an, für $\lambda = 0$ reduziert sich

$$f_\lambda(x) - x = 0$$

auf $x = 1$. Ansonsten erhält man die Lösung einer quadratischen Gleichung

$$x^*(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda} \pm \frac{1}{2\lambda}\sqrt{5}.$$

Für $x \in (-1, 1]$ muss das Pluszeichen gewählt sein, ansonsten erhält man noch für $\lambda = 2$ den Wert $x = -1$.

(b) Für $\lambda \leq 1$ gilt $f_\lambda([-1, 1]) \subset [0, 1]$ und damit können wir uns bei Konvergenzbetrachtungen auf die rechte Intervallhälfte einschränken (solange wir $\lambda^* < 1$ ermitteln). In der Nähe von $x^*(\lambda)$ ist die Folge $f^n(x)$ offensichtlich nicht monoton, sondern das Vorzeichen von $f^n(x) - x^*(\lambda)$ alterniert. Daher ist es naheliegend die Funktion

$$F_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4$$

zu betrachten. Wir berechnen die Ableitung $F'_\lambda(x) = 4\lambda^2 x(1 - \lambda x^2)$ und suchen das maximale Intervall $[0, \bar{\lambda}]$, so dass für alle $x \in [-1, 1]$ gilt $F'_\lambda(x) < 1$. Betrachte dazu,

$$F''_\lambda(x) = 4\lambda^2(1 - 3\lambda x^2).$$

Die Nullstellen sind

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3\lambda}}$$

und es gilt

$$F'_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{3\lambda}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}\lambda^{\frac{3}{2}}$$

Nun ist der letzte Ausdruck $<, =, > 1$ genau dann wenn

$$\lambda^{\frac{3}{2}} <, =, > \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

oder

$$\lambda^3 <, =, > \frac{9 \cdot 3}{64}$$

$$\lambda <, =, > \frac{3}{4}.$$

Also konvergiert für

$$\lambda < \frac{3}{4}$$

(aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes) die Folge $F_\lambda^n(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$ gegen $x^*(\lambda)$. Für $x = \frac{3}{2}$ ist $F'_\lambda(x) < 1$ für alle $x \neq x^*(\lambda)$. Also gilt

$$|F_\lambda(x) - F_\lambda(x^*(\lambda))| = F'_\lambda(\xi)|x - x^*(\lambda)| < |x - x^*(\lambda)|$$

für ein $\xi \in (x, x^*(\lambda))$. Da jeder Grenzwert der Folge $F_\lambda^n(x)$ ein Fixpunkt von F_λ ist, folgt die Aussage für $x = \frac{3}{2}$, wenn die die Einzigkeit des Fixpunktes im Intervall $[-1, 1]$ gezeigt haben, dies werden wir in (c) machen. Damit konvergieren für alle $x \in [-1, 1]$ die Folgen

$$F_\lambda^n(x) = f_\lambda^{2n}(x) \rightarrow x^*(\lambda).$$

Damit wissen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\lambda^{2n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\lambda^{2n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\lambda^{2n}(f(x)) = x^*(\lambda).$$

Daraus folgt, dass die Folge $f_\lambda^n(x)$ gegen $x^*(\lambda)$ konvergiert.

(c) Die Punkte auf einem Orbit der Länge zwei sind Fixpunkte von

$$F_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4,$$

also Lösungen von $F_\lambda(x) - x = 0$. Da die beiden Fixpunkte von $f_\lambda(x) = x$ auch diese Gleichung lösen folgt, dass das Polynom $f_\lambda(x) - x$ das Polynom $F_\lambda(x) - x$ teilt, wir erhalten

$$1 - \lambda + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4 - x = (1 - \lambda x^2 - x)(1 - \lambda - \lambda x + \lambda^2 x^2)$$

mit $g_\lambda(x) = 1 - \lambda - \lambda x + \lambda^2 x^2$. Man beachte

$$g'_\lambda(x) = -\lambda + 2\lambda^2 x = 0$$

gibt $\frac{1}{2\lambda} = x$ und g an dieser Stelle ausgewertet ergibt

$$1 - \frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{4} = 3/4 - \lambda.$$

Also treten Nullstellen von g und damit nichttriviale Fixpunkte von F_λ für $\lambda > 3/4$ auf. Da es einen nichttrivialen Fixpunkt gibt, kann der periodische Orbit nicht global attraktiv sein. Also können wir nur Attraktivität zeigen. Dazu reicht es, wie oben bereits ausgeführt, zu zeigen, dass $|F'_\lambda(x_i^*(\lambda))| < 1$ ist. Die Fixpunkte errechnen wir indem wir die Nullstellen von g berechnen:

$$g_\lambda(x) = 1 - \lambda - \lambda x + \lambda^2 x^2$$

hat als Nullstellen

$$x_{1,2}^*(\lambda) = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda^2(1-\lambda)}}{2\lambda^2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{4\lambda^3 - 3\lambda^2}}{2\lambda^2} = \frac{1 \pm \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} F'_\lambda(x_{1,2}^*(\lambda)) &= 4\lambda^2 x_{1,2}^*(\lambda) x_{2,1}^*(\lambda) \\ &= 4 * \lambda^2 * \frac{\lambda^2 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2}{4\lambda^2} \\ &= 4(\lambda^2 - \lambda^3) \\ &= 4\lambda^2(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Für $\lambda = \frac{3}{4}$ ergibt sich der Wert $\frac{9}{16} < 1$. Da die Funktion stetig in λ ist, gibt es $\delta > 0$, so dass für $\lambda \in (\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \delta)$ diese Ableitung betragsmäßig kleiner 1 ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 18 Die auf der Homepage getrennt herunterladbaren Programme (m-Files) liefern die entsprechenden Bilder. Aufgabe_18.m berechnet genau die Bilder wie in der Aufgabe gefordert. Aufgabe_18_var_x0.m berechnet für einen festen Parameterwert den orbit als Funktion vom Startwert (gewählt ist der Parameterwert 1.75 mit stabilem periodischen Orbit der Länge 3). Aufgabe_18_f5plot.m plottet die 5-fache Iterierte von f_λ . Für diese drei Programme danke ich Herrn Kai Gräper.

Das Programm feig.m ist eine Alternative zu Aufgabe18.m mit etwas anderer Methode das Bild zu erzeugen.