Kapitel 2

Linearität

In diesem Kapitel werden lineare Systeme im Mittelpunkt stehen. Diese sind nicht nur für sich von großem Interesse, sie sind auch nicht nur traditionell für Anwendungen wichtig, sondern vielmehr sind sie Bausteine der nichtlinearen Dynamik und somit Grundvoraussetzung des Verständnisses von Dynamik überhaupt. Im ersten Abschnitt wollen wir die linearen Systeme für sich betrachten, im zweiten Abschnitt soll untersucht werden, wie lineare Systeme die Theorie beeinflussen.

2.1 Lineare Systeme

2.1.1 Jordan Form

In diesem kurzen Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe der linearen Algebra. Sei $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix A (diese wird durch die Wahl einer Basis bestimmt). Wir gehen immer von der kanonischen Basis aus und identifizieren auf diese Weise die lineare Abbildung mit der Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $u_c \in \mathbb{C}^n$ gibt mit

$$Au_c = \lambda u_c.$$

Dieser Vektor u_c wird *Eigenvektor* genannt. Natürlich müssen wir auch bei reellen Matrizen komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren zulassen. Deshalb arbeiten wir zunächst im komplexifizierten Raum $\mathbb{C}^n$. Die Eigenwerte sind Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0. \tag{2.1}$$

Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es (mit Vielfachheiten gerechnet) genau n Wurzeln dieser Gleichung. Jede Wurzel von (2.1) ist auch Eigenwert, jedoch gibt es im allgemeinen weniger als n Eigenvektoren. Sei λ ein Eigenwert, so ist

$$K_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

ein A-invarianter Unterraum, der *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ. Sei m die Dimension von K_λ. K_λ ist enthalten im *verallgemeinerten Eigenraum*, der gegeben ist durch

$$E_\lambda = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k u = 0\}.$$

Der verallgemeinerte Eigenraum E_λ zum Eigenwert λ ist invariant unter der Abbildung A. Eine weitere Zerlegung in invariante Unterräume ist möglich. Dazu betrachtet man den minimalen Wert k_0, so dass $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{k_0} = E_\lambda$ ist. So eine Zahl existiert immer. In E_λ existiert eine Basis B, welches die Vereinigung von m Mengen $H_1, \ldots, H_m$ ist, wobei jedes H_k die Form

$$H_k = \{u_{k,1}, \ldots, u_{k,r_k}\} \tag{2.2}$$

hat mit

$$(A - \lambda \mathbb{1}) u_{k,i+1} = u_{k,i}, \; i = 1, \ldots, r_k, \; (A - \lambda \mathbb{1}) u_{k,1} = 0.$$

Die Einschränkung von A auf E_λ hat in der Basis B dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \mathcal{B}_m \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

wobei jeder dieser $r_k \times r_k$ Blöcke $\mathcal{B}_k$ die einfache Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

hat. Damit haben wir die komplexe *Jordansche*[1] *Normalform* einer Matrix erhalten. In der reellen Jordanschen Normalform hat man auch eine Darstellung in Blöcken wie in (2.3), jedoch sehen die Blöcke i.a. anders aus. Ist λ reell so bleibt die Form (2.4) erhalten. Für komplexe Eigenwerte $\lambda = e^{i\alpha}$, ergibt sich statt (2.4) die Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Eine einfache Begründung für diese Form ergibt sich aus der komplexen Jordanschen Normalform und der folgenden Überlegung. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Eigenwert einer reellen Matrix so ist $\bar{\lambda}$ ebenso ein Eigenwert und es gibt zu dem zur Menge aus Gleichung 2.2 $H_k = \{u_{k,1}, \dots, u_{k,r_k}\}$ eine Menge $H_k^* = \{\overline{u}_{k,1}, \dots, \overline{u}_{k,r_k}\}$ konjugiert komplexer Vektoren die eine entsprechende Basis zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ bilden. Wir definieren nun ein Paar

[1]Camille Marie Ennemond Jordan (5.1.1838-21.1.1922) wurde zunächst zum Bergbauingenieur ausgebildet. Im Jahre 1916 wurde er Präsident der französischen Akademie der Wissenschaften. Sein Werk umfasst neben der Normalform Beiträge zur Algebra (u.a. zur Galois-Theorie), zur Analysis, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Topologie der Ebene (Kurvensatz).

reeller Vektoren

$$\begin{aligned} v_{k,j} &= \frac{1}{2}(u_{k,j} + \overline{u}_{k,j}),\ j = 1, \ldots, r_k \\ w_{k,j} &= \frac{1}{2\mathtt{i}}(u_{k,j} - \overline{u}_{k,j}),\ j = 1, \ldots, r_k. \end{aligned}$$

Nun sehen wir leicht

$$\begin{aligned} Av_{k,j} &= \frac{1}{2}\left(Au_{k,j} + A\overline{u_{k,j}}\right) \\ &= v_{k,j-1} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k,j} \\ w_{k,j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $Aw_{k,j}$ ergibt eine ähnliche Rechnung ein ganz ähnliches Ergebnis. Für die Basis, die immer aus Paaren

$$H_k^{\mathbb{R}} = \{v_{k,1}, w_{k,1}, \ldots, v_{k,r_k}, w_{k,r_k}\}$$

besteht ergibt sich dann die obige Abbildungsmatrix.

Wie sieht der Block für $\lambda = |\lambda| e^{i\alpha}$ aus?

2.1.2 Die Matrixexponentialfunktion

Definition 2.1.1 *Sei* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*. Wir setzen* $\|A\| = \sup\left\{|Au| \;\middle|\; u \in \mathbb{R}^n,\ |u| = 1\right\}$.

Lemma 2.1.2 $\|\cdot\|$ *ist eine Norm auf dem linearen Raum der linearen Abbildungen von* $\mathbb{R}^n$ *in sich. Außerdem gilt* $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Beweis. Einfaches Nachrechnen! □

Definition 2.1.3 *Sei* A *eine* $n \times n$*-Matrix. Die Funktion* $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *sei definiert durch*

$$E(A, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \tag{2.6}$$

Wir nennen $E(A, t)$ *die* Matrixexponentialfunktion *und schreiben dafür auch*

$$E(A, t) = e^{At}.$$

Lemma 2.1.4 *Die Funktion $E(A,t)$ ist für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ definiert.*

Beweis. Übungsaufgabe! □

Satz 2.1.5 *Die Matrixexponentialfunktion $E(A,t)$ löst das Anfangswertproblem (1.38)*

$$\dot{C} = AC, C(0) = \mathbb{1}$$

aus Hilfssatz 1.2.48.

Beweis. Zunächst betrachten wir eine Teilsumme der Reihe $E(A,t)$

$$E_m(A,t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Ableitung von $E_m(A,t)$ ist natürlich

$$\dot{E}_m(A,t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = AE_{m-1}(A,t).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der rechten Seite (auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$) ist $E(A,t)$ differenzierbar und $\dot{E}(A,t) = AE(A,t)$. Natürlich ist auch $E(A,0) = \mathbb{1}$. □

Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = Au$, $u(0) = u_0$ erhält man also durch $u(t,u_0) = E(A,t)u_0$.

Hilfssatz 2.1.6 Kommutieren *die beiden Matrizen A, B* miteinander, *d.h. ist $AB = BA$, folgt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$BE(A,t) = E(A,t)B,$$

und es gilt

$$E(A+B,t) = E(A,t)E(B,t) = E(B,t)E(A,t) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die erste Eigenschaft ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition, die zweite erhält man aus dem Eindeutigkeitssatz für die Lösung von Anfangswertproblemen, indem man nachprüft, dass $E(A+B,t)$ und $E(A,t)E(B,t)$ das gleiche Anfangswertproblem lösen. □

A kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Jordansche Normalform gebracht werden. Sei J die Jordansche Normalform von A und C die Transformationsmatrix, also $J = CAC^{-1}$. Die allgemeine Form des Verhaltens der Lösungen unter Koordinatentransformation ist in Aufgabe 20, Blatt 5 angegeben. Für den Spezialfall können wir die Lösung des Ausgangsproblems gewinnen, indem wir A in die Jordansche Normalform überführen, für diese dann die Gleichung lösen und zurücktransformieren. Wir erhalten

$$u(t, u_0) = E(A, t)u_0 = C^{-1}v(t, Cu_0) = C^{-1}E(J, t)Cu_0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt noch

$$E(A, t) = C^{-1}E(CAC^{-1}, t)C.$$

Natürlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus der Definition von $E(A, t)$ schließen. Zur allgemeinen Lösung linearer Anfangswertprobleme müssen wir noch $E(J, t)$ ausrechnen. Wir gehen von der Gestalt (2.3) aus. Natürlich gilt für eine Matrix J in Blockdiagonalgestalt

$$J = \mathrm{diag}(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)),$$

dass die Matrixexponentialfunktion auch Blockdiagonalgestalt annimmt, also

$$E(J, t) = \mathrm{diag}(E(\mathcal{B}_1, t), \ldots, E(\mathcal{B}_m, t)).$$

Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge 1, also $\mathcal{B} = (\lambda)$, so ist natürlich $E(\mathcal{B}, t) = e^{\lambda t}$. Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge $r > 1$ und der zugehörige Eigenwert λ reell, so ergibt sich die Exponentialreihe aus folgenden Betrachtungen.

Definition 2.1.7 *Eine Matrix N heißt* nilpotent, *wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^r = 0$.*

Lemma 2.1.8 *Ein Block der Gestalt (2.4) ist die Summe einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N.*

Beweis. Natürlich ist $D = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$. Übrig bleibt die $r \times r$ Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $N^r = 0$ ist. Damit ist N nilpotent. □

Bemerkung 2.1.9 *Genauer gilt, dass jede Matrix A Summe einer diagonalisierbaren und einer nilpotenten Matrix ist. Unser Beweis zeigt dies zumindest für reelle Matrizen mit ausschließlich reellen Eigenwerten.*

Lemma 2.1.10 *Die Matrixexponentialfunktion $E(\mathcal{B}, t)$ eines Jordan-Blocks der Länge r zum Eigenwert λ hat die Gestalt*

$$E(\mathcal{B}, t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t^3/6 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Beweis. Es gilt $DN = ND$ und daher mit dem Hilfssatz 2.1.6

$$E(\mathcal{B}, t) = E(D + N, t) = E(D, t)E(N, t).$$

Nun ergibt $E(D, t) = e^{\lambda t}\mathbb{1}$ und da N nilpotent ist, hat man

$$E(N, t) = \mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

□

Für einen nichtreellen Eigenwert stellt man die gleiche Betrachtung im Komplexen an und schneidet den Lösungsraum mit dem $\mathbb{R}^n$. Wir wollen die entsprechende Formel im Moment nicht angeben.

Satz 2.1.11 (Algebraische Struktur des Lösungsraumes I) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir setzen $U = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au\}$. U ist ein linearer Raum. Die Dimension von U ist n.*

Beweis. Offensichtlich ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung. Gleiches gilt für das Produkt ξu mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $u \in U$. Also bleibt zu zeigen, dass $\dim U = n$ ist. Sei $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\mathcal{A}u = u(0)$. Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ linear und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen injektiv. Wegen des globalen Existenzsatzes ist $\mathcal{A}$ surjektiv. Also gilt $U \simeq \mathbb{R}^n$. □

Als nächsten Schritt betrachten wir die *inhomogene lineare Gleichung*, gegeben durch

$$\dot{u} = Au + f(t), \tag{2.9}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist. Wir wissen, aufgrund des Existenzsatzes, dass diese Gleichung bei Vorgabe eines Anfangswertes lösbar ist. Die algebraische Struktur ist natürlich etwas anders als vorher. Wie in der linearen Algebra besteht die allgemeine Lösung aus einer speziellen Lösung plus einem beliebigen Element aus U.

Satz 2.1.12 (Algebraische Struktur des Lösungsraumes II) *Sei*

$$U_f = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au + f(t)\}.$$

U_f ist ein n-dimensionaler affiner Unterraum *von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Es existiert also ein $u^0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass*

$$U_f = \{u^0 + u \mid u \in U\}.$$

Beweis. Wie schon bemerkt, hat die Gleichung (2.9) immer eine Lösung. Sei u^0 eine solche Lösung. Dann ist natürlich für $u \in U$ auch $u^0 + u$ eine Lösung. Wir müssen noch zeigen, dass jede Lösung diese Form hat. Sei u^1 eine weitere Lösung der Gleichung (2.9). Dann ist $u^0 - u^1$ eine Lösung der homogenen linearen Gleichung (einfaches Nachprüfen zeigt dies). Damit ist $u^0 - u^1 \in U$. □

Wir wollen uns noch kurz Gedanken machen, wie man eine spezielle Lösung u^0 findet.

Lemma 2.1.13 (Formel der Variation der Konstanten) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist eine spezielle Lösung der Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ gegeben durch*

$$u^0(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds. \tag{2.10}$$

Beweis. Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + [e^{A(t-s)}f(s)]_{|s=t} + \int_0^t \frac{d}{dt}e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

also

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + f(t) + A\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds = Au + f(t).$$

□

2.1.3 Ebene lineare Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir ebene, lineare und autonome Systeme charakterisieren. Wir betrachten also eine Gleichung der Form

$$\dot{u} = Au, \tag{2.11}$$

wobei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ eine lineare Abbildung ist. Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Wir unterscheiden:

1. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$;
3. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 > 0$;
4. $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$;
5. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
6. Re$\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = 0$, $\lambda_i \neq 0$;
7. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$;
8. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$;
9. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
10. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 < 0$;
11. $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$.

1. Fall: Dabei hat die Jordan Normalform die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Seien e_1, e_2 die Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2}$. Dann konvergieren alle Lösungen für $t \to -\infty$ gegen Null, für $t \to \infty$ verlassen alle Lösungen (außer einer!) jedes Kompaktum. Sie schmiegen sich (für $t \to -\infty$) an die e_2-Achse an.

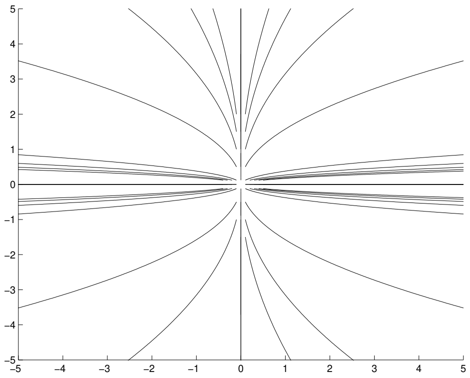

Abbildung 2.1: Die Trajektorien von $E(J, t)$.

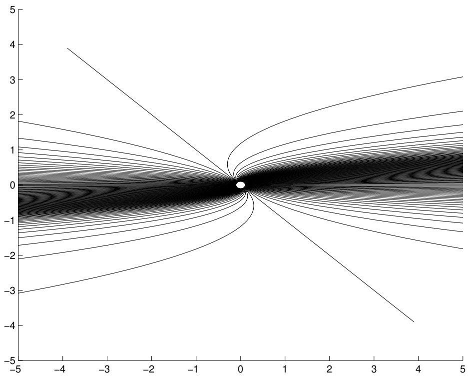

Abbildung 2.2: Die Trajektorien von $E(A, t)$ mit schiefliegenden Eigenräumen.

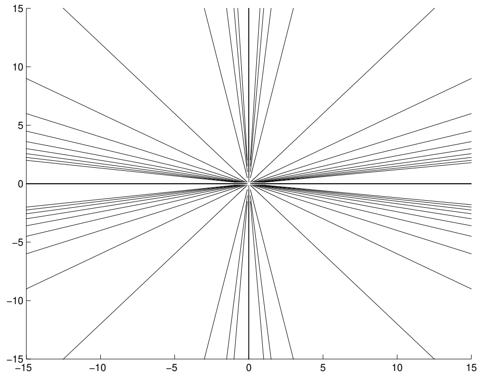

Abbildung 2.3: Die Trajektorien von $E(J,t)$ mit halbeinfachen Eigenwerten.

2. Fall: Wir unterscheiden zwei mögliche Formen des Jordan Blocks (Eigenwerte sind geometrisch einfach oder nicht). Zunächst der Fall der geometrisch einfachen Eigenwerte. Hier hat der entsprechende Jordanblock die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Alle Lösungen haben dieselben Konvergenzeigenschaften wie zuvor. Nur ist die Bewegung längs gerader Linien.
Ist der Eigenwert nicht geometrisch einfach, so hat der Jordanblock die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Auch hier hat man die Konvergenzeigenschaften wie im ersten Fall, jedoch schaut das Bild wiederum anders aus.

3. Fall: Wieder ergibt sich die gleiche Konvergenz, jedoch erhält man einen Strudel. Sei $\lambda_1 = |\lambda| e^{i\theta}$. Dann ist $\lambda_2 = |\lambda| e^{-i\theta}$ und die reelle Normalform hat die Form

$$J = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

4. Fall: Für die Jordan Form ergibt sich

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

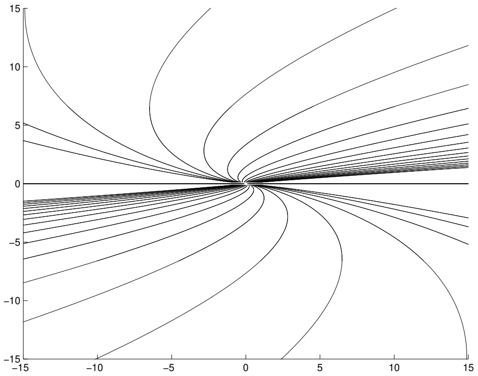

Abbildung 2.4: Die Trajektorien von $E(J,t)$ mit geometrisch einfachem, algebraisch doppelten Eigenwert.

Längs der e_2-Achse hat man konstante Lösungen (*Ruhelagen*). Alle anderen Lösungen konvergieren für $t \to -\infty$ gegen 0 und verlassen in positiver Zeitrichtung jedes Kompaktum.
5. Fall: In diesem Fall hat die Jordan Form das Aussehen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Der erste dieser beiden Fälle liefert ausschließlich konstante Lösungen. Im zweiten hat man eine Bewegung auf Parallelen zur e_1-Achse gegen unendlich.
6. Fall: Unsere Abbildung erhält die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Wir erhalten Lösungen, die sich auf Kreislinien um den Ursprung bewegen.
7. Fall: Ein qualitativ neues Bild ergibt sich hier. Auf der einen Achse bewegt man sich für $t \to \infty$ gegen unendlich und für $t \to -\infty$ gegen Null, auf der anderen Achse hat man das gegenteilige Verhalten. Dazwischen sind Lösungen, die für beide Zeitrichtungen jedes Kompaktum verlassen

und sich für $t \to \pm\infty$ an die jeweilige Eigenwertachse anschmiegen. (Dies ist die Motivation für den Begriff *hyperbolisch*, den wir noch einführen werden.)
In den anderen Fällen ergeben sich ganz ähnliche Bilder wie bisher, nur die Zeitrichtungen sind anders. Wir geben nur die Normalformen und die Bilder, keine weiteren Kommentare.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

8. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

9. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

10. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

11. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

2.1.4 Nichtautonome lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt widmen wir uns den Gleichungen

$$\dot{u} = A(t)u \tag{2.26}$$

und

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{2.27}$$

wobei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Natürlich kann man hier nicht erwarten, dass die Konstruktion der Matrixexponentialfunktion zum Ziel führt.

Lemma 2.1.14 *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi,\ \Phi(t_0) = \mathbb{1} \tag{2.28}$$

hat für eine stetige Abbildung $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *und* $t_0 \in I$ *eine eindeutige Lösung*

$$\Phi = \Phi(t, t_0) : I \times I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Beweis. Die Existenz folgt aus den Existenzsätzen (1.2.30) und (1.2.39). □

Definition 2.1.15 *Die Abbildung* $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : (t, t_0) \mapsto \Phi(t, t_0)$ *heißt* Übergangsmatrix.

Man überlege sich eine anschauliche Begründung für die Terminologie.

Satz 2.1.16 (Eigenschaften der Übergangsmatrix) *Die Übergangsmatrix* $\Phi(t, t_0)$ *ist für jedes Paar* $(t, t_0) \in I^2$ *definiert und hat die Eigenschaften*

- $\Phi(t, t) = \mathbb{1}$;
- $\Phi(t, s)\Phi(s, t_0) = \Phi(t, t_0)\ \forall (t, s, t_0) \in I^3$;
- $\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t)$.

Beweis. Die erste Eigenschaft ist nach Definition gegeben. Für die zweite Aussage betrachtet man die matrixwertige Funktion $\Psi(t) = \Phi(t, s)\Phi(s, t_0)$. Sie genügt der Differentialgleichung

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t)$$

mit dem Anfangswert $\Psi(s) = \mathbb{1}\Phi(s, t_0)$. Offenbar ist $\Phi(., t_0)$ eine Lösung derselben Differentialgleichung und für $t = s$ hat man den Wert $\Phi(s, t_0)$. Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems liefert die Gleichheit der linken und der rechten Seite. Die dritte Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der zweiten. □

Wie zuvor sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Wir setzen für eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$

$$U_f = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = A(t)u + f\}.$$

Sei $U = U_0$. Wir notieren einige einfache Aussagen.

Lemma 2.1.17 *1.* $u^1 \in U_f,\ u^2 \in U_g \Rightarrow u^1 + u^2 \in U_{f+g}$ *[Superpositionsprinzip];*

2. $\dim U_0 = n$*;*

3. *Sei* $u_0 \in U_f$ *fest. Dann ist* $U_f = \{u_0 + u \mid u \in U\}$*. [Algebraische Struktur des Lösungsraumes III];*

4. *Jedes* $u \in U$ *hat die Darstellung* $u(t, t_0, u_0) = \Phi(t, t_0)u_0$*.*

Beweis. Die erste und die dritte Aussage sind trivial. Für die zweite fixieren wir einen Zeitpunkt $t_0 \in I$ und zeigen wie zuvor, dass die Abbildung $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n : u \mapsto u(t_0)$ ein Isomorphismus ist. Die letzte Aussage folgt wieder aus der Eindeutigkeit: Sei u Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = Au,\ u(t_0, t_0, u_0) = u_0.$$

Dann ergibt sich für $v(t) = \Phi(t, t_0)u_0$

$$\dot{v} = \dot{\Phi}(t, t_0)u_0 = A\Phi(t, t_0)u_0 = Av,\ v(t_0) = \Phi(t_0, t_0)u_0 = u_0.$$

Also ist $u = v$. □

Wie zuvor erhält man aus der Formel der Variation der Konstanten die Darstellung der Lösung der inhomogenen Gleichung.

Satz 2.1.18 (Variation der Konstanten) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *und* $f : I \to \mathbb{R}^n$ *seien stetig,* $t_0 \in I$*. Sei* $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *die zugehörige Übergangsmatrix. Dann hat die Lösung* $u(t, t_0, u_0)$ *des Anfangswertproblems*

$$\begin{array}{rcl} \dot{u} & = & A(t)u + f(t) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \tag{2.29}$$

die Lösung

$$u(t, t_0, u_0) = \Phi(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)f(s)ds.$$

Beweis. Sei

$$v(t) = \Phi(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)f(s)ds.$$

Dann ist $v(t_0) = \mathbb{1}u_0 = u_0$ und

$$\dot{v} = A(t)\Phi(t, t_0)u_0 + f(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\Phi(t, s)f(s)ds = Av + f.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung bringt das gewünschte Resultat. □

2.1.5 Eigenwerte und Stabilität

Die Betrachtungen im vorstehenden Abschnitt legen es nahe zu vermuten, dass die Eigenwerte und das Langzeitverhalten für lineare, autonome Systeme eng gekoppelt sind. Wir wollen dieses bestätigen.

Satz 2.1.19 (Spektrum und Stabilität I) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$\dot{u} = Au.$$

Mit $\sigma(A)$ bezeichnen wir das Spektrum von A, d.h. $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A. Dann hat man folgendes Verhalten:
Haben alle Eigenwerte negativen Realteil, so ist 0 die einzige beschränkte Lösung und alle anderen konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0. Für $t \to -\infty$ hat man Konvergenz gegen unendlich.
Gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil, so gibt es (mindestens) eine Lösung, die für $t \to -\infty$ gegen 0 konvergiert und für $t \to \infty$ jedes Kompaktum verlässt.
Gibt es einen Eigenwert mit Realteil 0, so existiert zumindest eine Lösung $u(t, u_0)$, $u_0 \neq 0$, welche für alle Zeiten beschränkt ist.

Beweis. Angenommen, u_0 ist Anfangswert einer beschränkten Lösung $u(t, u_0)$. Jede Lösung der linearen Gleichung hat wegen der Bemerkung nach Satz 2.1.5 die Darstellung $u(t, u_0) = E(A, t)u_0$. Sei C die Matrix, die A in die komplexe Jordan Normalform J transformiert, also $A = C^{-1}JC$ $v_0 = Cu_0$ ist dann der Anfangswert für eine beschränkte Lösung $v(t) = E(J, t)v_0$. Sei $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^n)$. Ist $u_0 \neq 0$, so ist $v_0 \neq 0$ und es gibt ein $\mu \in \{1, \dots, n\}$ mit $v_0^\mu \neq 0$ und für $m \in \{\mu + 1, \dots, n\}$ ist $v_0^m = 0$. Sei λ der Eigenwert zum μ-ten Eigenvektor in der Basis zur Jordan Form. So ist die μ-te Komponente von $E(J, t)v_0$ gegeben durch $e^{\lambda t}v_0^\mu$. Dann ist $\|e^{\lambda t}v_0\|_{\mathbb{R}^n} \geq e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|v_0^\mu|$. Für $t \to -\infty$ ist dies unbeschränkt. Um die Konvergenz zu zeigen, betrachten wir $\nu = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) |\ \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\nu < 0$ und $E(J, t) = e^{\nu/2\, t}F(t)$. Dabei ist F eine matrixwertige Funktion. Jedes $F(t)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, mit Einträgen $e^{\rho t}p(t)$, wobei p ein Polynom ist und $\mathrm{Re}(\rho) < 0$. Dann ist $\|F(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$ beschränkt und $\|E(J, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $t \to \infty$. Damit konvergiert auch

$$\begin{aligned} \|E(A, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} &= \|C^{-1}E(J, t)C\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|C\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|E(J, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|C\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

für $t \to \infty$ gegen Null.
Den ersten Teil der zweiten Aussage beweist man ebenso wie die Unbeschränktheit für $u(t, u_0)$ für $t \to -\infty$ im ersten Fall. Man betrachtet hier einfach einen Anfangswert im verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert mit positivem Realteil.
Die dritte Aussage erhält man, indem man einen Eigenvektor als Anfangswert im Eigenraum des Eigenwertes λ mit verschwindendem Realteil betrachtet. Hier unterscheidet man zwei Fälle,
(a) $\lambda = 0$
(b) $\lambda \neq 0$.
Der erste dieser Fälle ist einfach. Ist u_0 im Kern von A, so ist natürlich $E(A,t)u_0 = u_0$ für alle t und damit ist die Lösung $u(t, u_0) = u_0$ eine konstante, und damit beschränkte Lösung.
Im zweiten Fall hat man im Komplexen einen Anfangswert u_0^c, so dass $E(A,t)u_0^c = e^{\lambda t}u_0^c$ ist, also gilt $\|E(A,t)u_0^c\|_{\mathbb{C}^n} = |e^{\lambda t}|\|u_0^c\|_{\mathbb{C}^n} = \|u_0^c\|_{\mathbb{C}^n}$. Wir setzen $u_0 = u_0^c + \overline{u_0^c}$. Dies ist ein reeller Vektor. Es gilt $E(A,t)u_0 = e^{\lambda t}u_0^c + e^{-\lambda t}\overline{u_0^c}$. Da $\overline{\lambda} = -\lambda$ ist dies immer reell. Da beide Summanden in der Norm beschränkt sind, folgt dies auch für $E(A,t)u_0$. □

Entsprechende Aussagen kann man auch für diskrete dynamische Systeme gewinnen. Wir wollen einige Beispiele dafür betrachten. Sei also $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, wir betrachten das diskrete dynamische System

$$x_{n+1} = Ax_n$$

mit einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist natürlich $x = 0$ eine Ruhelage, und es gilt der Stabilitätssatz.

Satz 2.1.20 *1. Ist $\sigma(A) \subset \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1\right\}$ so gilt für alle positiven Semiorbits, dass diese gegen 0 konvergieren.*

2. *Gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| > 1$, so gibt es zu jedem $R > 0$ und jedem $\delta > 0$ ein $x_0 \in B_\delta(0)$ mit $\mathcal{O}^+(x_0) \not\subset B_R(0)$.*

3. *Gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = 1$, so gibt es ein $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit beschränktem $\mathcal{O}^+(x_0)$.*

Beweis. Folgt weitgehend den Überlegungen des kontinuierlichen Falles, bzw. ist sehr einfach nachzuprüfen. □

2.1.6 Lineare invariante Unterräume

In diesem kurzen Abschnitt wollen zeigen, dass Anfangswerte mit gleichem Wachstumsverhalten in natürlicher Weise den Raum $\mathbb{R}^n$ in invariante lineare Unterräume zerlegen. Wie schon beschrieben sei zu einem reellen Eigenwert von A der Unterraum E_λ der verallgemeinerte Eigenraum, zu einem komplexen Eigenwert λ schreiben wir $E_{\lambda,\bar\lambda}$ für den verallgemeinerten Eigenraum zu den Eigenwerten $\lambda, \bar\lambda$ der durch

$$E_{\lambda,\bar\lambda} = (E_\lambda \oplus E_{\bar\lambda}) \cap \mathbb{R}^n$$

gegeben ist, wobei E_λ der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert λ im Raum $\mathbb{C}^n$ ist.

Definition 2.1.21 *Setze $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \sigma(A) \cap \mathbb{R}$ und $\sigma_{\mathbb{C}} = \sigma(A) \setminus \mathbb{R}$.*

1. *Den Unterraum*

$$E^s = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{R}}(A), \operatorname{Re}\lambda<0} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{C}}(A), \operatorname{Re}\lambda<0, \operatorname{Im}\lambda>0} E_{\lambda,\bar\lambda}$$

   nennen wir den stabilen Unterraum *von A.*

2. *Als* zentralen Unterraum *bezeichnen wir*

$$E^c = E_0 \oplus \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{C}}(A), \operatorname{Re}\lambda=0, \operatorname{Im}\lambda>0} E_{\lambda,\bar\lambda}.$$

3. $E^u = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{R}}(A), \operatorname{Re}\lambda>0} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{C}}(A), \operatorname{Re}\lambda>0, \operatorname{Im}\lambda>0} E_{\lambda,\bar\lambda}$ *nennen wir den* instabilen Unterraum *von A.*

4. *Als* zentralstabilen Unterraum *bezeichnen wir*

$$E^{cs} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{R}}(A), \operatorname{Re}\lambda\le 0} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{C}}(A), \operatorname{Re}\lambda\le 0, \operatorname{Im}\lambda>0} E_{\lambda,\bar\lambda}$$

5. *und als* zentralinstabilen Unterraum *bezeichnen wir*

$$E^{cu} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{R}}(A), \operatorname{Re}\lambda\ge 0} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathbb{C}}(A), \operatorname{Re}\lambda\ge 0, \operatorname{Im}\lambda>0} E_{\lambda,\bar\lambda}$$

Satz 2.1.22 *Die Räume $E^s, E^u, E^c, E^{cu}, E^{cs}$ sind invariant unter dem Fluss zur linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Seien*

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \max\left\{\operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\lambda) > 0\right\} \\ \lambda^+ &= \min\left\{\operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\lambda) > 0\right\} \\ \lambda^- &= \max\left\{\operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\lambda) < 0\right\}. \end{aligned}$$

Dann hat man folgende Wachstumsabschätzungen:

1. *Für $u_0 \in E^s$ und $\lambda^- < \mu$ gilt*
$$\|u(t,u_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Ce^{\mu t}.$$
2. *Für $u_0 \in E^{cs}$ und jedes $\mu > 0$ und $t > 0$ gilt*
$$\|u(t,u_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Ce^{\mu t}.$$
3. *Für $u_0 \in E^c$ und jedes $\mu > 0$ und alle t gilt*
$$\|u(t,u_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Ce^{\mu t}.$$
4. *Lösungen mit Startwert in E^u sind vorwärts unbeschränkt und es gilt*
$$ce^{\mu t} \leq \|u(t,u_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Ce^{qt}$$
entsprechende Konstanten $c, C > 0$ und $0 < \mu < \lambda^+$ und $q > \lambda_{max}$.

Beweis. Folgt sofort aus den vorherigen Überlegungen. □

2.2 Linearisierung und Stabilität

2.2.1 Eigenwerte der Linearisierung

Ein hinreichendes Stabilitätskriterium geht auf den russischen Mathematiker Ljapunov[2] zurück, das er in seiner Dissertation im Jahre 1892 bewies. Zwei Hilfssätze wollen wir vorab bereitstellen, der erste ergibt sich aus Satz 2.1.22.

[2] Aleksandr Michailowitsch Ljapunov (6.6.1857-3.11.1918) leistete in seiner Dissertation fundamentale Beiträge zur Stabilitätstheorie. Weitere Ergebnisse in der Theorie der Differentialgleichungen betreffen die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, ein Problem das von Riemann studiert worden war und bis heute aktuell ist.

Hilfssatz 2.2.1 *(a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\alpha > \max\{\mathrm{Re}(\lambda)|\lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $M_\alpha \geq 1$, so dass für alle $t \geq 0$ gilt*

$$\|E(A,t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq M_\alpha e^{\alpha t}.$$

(b) Entsprechend gibt es zu jedem $\beta < \min\left\{\mathrm{Re}(\lambda) \;\middle|\; \lambda \in \sigma(A)\right\}$ eine Konstante $N_\beta \geq 1$ mit

$$\|E(A,t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq N_\beta e^{\beta t} \; \forall t \leq 0.$$

Hilfssatz 2.2.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null, $g : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Dann existiert zu jedem $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ mit*

$$\|u_1\|_{\mathbb{R}^n} < \eta,\; \|u_2\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \Rightarrow \|g(u_1) - g(u_2)\|_{\mathbb{R}^n} < L\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Beweis. Da die Ableitung $Dg(u)$ stetig in U ist, lässt sich zu jeder Konstante $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ finden, so dass $\|Dg(u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} < L$ für $\|u\|_{\mathbb{R}^n} < \eta$ ist. Wegen des Mittelwertsatzes lässt sich die Lipschitz Konstante auf einer Umgebung durch die maximale Norm der Ableitung abschätzen. □

Satz 2.2.3 (Ljapunov, Spektrum und Stabilität II) *Gegeben sei eine autonome Differentialgleichung*

$$\dot{u} = V(u)$$

mit einer Ruhelage u_0. Die Abbildung V sei in einer Umgebung von u_0 stetig differenzierbar und $A = DV(u_0)$ sei die Linearisierung (Ableitung) von V im Punkt u_0. Dann gilt:

1. *Haben alle Eigenwerte von A negative Realteile, so ist u_0 asymptotisch stabil.*

2. *Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist, so ist u_0 instabil.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. O.B.d.A. dürfen wir davon ausgehen, dass $u_0 = 0$ ist. Zur Erleichterung der Schreibweise wollen wir dies auch tun. Da $A = Df(0)$ ist, kann man die Abbildung V in der Form $V(u) = Au + g(u)$ schreiben, wobei g bei 0 stetig differenzierbar ist und $Dg(0) = 0$ ist. Also hat die zu betrachtende Gleichung die Form

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{2.30}$$

Wir müssen die Stabilität und die Attraktivität von $u_0 = 0$ zeigen. Die Stabilität kann man auch so formulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass
$$\|v_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Longrightarrow \|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon \;\forall t \geq 0.$$
Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $v_0 \in U$. Die Lösung $u(t) = u(t, v_0)$ von (2.30) genügt der Integralgleichung
$$u(t) = E(A, t)v_0 + \int_0^t E(A, t-s)g(u(s))ds,$$
da natürlich nach Einsetzen der Lösung $u(t, v_0)$ in die Gleichung (2.30) daraus mit $h(t) = g(u(t, v_0))$ die äquivalente Gleichung
$$\dot{u} = Au + h(t)$$
entsteht. Sei $\mu = \max\{\text{Re } (\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\mu < 0$ und die Norm von $E(A, t)$ kann für jedes $\alpha \in (\mu, 0)$ abgeschätzt werden durch
$$\|E(A, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq M_\alpha e^{\alpha t},$$
wobei M_α die reelle Konstante ist, deren Existenz der Hilfssatz 2.2.1 gewährleistet. Wir finden auch eine positive Konstante $L > 0$ mit
$$M_\alpha L < \frac{1}{2}\min\{-\alpha, 1\}.$$
Nach Hilfssatz 2.2.2 gibt es ein $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$, so dass auf $B_\eta(0)$ die Funktion g die Lipschitz Konstante L hat. Sei $\delta = \frac{1}{2}\frac{\eta}{M_\alpha}$. Nun hat man für $\|v_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ die Abschätzung
$$\|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|E(A, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \;\|v_0\|_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t \|E(A, t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \;\|g(u(s, v_0))\|_{\mathbb{R}^n}\; ds. \tag{2.31}$$
Einsetzen ergibt (jedenfalls solange $\|u(s, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \eta$ ist)
$$\begin{aligned}
\|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq M_\alpha e^{\alpha t}\delta + M_\alpha L\eta \int_0^t e^{\alpha(t-s)}ds \\
&< \frac{1}{2}\eta + M_\alpha L\eta\frac{1}{|\alpha|}(1 - e^{\alpha t}) \\
&< \frac{1}{2}\eta + M_\alpha L\eta\frac{1}{|\alpha|} \\
&< \eta < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit hat man die Stabilität, denn angenommen es gäbe eine Zahl $t^* > 0$ mit $\|u(t^*, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} = \eta$, dann kann man o.B.d.A. davon ausgehen, dass t^* minimal mit dieser Eigenschaft gewählt wurde. Dann ist für $t \in (0, t^*)$ $\|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \eta$. Unsere Abschätzung garantiert, dass auch noch für $t = t^*$ die Lösung $u(t, v_0)$ in $B_\eta(0)$ enthalten ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Um die asymptotische Stabilität zu zeigen, nutzen wir die Formel (2.31) und schätzen etwas anders ab:

$$\|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_\alpha e^{\alpha t}\delta + M_\alpha L \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \|u(s, v_0)\|_{\mathbb{R}^n}\, ds. \tag{2.32}$$

Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$ liefert für die Funktion $v(t) = e^{-\alpha t}\|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n}$ die Abschätzung

$$v(t) \leq M_\alpha \delta + M_\alpha L \int_0^t v(s)\, ds.$$

Hier verwenden wir das Lemma von Gronwall (Satz 1.2.34) und erhalten

$$v(t) \leq M_\alpha \delta e^{M_\alpha L t}.$$

Damit ergibt sich für $u(t, v_0)$ die Abschätzung

$$\|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_\alpha \delta e^{(M_\alpha L + \alpha)t}.$$

Da $M_\alpha L + \alpha < 0$ ist, konvergiert dies gegen Null. Damit ist die asymptotische Stabilität gezeigt.
Wir nehmen nun an, dass die Linearisierung einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt. Wir zeigen, dass es eine nichttriviale Lösung $u(t)$ gibt mit $u(t) \to u_0$ für $t \to -\infty$. Daraus folgt dann die Behauptung. Zunächst wollen wir uns überlegen, wie die Aussage des Satzes aus dieser Tatsache folgt. Dann werden wir dies als eigenes Lemma formulieren. Sei $u(t)$ eine Lösung mit $u(t) \to u_0 = 0$ für $t \to -\infty$. Sei $\varepsilon = \|u(0)\|_{\mathbb{R}^n} > 0$. (Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass 0 im maximalen Existenzintervall enthalten ist und dass $u_0 = 0$ ist.) Angenommen, es existiere ein $\delta > 0$, so dass aus $\|uv_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ folgen würde, dass für alle $t \geq 0$ gilt $\|u(t, v_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$, so könnte man schließen, dass $\|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} > \delta\ \forall t \leq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Wie angekündigt wollen wir die Existenz von $u(t)$ getrennt zeigen. □

Definition 2.2.4 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wie oben sei E^u die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit positivem Realteil, E^s die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit negativem Realteil, und E^c die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit Realteil* 0. *P^+, P^-, P^0 schreiben wir für die* Projektoren *auf diese Räume mit Kern $E^c \oplus E^s$ bzw. $E^u \oplus E^s$ bzw. $E^c \oplus E^s$. Weiter seien $Q^+ = I - P^+$, $Q^- = I - P^-$ die entsprechenden komplementären Projektoren. Weiterhin wollen wir vereinbaren, dass $\sigma^+(A)$ für $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ steht und ganz entsprechend $\sigma^0(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$, bzw. $\sigma^-(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$ definiert sind.*

Definition 2.2.5 *Die Einschränkungen von A auf die verschiedenen Unterräume wollen wir folgendermaßen bezeichnen:*

$$\begin{aligned} A_u &= A\big|_{E^u} \\ A_s &= A\big|_{E^s} \\ A_c &= A\big|_{E^c} \\ A_{cu} &= A\big|_{E^c \oplus E^s} \\ A_{cs} &= A\big|_{E^c \oplus E^u} \end{aligned}$$

Lemma 2.2.6 *(a) Die jeweiligen Spektren dieser linearen Abbildungen sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \sigma(A_u) &= \sigma^+(A) \\ \sigma(A_s) &= \sigma^-(A) \\ \sigma(A_c) &= \sigma^0(A) \\ \sigma(A_{cu}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^+(A) \\ \sigma(A_{cs}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^-(A). \end{aligned}$$

(b) Die Matrixexponentialfunktionen der Einschränkungen A_u, A_{cs} genügen den Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \forall \beta < \frac{1}{3} \min \{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma^+(A)\} \quad \exists N_{3\beta} \geq 1 \quad \|E(A_u, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} &\leq N_{3\beta} e^{3\beta t} \; \forall t \leq 0 \\ \forall \alpha > 0 \quad \exists M_\alpha \geq 1 \quad \|E(A_{cs}, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} &\leq M_\alpha e^{\alpha t} \; \forall t > 0. \end{aligned}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2.2.1. ☐

Bemerkung 2.2.7 Ähnliche Abschätzungen gelten natürlich auch für die anderen Teile von A.

Bemerkung 2.2.8 Außerdem kann man eine solche Dreiteilung auch an anderen Achsen der Form $\operatorname{Re} z = c$ als der imaginären Achse vornehmen.

Satz 2.2.9 *Sei $\dot{u} = Au + g(u)$ eine autonome Differentialgleichung mit stetig differenzierbarem $g : U \to \mathbb{R}^n$ und $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Hat A Eigenwerte mit positivem Realteil, so existiert eine Umgebung $B_\delta(0)$, so dass zu jedem $u_0 \in B_\delta(0) \cap E^+$ eine Lösung $u(t)$ existiert mit*

1. *$P^+u(0) = u_0$,*
2. *$u(t) \to 0$ für $t \to -\infty$.*

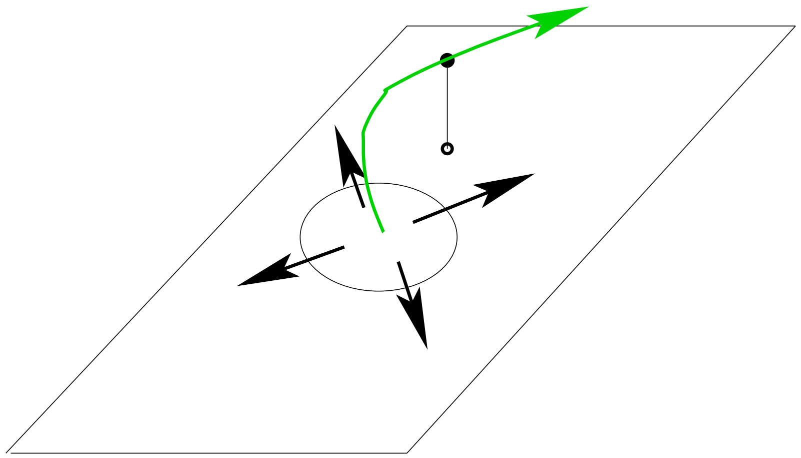

Abbildung 2.5: Existenz einer Lösung, die für $t \to -\infty$ gegen eine Ruhelage konvergiert. Die schwarzen Pfeile deuten den linearisierten Fluss in dem Raum E^u an, die grüne Linie eine Lösung der Gleichung mit $P^+u(0) = u_0$.

Beweis. Wähle ein

$$\alpha \in \Big(0, \frac{1}{3} \min \big\{ \operatorname{Re}(\lambda) \,\big|\, \lambda \in \sigma^+(A) \big\}\Big).$$

Dann gibt es nach dem oben angegebenen Lemma 2.2.6 Zahlen M_α und $N_{3\alpha}$ mit den entsprechenden Abschätzungen $\|E(A_{cs},t)\| \leq M_\alpha e^\alpha t$ für positive t und

$$\|E(A_u,t)\| \leq N_{3\alpha} e^{3\alpha t}$$

für nichtpositive t. Setze

$$M = \max\left\{M_\alpha, N_{3\alpha}\right\}.$$

Damit gilt $\|E(P^+A,t)P^+\|_{\mathcal{L}(E^u,E^u)} \leq Me^{3\alpha t}$ für $t \leq 0$ und $\|E(Q^+A,t)Q^+\|_{\mathcal{L}(E^s,E^s)} \leq Me^{\alpha t}$ für $t > 0$. Wir wählen $\eta > 0$ so klein, dass

$$\frac{ML(\eta)}{\alpha} \max\left\{\|P^+\|, \|Q^+\|\right\} < \frac{1}{4}$$

ist, wobei $L(\eta)$ die Lipschitz Konstante von g auf $B_\eta(0)$ ist. Wir betrachten den Raum der Funktionen

$$C^\alpha(u_0) = \left\{u : (-\infty, 0] \to U \middle| u \text{ ist stetig}, \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \eta e^{2\alpha t} < \infty,\ P^+u(0) = u_0\right\}.$$

Auf $C^\alpha(u_0)$ definieren wir eine Metrik d^α durch

$$d^\alpha(u,v) = \eta \sup\left\{\|u(t) - v(t)\|_{\mathbb{R}^n} e^{-2\alpha t} \;\middle|\; t \leq 0\right\}.$$

d^α macht $C^\alpha(u_0)$ zum vollständigen, metrischen Raum. Wir prüfen die Vollständigkeit nach. Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik d^α. Dann existiert ein punktweiser Limes $u(t)$. Wir müssen zeigen, dass u wieder in C^α liegt. Dazu prüfen wir die Wachstumsbedingung nach:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \|u(t) - u_n(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|u_n(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \|u(t) - u_n(t)\|_{\mathbb{R}^n} e^{-2\alpha t} e^{2\alpha t} + \eta e^{2\alpha t} \\
&\leq (d^\alpha(u,u_n) + \eta) e^{2\alpha t} \\
&\leq (\varepsilon + \eta) e^{2\alpha t}.
\end{aligned}$$

Wir setzen für $t \leq 0$

$$Tu(t) = e^{P^+At}u_0 + \int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))\,ds. \tag{2.33}$$

Wir müssen für ein genügend kleines $\delta > 0$ drei Dinge beweisen:

1. T bildet für $\|u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab.

2. T ist eine starke Kontraktion.

3. Der Fixpunkt u hat die gewünschten Eigenschaften.

1.) T bildet den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab. Dazu müssen wir die drei Eigenschaften nachprüfen, nämlich die Stetigkeit von Tu, die Wachstumsschranke und schließlich die Anfangsbedingung. Die Stetigkeit von Tu ist klar, sofern die Integrale existieren. Auch die letzte Eigenschaft ist offensichtlich:

$$P^+Tu(0) = P^+E(P^+A, 0)u_0 + P^+ \int_{-\infty}^0 E(Q^+A, -s)Q^+g(u(s))\, ds.$$

Dies ist gleich P^+u_0. Bleibt die Beschränktheit von Tu zu zeigen. Dazu schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}\|Tu(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \quad & \|e^{P^+At}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\ \|u_0\|_{\mathbb{R}^n} \\ + \quad & \int_t^0 \|e^{P^+A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|P^+\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}L(\eta)\|u(s)\|_{\mathbb{R}^n}\, ds \\ + \quad & \int_{-\infty}^t \|e^{Q^+A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|Q^+\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}L(\eta)\|u(s)\|_{\mathbb{R}^n}\, ds.\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt (Dabei beachte man, das Vorzeichen der Zeitdifferenz in den Integralen.) mit $c = ML(\eta)\max\{\|P^+\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}, \|Q^+\||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\}$

$$\begin{aligned}\|Tu(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \quad & Me^{3\alpha t}\|u_0\|_{\mathbb{R}^n} \\ & +c\left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}\|u(s)\|_{\mathbb{R}^n}\, ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}\|u(s)\|_{\mathbb{R}^n}\, ds\right).\end{aligned}$$

Wegen der Wachstumsbeschränkung in C^α kann man weiter abschätzen

$$\|Tu(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Me^{3\alpha t}\|u_0\|_{\mathbb{R}^n} + c\left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{2\alpha s}\, ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}e^{2\alpha s}\, ds\right).$$

Wir betrachten zunächst das erste Integral, es liefert folgenden Beitrag:

$$e^{3\alpha t}\int_t^0 e^{-3\alpha s}e^{2\alpha s}\, ds = e^{3\alpha t}\frac{1}{-\alpha}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Dies ergibt als obere Abschätzung für das erste Integral

$$\frac{1}{\alpha}(e^{2\alpha t} - e^{3\alpha t}).$$

Für das zweite Integral erhält man

$$e^{\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\, ds \le \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha t}.$$

Zusammen ergibt sich die endgültige Abschätzung

$$\|Tu(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le Me^{3\alpha t}\|u_0\|_{\mathbb{R}^n} + ML(\eta)\eta\frac{1}{\alpha}e^{2\alpha t} - \frac{ML(\eta)\eta}{\alpha}e^{3\alpha t}.$$

Mit $\delta < \frac{L(\eta)\eta}{\alpha}$ und der Wahl von η erhält man

$$\|Tu(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \eta e^{2\alpha t}.$$

Damit haben wir den ersten Schritt abgeschlossen.
2.) Seien $u,\ v \in C^\alpha(u_0)$. Wir müssen den Abstand $d^\alpha(Tu, Tv)$ kontrollieren. Also

$$d^\alpha(Tu, Tv) = \eta \sup\left\{\|Tu(t) - Tv(t)\|_{\mathbb{R}^n} e^{-2\alpha t} \;\middle|\; t \le 0\right\}.$$

Die Differenz $Tu(t) - Tv(t)$ hat die Form

$$\begin{aligned} Tu(t) - Tv(t) = & \int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+(g(u(s)) - g(v(s)))\, ds \\ + & \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+(g(u(s)) - g(v(s)))\, ds. \end{aligned}$$

Übergang zu den Normen und die grundlegenden Abschätzungen ergeben

$$\begin{aligned} \|Tu(t) - Tv(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \; & ML(\eta)\Bigg(\|P^+\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}\|u(s) - v(s)\|_{\mathbb{R}^n}\, ds \\ & + \|Q^+\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}\|u(s) - v(s)\|_{\mathbb{R}^n}\, ds\Bigg). \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder die beiden Integrale getrennt und multiplizieren zunächst mit $\eta e^{-2\alpha t}$. Für das erste Integral erhalten wir

$$e^{-2\alpha t}\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{-2\alpha s}e^{2\alpha s}\|u(s) - v(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds \le e^{\alpha t}\int_t^0 e^{-\alpha s} ds\, d^\alpha(u, v).$$

Damit ergibt sich für das erste Integral die Abschätzung

$$e^{-2\alpha t}\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{-2\alpha s}e^{2\alpha s}\|u(s)-v(s)\|_{\mathbb{R}^n}ds \le \frac{1}{\alpha}d^\alpha(u,v).$$

Für das zweite erhalten wir

$$e^{-2\alpha t}\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}|u(s)-v(s)|ds.$$

Wie oben ergibt sich dafür

$$\int\limits_{-\infty}^t e^{2\alpha(t-s)}ds d^\alpha(u,v) \le \frac{1}{\alpha}d^\alpha(u,v).$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} d^\alpha(Tu,Tv) &\le ML(\eta)\max\{\|P^+\|,\|Q^+\|\}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)d^\alpha(u,v) \\ &< 2\frac{ML(\eta)}{\alpha}\max\{\|P^+\|,\|Q^+\|\}d^\alpha(u,v). \end{aligned}$$

Nach der Wahl von $L(\eta)$ ist damit

$$d^\alpha(Tu,Tv) \le \frac{1}{2}d^\alpha(u,v)$$

und T ist eine starke Kontraktion.
3.) Sei $Tu = u$. Wir müssen zeigen, dass u die Differentialgleichung löst, und das richtige Verhalten für $t \to -\infty$ zeigt. Letzteres ist aufgrund der Definition von C^α klar. Dass u die Differentialgleichung löst, folgt aus der Invarianz der Unterräume und der Tatsache, dass man die Differentialgleichung in ein gekoppeltes System auf den Unterräumen äquivalent umschreiben kann. Wir rechnen nach $\dot{u} + \frac{d}{dt}(Tu)(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Tu)(t) = Ae^{P^+At}u_0 &+ P^+g(u(t)) + A\int\limits_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))\,ds + Q^+g(u(t)) \\ &+ A\int\limits_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))\,ds \end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt

$$Ae^{P^+At}u_0 + g(u(t)) + A\left(\int\limits_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))\,ds + \int\limits_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))ds\right)$$
$$= A(Tu)(t) + g((Tu)(t)).$$

Deshalb ist der Fixpunkt $u = Tu$ eine Lösung der Gleichung und genügt den im Satz behaupteten Eigenschaften. □

Bemerkung 2.2.10 Die dritte Aussage, die wir im ersten Satz über Spektrum und Stabilität (im linearen Fall) gemacht haben, hat keine Übertragung auf die gegenwärtige Situation. Hat A Eigenwerte auf der imaginären Achse, so kann u_0 asymptotisch stabil, stabil aber nicht asymptotisch stabil oder auch instabil sein. Drei triviale Fälle, die dies erläutern, sind $\dot{u} = -u^3$, $\dot{u} = 0$ und schließlich $\dot{u} = u^2$. Im ersten Fall ist $u_0 = 0$ asymptotisch stabil, im zweiten stabil, aber nicht asymptotisch stabil, und im dritten Fall instabil.

Definition 2.2.11 *Sei $\dot{u} = V(u)$ wie im Satz und w_0 eine Ruhelage, so dass $A = Df(w_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, so nennt man die Ruhelage* hyperbolisch.

Diesen Begriff motiviert das Phasenporträt der Gleichung $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$, die man kurz in der Form $\dot{z} = \bar{z}$ schreibt.

Beispiel 2.2.12 (Lorenz Gleichungen[3]) Wir betrachten das dreidimensionale System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = V(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Dabei seien b, r, σ drei positive reelle Zahlen. Für Ruhelagen erhält man aus der ersten Gleichung $x = y$. Damit ergibt die zweite Gleichung $(r - 1 - z)x = 0$. Die Lösungen dieser Gleichungen sind $x = 0$ oder $z = r - 1$. Mit der dritten Gleichung erhält man schließlich $x^2 = bz$. Damit ergibt sich als Lösung $x = y = z = 0$ oder

$$x = y,\ z = 1 - r,\ x = \pm\sqrt{b(r-1)}.$$

[3]Lorenz (), amerikanischer Metereologie, gilt mit den nach ihm benannten Gleichungen als einer der Begründer der sogenannten Chaostheorie.

Damit erkennt man, dass die nichttriviale Lösung nur für $r > 1$ existiert. Für $r < 1$ hat man also nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$, und für $r > 1$ hat man neben dieser trivialen Lösung noch zwei weitere Lösungen. Wir werden die Stabilität der trivialen Lösung ausrechnen. Als Linearisierung bei $x = y = z = 0$ ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Das Spektrum kann man leicht ausrechnen: Man hat einen Eigenwert $-b < 0$. Um die Vorzeichen der anderen beiden zu diskutieren, betrachten wir

$$\det A = \sigma(1-r) \text{ und } \mathrm{tr} A = -1 - \sigma < 0.$$

Also ist für $r < 1$ die triviale Ruhelage asymptotisch stabil. Bei $r = 1$, dort wo weitere Lösungen entstehen, verliert diese Lösung die Stabilität, sie wird instabil. Um die Stabilität der neuen Ruhelagen zu bekommen, geben wir zunächst die Linearisierung A von f in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) an:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Die charakteristische Gleichung für diese Eigenwerte lautet

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Man rechnet nach, dass für

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

alle Realteile für die nichttriviale Lösung negativ sind. Für $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ hat man die Stabilität für $1 < r < \frac{470}{19}$. Dort werden auch die nichttrivialen Lösungen instabil. Weitere interessante Phänomene treten auf.

Beispiel 2.2.13 Ist w_0 eine Ruhelage einer autonomen Differentialgleichung und gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(w_0)$, so dass für jedes $u_0 \in B_\varepsilon(w_0)$ gilt $\omega(u_0) = w_0$, so folgt nicht, dass w_0 asymptotisch stabil ist. Man beachte, dass bei der Definition der asymptotischen Stabilität die Stabilität gefordert wurde. Ein Beispiel für dieses Phänomen liefert Aufgabe 3, Blatt 10. In Abbildung 2.6 sehen wir ein qualitatives Phasenportrait, das das beschriebene Phänomen illustriert.

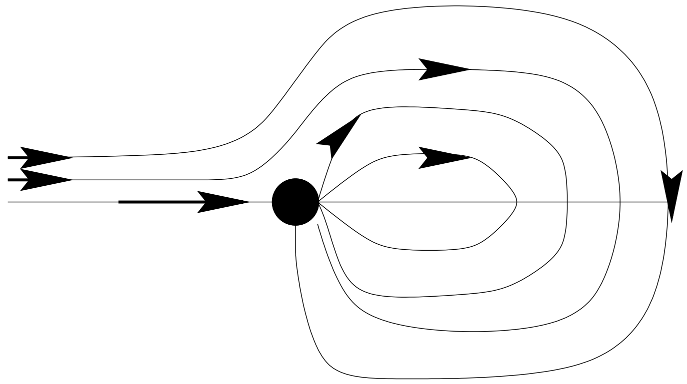

Abbildung 2.6: Ein Beispiel einer attraktiven Ruhelage, die nicht asymptotisch stabil ist. Typisch ist das Auftreten von homoklinen Orbits.

2.2.2 Die Stabilität einer periodischen Lösung

In diesem Abschnitt betrachten wir einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}$ für die autonome Gleichung

$$\dot{u} = V(u) \tag{2.37}$$

und eine Lösung $u(t)$ in diesem Orbit. Wie im vorigen Abschnitt für eine Ruhelage wollen wir auch hier den Begriff der Stabilität definieren und Kriterien für verschiedene Formen der Stabilität angeben. Hier ist die Situation naturgemäß etwas komplizierter als im Fall einer Ruhelage.

Definition 2.2.14 *Der geschlossene Orbit $\mathcal{O}$ heißt* orbital stabil, *wenn $\mathcal{O}$ als Menge stabil im Sinne der Definition 1.3.14 ist. Er wird als* orbital asymptotisch stabil *bezeichnet, wenn er stabil und attraktiv im Sinne der Definition 1.3.13 ist. Man nennt u* orbital asymptotisch stabil mit asymptotischer Phase, *wenn $\mathcal{O}$ asymptotisch stabil ist und es eine Umgebung U von $\mathcal{O}$ gibt, so dass zu jedem Anfangswert $u_0 \in U$ eine Zahl $T(u_0)$ gibt, so dass*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t - T(u_0)) - u(t, t_0)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$$

ist.

Ein geometrischer Zugang zur Stabilitätstheorie periodischer Lösungen geht auf Poincaré zurück. Im Abschnitt 1.4.2 haben wir Abbildungen mittels globaler transversaler Schnitte definiert. Hier betrachten wir nun lokale transversale Schnitte. Zunächst konstruieren wir also den sogenannten

Poincaré Schnitt und die Poincaré Abbildung. Dabei geht man von der Beobachtung aus, dass jeder Punkt auf einem geschlossenem Orbit regulärer Punkt ist und somit eine Transversale existiert.

Definition 2.2.15 1. *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ definiert einen Unterraum U, durch*

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle v, u \rangle = 0 \right\}.$$

Die Teilmenge $S = S_\delta \subset U$ mit

$$S_\delta = \left\{ u \in U \;\middle|\; \|u\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \right\}$$

heißt $n-1$-dimensionale Scheibe *definiert durch u.*

2. *Eine $n-1$-dimensionale Scheibe S heißt Transversale oder* lokale Transversale, *wenn $u_0 \in S$ impliziert, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für $0 \neq |t| < \varepsilon$ gilt $u(t, u_0) \notin S$.*

Lemma 2.2.16 *Sei L eine Transversale zum Lipschitz stetigen Vektorfeld V in einem Punkt u_0 auf einem geschlossenem Orbit $\mathcal{O}$. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von u_0, so dass zu jedem Punkt $u \in U_0 \cap S$ ein $t_u > 0$ existiert, so dass $u(t_u, u) \in S$ ist, aber für $t \in (0, t_u)$ die Lösung $u(t, u) \notin S$ ist.*

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten. □

Definition 2.2.17 *Eine Transversale L, wie sie im vorherigen Lemma angegeben war, heißt* Poincaré Schnitt. *Die Abbildung $\Pi : S \cap U_0 \to S : v \mapsto u(t_v, v)$ nennt man* Poincaré Abbildung *oder auch* Wiederkehrabbildung, engl. `return map`.

Ein alternativer Beweis von Lemma 2.2.16 beruht auf dem Satz über implizite Funktionen, damit erhält man auch eine etwas stärkere Aussage.

Satz 2.2.18 *Ist $V \in C^1(U)$, so existiert eine Umgebung U_0 von u_0, so dass $\Pi : L \cap U_0 \to L$ stetig differenzierbar ist.*

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz über implizite Funktionen: Man wähle eine affin lineare Transversale $u_0 + H$, so ist für jeden Punkt v nahe u_0 der affine Raum $v + H$ eine Transversale und man hat eine stetig differenzierbare Abbildung π einer Umgebung V nach $\mathcal{O}$ durch

$$u + H \ni v \mapsto u.$$

Wir betrachten für w nahe u_0 und t nahe t_{u_0} die Abbildung $Q(w,t) = \pi \circ \Phi(w,t)$, wobei Φ der zu f gehörende Fluss ist. Dann ist Q stetig differenzierbar, $Q(u_0, t_{u_0}) = u_0$ und

$$Q_t(u_0, t_{u_0}) = D_w\pi \circ \Phi_t(u_0, t_{u_0}) = D_w\pi f(u_0) \neq 0.$$

Damit garantiert der Satz über implizite Funktionen die lokale Lösbarkeit der angegebenen Gleichung und damit die Behauptung des Satzes. □

Die Poincaré Abbildung gibt uns ein einfaches geometrisches Kriterium für die Stabilität einer periodischen Lösung, das auch für theoretische Untersuchungen von Bedeutung ist.

Satz 2.2.19 *Sei $V : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der Differentialgleichung $\dot{u} = V(u)$, u_0 ein (regulärer) Punkt auf $\mathcal{O}$. Sei L ein Poincaré Schnitt mit Poincaré Abbildung Π. Dann gilt:*

1. *Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, dass $w \in L$ und $\|w - u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ implizieren, so dass die Iterierten $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind und gilt $\|\Pi^n(w) - u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathcal{O}$ orbital stabil.*

2. *Ist $\mathcal{O}$ orbital stabil und gibt es eine Umgebung U_1 von u_0, so dass aus $w \in U_1$ folgt, dass $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist und für $n \to \infty$ gegen u_0 konvergiert, so ist $\mathcal{O}$ orbital asymptotisch stabil.*

3. *Gibt es ein w, so dass $\Pi^{-n}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren und gegen u_0 für $n \to -\infty$ konvergieren so ist $\mathcal{O}$ instabil.*

Beweis. Folgt offensichtlich aus der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten! Beachte, dass es eine Umgebung gibt, auf der die Rückkehrzeit durch $2t_{u_0} \geq t_w \geq \frac{1}{2}t_{u_0}$ nach oben bzw. unten beschränkt ist! □

Um ein eher algebraisches Kriterium zu erhalten, müssen wir uns noch einmal Gedanken über Übergangsmatrizen machen.

Definition 2.2.20 *Sei $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, in der ersten Komponente Lipschitz stetig mit $V(0,t) = 0$. Die Ruhelage $u = 0$ der Gleichung*

$$\dot{u} = V(u,t)$$

nennt man stabil, *wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass aus $\|u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ folgt, dass $\|u(t,t_0,u_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ für alle $t > t_0$. Kann δ unabhängig von t_0 aus einer Menge $S \subset \mathbb{R}$ gewählt werden, so spricht man von* gleichmäßiger Stabilität bezüglich S. *Entsprechend definiert man* asymptotisch stabil, *wenn es ein $\delta_1(t_0) > 0$ gibt, so dass aus $|u_0| < \delta_1(t_0)$ folgt $u(t,t_0,u_0) \to 0$. Man nennt u_0* instabil, *wenn es nicht stabil ist. Bei der Definition gleichmäßiger asymptotischer Stabilität (bezüglich S) verlangt man, dass 0 stabil und asymptotisch stabil ist und die Zahl $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ unabhängig von $t_0 \in S$ gewählt werden kann und schließlich zu jeder positiven Zahl $\eta > 0$ eine Zeit $T(\eta)$ gefunden werden kann, so dass für alle $t > t_0$ $\|u(t+T(\eta),t_0,u_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \eta$ für alle $t_0 \in S$ und alle u_0 mit $\|u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_1$ ist. Man überträgt diese Begriffe auf beliebige Lösungen, indem man für eine Lösung $u(t)$ das System $\dot{y} = V(u(t)+y,t)) - V(u(t),t)$ betrachtet.*

Lemma 2.2.21 *Alle Lösungen von $\dot{u} = A(t)u$ haben die gleichen Stabilitätseigenschaften.*

Beweis. Folgt aus der Linearität. □

Bemerkung 2.2.22 *Aus diesem Grunde sagt man auch, das System (2.28) $\dot{u} = A(t)u$ ist stabil, asymptotisch stabil oder instabil.*

Satz 2.2.23 *Sei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig. Sei $\Psi(t)$ eine Fundamentalmatrix für $\dot{u} = A(t)u$ und β sei eine beliebige reelle Zahl. Dann ist das System $\dot{u} = A(t)u$*

1. *stabil, genau dann wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Konstante $K(t_0)$ gibt mit $\|\Psi(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq K(t_0)$ für alle $t \geq t_0$,*

2. *gleichmäßig stabil für $t_0 \geq \beta$, genau dann wenn es eine Konstante $K(\beta)$ gibt, so dass für $t_0 \geq \beta$ und $t_0 \leq s \leq t$ gilt*

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq K(\beta),$$

3. *asymptotisch stabil genau dann, wenn*

$$\|\Psi(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

4. *gleichmäßig asymptotisch stabil für* $t_0 \geq \beta$ *genau dann, wenn es Konstanten* $K = K(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ *gibt mit*

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \text{ für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Beweis. 1.) Die Rückrichtung folgt einfach aus der Darstellung der Lösung: Sei $u(t)$ eine Lösung, so ist $u(t) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)$. Sei $M = \|\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$. Dann ist $\|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq K(t_0)M\ \|u(t_0)\|_{\mathbb{R}^n}$. Wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{K(t_0)M}$, so hat man die Stabilitätsbedingung erfüllt. Die Hinrichtung ist auch nahezu offensichtlich: Stabilität besagt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n,\ \|u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ die Norm $\|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ beschränkt bleibt. Angenommen es gäbe Folgen $u_\nu,\ t_\nu$, so dass

$$\Psi(t_\nu)u_\nu \to_{\nu\to\infty} \infty$$

konvergiert. Dann hat $\tilde{u}_\nu = \frac{1}{2}\delta\frac{1}{\|\Psi(t_0)u_\nu\|_{\mathbb{R}^n}}\Psi(t_0)u_\nu$ die Norm $\frac{\delta}{2}$ und $\|\Psi(t_\nu)\Psi(t_0)^{-1}\tilde{u}_\nu\|_{\mathbb{R}^n} \geq \varepsilon$ für genügend großes ν.
2.) Beide Richtungen können wie im ersten Teil durchgeführt werden, hier hängt δ für $t_0 \geq \beta$ nicht von t_0 ab.
3.) Als erstes folgt aus der Abklingbedingung die Beschränktheit von $\|\Psi(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$ und damit die Stabilität. Die Asymptotik erhält man wie im ersten Beweisschritt. Die Umkehrung folgt auch wie oben.
4.) Ist die angegebene Bedingung erfüllt, so konvergiert $\|\Psi(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $t \to \infty$ und aus 2.) folgt die Stabilität. Aus dem dritten Schritt erhält man die asymptotische Stabilität. Sei $\|u(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1$ und $\eta \in (0, K)$. Setze

$$T = -\frac{\log(\eta/K)}{\alpha}.$$

Dann ist für $t \geq t_0 + T$, $t' = t - (T + t_0) > 0$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}\|u(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&= Ke^{-\alpha T}e^{-\alpha t'}\|u(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&< Ke^{-\alpha T} = \eta.
\end{aligned}$$

Hier ist die Umkehrung schwieriger. Wir nehmen also an, dass die Nulllösung gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ ist. Insbesondere existiert ein $b > 0$, so dass zu jedem $\eta < b$ ein $T = T(\eta)$ existiert mit

$$\|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \eta,\ \ t \geq t_0 + T,\ \ t_0 > \beta,\ \ \|u(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} < b.$$

Daher ist (warum kann man so abschätzen?)

$$\|\Psi(t+T)\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} < \frac{\eta}{b} < 1 \ \text{ für } t \geq t_0 \geq \beta.$$

Aufgrund der Definition von gleichmäßiger asymptotischer Stabilität gilt eine entsprechende Abschätzung für alle $t \geq \beta$, d.h.

$$\|\Psi(t+T)\Psi(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} < \frac{\eta}{b} < 1 \ \text{ für } t \geq \beta.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stabilität existiert ein $M = M(\beta)$ mit

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq M, \ \text{ für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Setze

$$\alpha = -T^{-1}\log(\frac{\eta}{b})$$

und

$$K = Me^{\alpha T}.$$

Dann gibt es zu jedem $t \geq t_0$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $kT \leq t - t_0 < (k+1)T$. Daher gilt dann

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} &= \|\Psi(t)\Psi(t_0+kT)^{-1}\Psi(t_0+kT)\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|\Psi(t)\Psi(t_0+kT)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \, \|\Psi(t_0+kT)\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\
&\leq M \, \|\Psi(t_0+Tk)\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\
&\leq M \, \|\Psi(t_0+Tk)\Psi(t_0+(k-1)T)^{-1}\Psi(t_0+(k-1)T)\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\
&\leq M \, \frac{\eta}{b}\|\Psi(t_0+(k-1)T)\Psi(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\
&\vdots \quad \vdots \\
&\leq M\Big(\frac{\eta}{b}\Big)^k \\
&\leq Me^{-\alpha kT} \\
&= Ke^{-\alpha(k+1)T} \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}
\end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. □

Wir betrachten nun die homogene, lineare Gleichung

$$\dot{u} = A(t)u \tag{2.38}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\exists T > 0 \ \text{ mit } A(t+T) = A(t)\ \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oder $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ eine stetige Abbildung ist. Der Zusammenhang mit periodischen Lösungen wird in Kürze klar werden.

Lemma 2.2.24 *Zu jeder komplexen $n \times n$ Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $\det A \neq 0$ gibt es eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $e^B = E(B,1) = A$.*

Beweis. Ist $e^B = A$, so gilt für jede nichtsinguläre Matrix C

$$e^{C^{-1}BC} = C^{-1}AC.$$

Daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass A in Jordanscher Normalform gegeben ist. Also hat A die Gestalt (2.3) mit Jordan Blöcken der Form (2.4). Jeden Block der Form (2.4) schreiben wir in der Gestalt

$$\mathcal{B}_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k,$$

wobei N_k der nilpotente Anteil ist. Aufgrund der Annahme, dass die Determinante von A von Null verschieden ist, ist auch $\lambda_k \neq 0$. Wir geben nun eine Matrix B_k an, so dass $e^{B_k} = \mathcal{B}_k$ ist. Wir schreiben $\mathcal{B}_k$ in der Form $\mathcal{B}_k = \lambda_k(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda_k} N_k)$. Dann ist (für einen geeigneten Zweig des Logarithmus) $B_k = (\log \lambda_k)\mathbb{1} + S_k$ mit

$$S_k = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j\lambda^j} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^j .$$

Einsetzen in die Potenzreihe gibt das gewünschte Resultat. □

Bemerkung 2.2.25 Man beachte, dass Lemma 2.2.24 nicht für $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\det A \neq 0$ gilt.

Satz 2.2.26 (Floquet) *Sei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig und T-periodisch. Jede Fundamentalmatrix der Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ hat die Form*

$$\Psi(t) = P(t)E(B, t),$$

wobei B eine konstante und P eine T-periodische Matrix ist.

Beweis. Ist $\Psi(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist $\Psi(t+T)$ auch eine Fundamentalmatrix. Daher gibt es eine nichtsinguläre Matrix C, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Psi(t + T) = \Psi(t)C$$

gilt. C hat dann aufgrund der Flusseigenschaft die Darstellung $C = \Psi(T)$. Nach Lemma 2.2.24 gibt es eine Matrix B mit $e^{TB} = C$. Setze

$$P(t) = \Psi(t)E(B, -t).$$

Dann hat man

$$P(t + T) = \Psi(t + T)E(B, -(t + T)) = \Psi(t)E(B, T)E(B, -(t + T)) = P(t).$$

□

Korollar 2.2.27 (Transformation auf konstante Koeffizienten)
Zu T-periodischem $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt es eine nichtsinguläre periodische Koordinatentransformation $P : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, welche die Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten überführt.

Beweis. Seien P, B wie im Satz 2.2.26. Wir setzen $w = (P(t))^{-1}u$. Die Differentialgleichung für w ist dann mit

$$\frac{d}{dt}P(t)w = \dot{P}w + P\dot{w} = \dot{u} = Au$$

und damit

$$\dot{w} = P(t)^{-1}\big(A(t)P(t) - \dot{P}(t)\big)w.$$

Da $P(t) = \Psi(t)E(B, -t)$ ist, hat man $\dot{P} = A(t)P(t) - P(t)B$. Einsetzen gibt

$$\dot{w} = P(t)^{-1}\big(A(t)P(t) - A(t)P(t) + P(t)B\big) = Bw.$$

Die rechte Seite hängt nicht von t ab. □

Definition 2.2.28 *Gegeben sei das homogene, lineare System (2.28) $\dot{u} = A(t)u$ mit T-periodischem $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt eine Matrix C, die für eine Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ des angegebenen Systems der Beziehung*

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C$$

genügt, eine Monodromiematrix *von (2.28). Die Eigenwerte ρ_j einer Monodromiematrix heißen* charakteristische Multiplikatoren *oder auch* Floquetmultiplikatorent[4] *von (2.28). Ist ρ ein charakteristischer Multiplikator und $\rho = e^{\lambda T}$, so wird λ als* charakteristischer Exponent *oder* Floquetexponent *bezeichnet. bezeichnet.*

Lemma 2.2.29 *Eine komplexe Zahl λ ist charakteristischer Exponent der Gleichung (2.28) mit einer T-periodischen rechten Seite A, falls das System (2.28) eine nichttriviale Lösung $p(t)e^{\lambda t}$ besitzt, wobei p periodisch mit Periode T ist. Speziell gibt es genau dann eine nichttriviale Lösung $u(t)$ mit Periode T (bzw. $2T$), wenn es den Multiplikator 1 (bzw. -1) gibt.*

Beweis. Sei $e^{\lambda t}p(t)$ eine solche Lösung. Dann gibt es ein u_0 und eine Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ mit $e^{\lambda t}p(t) = \Psi(t)u_0$. Nach dem Satz von Floquet 2.2.26 kann $\Psi(t)$ in der Form $P(t)E(B,t)$ geschrieben werden. Also ist $e^{\lambda t}p(t) = P(t)E(B,t)u_0$. Da $P(t+T) = P(t)$ und $p(t+T) = p(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, hat man

$$e^{\lambda(t+T)}p(t+T) = P(t+T)E(B,t+T)u_0,$$

und daher ist

$$e^{\lambda t}e^{\lambda T}p(t) = P(t)E(B,t)E(B,T)u_0.$$

Also gilt

$$e^{\lambda T}P(t)E(B,t)u_0 = P(t)E(B,t)E(B,T)u_0.$$

Zusammen genommen ist

$$P(t)E(B,t)\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)u_0 = 0.$$

[4]Achille Marie Gaston Floquet (15.12.1847-7.10.1920) war ab 1873 Professor in Belfort, Angers und Clermont-Ferrand ab 1890 Professor für Analysis an der Universität Nancy. Er beschäftigte sich mit Astronomie, Differentialgleichungen und periodischen Funktionen.

Daher ist $\det\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\mathbb{1}\right) = 0$. Für die Umkehrung beachtet man einfach, dass aus dem Verschwinden von $\det\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)$ die Existenz eines Vektors u_0 folgt mit

$$\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right) u_0 = 0.$$

Man kann sogar λ und u_0 so wählen, dass λ Eigenwert von B ist. Dann ist

$$E(B,t)u_0 = e^{\lambda t} u_0,$$

und $P(t)E(B,t)u_0$ ist die gewünschte Lösung. □

Lemma 2.2.30 *Seien $\rho_j = e^{\lambda_j T}$ die charakteristischen Multiplikatoren. Dann ist*

$$\prod_{j=1}^{n} \rho_j = \exp\left(\int\limits_0^T \operatorname{tr} A(s)ds\right)$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \operatorname{tr} A(s)ds \bmod \left(\frac{2\pi i}{T}\right).$$

Beweis. Sei $\Psi(t)$ die Fundamentalmatrix mit Anfangswert $\Psi(0) = \mathbb{1}$. Dann ist

$$\det C = \det \Psi(T) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds\right).$$

Daraus folgt alles weitere. □

Als Hauptsatz über lineare periodische Systeme ergibt sich

Satz 2.2.31 *(a) Das lineare, homogene periodische System $\dot{u} = A(t)u$ ist genau dann stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren betragsmäßig kleiner oder gleich eins sind und die, die dem Betrage nach eins sind, gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.*
(b) Das System ist genau dann gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner eins sind. In diesem Fall kann man eine Fundamentalmatrix abschätzen:

$$\exists K > 0, \alpha < 0 \textit{ mit } t - s \geq 0 \Longrightarrow \|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}.$$

Beweis. Benutzt im wesentlichen die Ideen wie im autonomen Fall. □

Als Stabilitätskriterium für geschlossene Orbits erhält man schließlich den

Satz 2.2.32 *Sei $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der autonomen Gleichung $\dot{u} = V(u)$, wobei die rechte Seite als genügend glatt vorausgesetzt werde. Dann ist $\mathcal{O}$ genau dann orbital stabil, wenn das lineare homogene periodische System*

$$\dot{y} = DV(u(t))y, \tag{2.39}$$

stabil ist, wobei $u(t)$ eine Lösung im Orbit $\mathcal{O}$ ist.

Ohne vollständigen Beweis wollen wir noch ein Kriterium für orbital asymptotische Stabilität angeben.

Satz 2.2.33 *$\mathcal{O}$ ist genau dann orbital asymptotisch stabil, wenn (2.39) stabil ist, 1 charakteristischer Multiplikator mit algebraischer Vielfachheit 1 ist und alle von 1 verschiedenen charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner als 1 sind.*
$\mathcal{O}$ ist instabil, wenn es einen charakteristischen Multiplikator vom Betrag größer 1 gibt.

Beweis. (Skizze)

1. Die Eigenwerte von $D_u\Pi(u_0)$ sind gerade die charakteristischen Multiplikatoren, wobei die Vielfachheit von 1 um eins verringert ist.

2. Man benötigt das dem Satz 2.2.3 vom Spektrum und Stabilität II entsprechende Stabilitätskriterium für Abbildungen, dies wiederum entspricht der Aussage von Satz 2.2.3, nur ist jeweils $\mathrm{Re}\lambda <=> 0$ durch $|\lambda| <=> 1$ zu ersetzen. Vergleiche den späteren Abschnitt über Stabilität in linearen Orbits.

□

2.2.3 Ljapunov Funktionen

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung der Stabilität von Lösungen sind sogenannte Ljapunov-Funktionen. Sie verallgemeinern erste Integrale.

Definition 2.2.34 *Es sei $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion. Eine Funktion $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* erstes Integral, *falls w längs Lösungen der Gleichung $\dot{u} = V(u,t)$ konstant bleibt.*

Kennt man eine hinreichende Zahl von (linear unabhängigen) ersten Integralen, so kann man die Differentialgleichung als gelöst ansehen. Eine wichtige Klasse von Systemen mit erstem Integral sind Hamiltonsche Systeme, die wir noch kennenlernen werden. Die Hamilton-Funktion H ist dann bereits ein erstes Integral.

Definition 2.2.35 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, V Lipschitz stetig auf U. Wir betrachten die Gleichung $\dot{u} = V(u)$. Sei $W \subset U$ offen. Eine Funktion $L : C^0(W, \mathbb{R})$ heißt* Ljapunov Funktion *auf W zu $\dot{u} = V(u)$, falls alle partiellen Ableitungen von L existieren und für alle $w \in W$ gilt*

$$\langle \nabla L(w), V(w) \rangle \leq 0.$$

Eine unmittelbare Konsequenz dieser Forderung ist, dass für alle $w \in W$ gilt

$$\frac{d}{dt} L(u(t,u_0))_{|t=0} \leq 0.$$

Ist $W = U$, so gilt für jede Lösung $\frac{d}{dt} L(u(t)) \leq 0$.

Satz 2.2.36 *Wir betrachten $\dot{u} = V(u)$ mit Ruhelage $u = 0$. Gibt es eine Umgebung W von 0 und eine Ljapunov-Funktion L auf W mit $L \geq 0$ und $L(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, so ist u stabil. Ist $\dot{L}(u)_{|t=0} < 0$ für $\|u\|_{\mathbb{R}^n} > 0$, so ist 0 asymptotisch stabil.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. Zu zeigen ist also, dass zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass aus $\|u_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ folgt, dass das maximale Existenzintervall vorwärts unbeschränkt ist und für alle $t \geq 0$ gilt $\|u(t,u_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und $\varepsilon > \eta > 0$ gegeben. Es existiert eine Umgebung $B_\tau(0)$ mit

$$L(B_\tau(0)) \subset [0, \eta).$$

Sei

$$\mu = \inf \{L(x) \mid \|x\|_{\mathbb{R}^n} = \tau\}$$

und $r < \mu$. Dann ist die Zusammenhangskomponente von $L^{-1}[0, r)$ in $B_\tau(0)$ enthalten. Ist nun $\delta < \tau$, so ist für $u_0 \in B_\delta(0)$ die Lösung auf ihrem maximalen Existenzintervall in $B_\varepsilon(0)$ enthalten. Damit ist dieses Existenzintervall unbeschränkt und die Aussage gezeigt. Um zu zeigen, dass die eben gemachte Aussage gilt, wollen wir $L(t) = L(u(t, u_0))$ betrachten. Es gilt $L(0) = L(u_0) < r < \mu$. Angenommen, es gibt ein t_0 mit $L(t_0) = \varepsilon$, dann gibt es ein $0 < t_1 < t_0$ mit $L(t_1) = \mu$. Wegen $\dot{L} \leq 0$ und $L(t_1) = \mu < \varepsilon = L(t_0)$ erhalten wir einen Widerspruch.

Im zweiten Fall müssen wir noch zeigen $u(t, u_0) \to 0$ für $t \to \infty$. Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann ist klar, $L(t)$ ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent. Angenommen $\lim_{t\to\infty} L(t) = c > 0$. Dann ist $\omega(u_0)$ nichtleer und $0 \notin \omega(u_0)$. Dann ist L konstant auf $\omega(u_0)$. Enthält $\omega(u_0)$ einen regulären Punkt, ist dort aber $\dot{V} < 0$. Also enthält $\omega(u_0)$ keinen regulären Punkt, sei x ein kritischer Punkt in $\omega(u_0)$. Aber auch dann $\dot{L}(t) = \nabla L \cdot \dot{x} = 0$ und damit $x = 0$. □

Nebenbei haben wir noch gezeigt:

Korollar 2.2.37 *Es sei L eine Ljapunov–Funktion für V auf $W \subset U$ mit $L(u) \geq 0$: Ist R die Menge $\dot{L} = 0$ und M die größte invariante Menge in R, so ist für jedes $u_0 \in W$ die Grenzmenge $\omega(u_0) \subset M$.*

Beweis. Ist $u_0 \in W$, so ist L längs Lösungen streng monoton fallend und konvergiert daher □

Korollar 2.2.38 *Unter den Voraussetzungen des ersten Teiles des letzten Satzes gilt: L ist auf Grenzmengen $\omega(u_0)$, $\alpha(u_0)$ konstant.*

Ohne Beweis wollen wir die sogenannten Umkehrsätze angeben.

Satz 2.2.39 (Umkehrsatz) *Die Existenz einer Ljapunov-Funktion mit den im Satz 2.2.36 angegebenen Eigenschaften ist notwendig für Stabilität bzw. asymptotische Stabilität einer Ruhelage.*

Beweis. Findet man z.B. im Buch von HARTMAN [14]. □

Beispiel 2.2.40 *1. Wir betrachten $\ddot{x} + g(x) = 0$, mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(0) = 0$. Das System ist äquivalent zu*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x). \end{aligned}$$

Setze

$$G(x) = \int\limits_0^x g(s)ds$$

und

$$L(x,y) = \frac{y^2}{2} + G(x).$$

Dann ist $\dot{L} = 0$ *und die Ruhelage* $(x,y) = 0$ *stabil, falls* $xg(x) > 0$.

2. *Für die entsprechende Gleichung mit Dämpfung findet man asymptotische Stabilität.*

2.3 Abbildungen und Linearisierung

2.3.1 Fixpunkte

In diesem Abschnitt wollen wir einige Sätze zeigen, die wir im Kontext von Differentialgleichungen bereits kennen, deren Aussage für Abbildungen genauso gültig sind, aber in der Formulierung einiger kleiner Modifikationen bedürfen.

Satz 2.3.1 *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : U \to U$ *eine* C^1*-Abbildung und* x_0 *ein Fixpunkt von* f*. Ist* $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *die Linearisierung von* f*, mit* $\sigma(Df(x_0)) \subset \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$ *so ist die Ruhelage* x_0 *asymptotisch stabil.*

Beweis. Zu $Df(x_0)$ gibt es eine Norm mit $\|Df(x_0)x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \lambda \|x_0\|_{\mathbb{R}^n}$, $0 < \lambda < 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir diese Norm. Dann gibt es eine Umgebung $\varepsilon > 0$ von 0 mit $x \in B_\varepsilon(x_0)$ impliziert $\|Df(x) - Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} < 1 - \lambda$. Dann impliziert $x \in B_\varepsilon(x_0)$

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|Df(\xi)(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \|(Df(xi) - Df(x_0))(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|Df(x_0)(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \|Df(xi) - Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&< (1 - \lambda)\varepsilon + \lambda\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also gibt es ein $\mu < 1$ mit

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^n} = \mu \|(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Daraus folgt sofort die asymptotische Stabilität. □

Wie im Fall von Differentialgleichungen unterteilen wir das Spektrum von $Df(x_0)$ in drei Teile. Wir schreiben $A = Df(x_0)$ und setzen $\sigma_c(A) = \sigma(A) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \right\}$, und entsprechend $\sigma_u(A) = \sigma(A) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| > 1 \right\}$ und $\sigma_s(A) = \sigma(A) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$. Entsprechend seien $E^{c,u,s}$ jeweils die direkte Summe aller verallgemeinerten Eigenräume zu den Eigenwerten in den entsprechenden Unterräumen.

Satz 2.3.2 *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to U$ sei glatt und invertierbar, für ein $x_0 \in U$ gelte $f(x_0) = x_0$. Hat $Df(x_0)$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$, so gibt es zu jedem $y_0 \in E^u \cap B_\varepsilon(0)$, fffür hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ein x mit $P^+x = y$ (Definition von P^+ entsprechend der Definition im Fall der Differentialgleichungen), so dass*

$$\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x) = x_0.$$

Beweis. Der Beweis folgt den Linien vom Beweis von Satz 2.2.9. Hier betrachtet man statt eines Funktionenraumes einen Folgenraum mit einer Wachstumsschranke und der entsprechenden Bedingung an den Anfangswert. Man löst darin eine Fixpunktgleichungen und der Fixpunkt ist eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften. □

Korollar 2.3.3 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.3.2 ist der Fixpunkt x_0 instabil.*

Beweis. Wie zuvor im Fall der Differentialgleichungen.

2.3.2 Periodische Punkte

In diesem Abschnitt bemerken wir, dass im Fall von Abbildungen die Stabilitätstheorie von Fixpunkten und die von periodischen Punkten nahezu identisch ist. Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to X$ eine Abbildung, x_0 ein periodischer Punkt von f. Ist k die minimale Periode von x_0, so ist x_0 Fixpunkt von f^k. Dann gilt der folgende einfache Satz.

Satz 2.3.4 *Das Stabilitätsverhalten von x_0 unter der Abbildung f^k ist gleich dem Stabilitätsverhalten der kompakten invarianten Menge*

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\},$$

d.h. ist der Fixpunkt x_0 von f^k stabil, so gilt dies auch für $\mathcal{O}(x_0)$ für die Abbildung f. x_0 ist für f^k4 genau dann asymptotisch stabil, wenn $\mathcal{O}(x_0)$ für f asymptotisch stabil ist.
Gleiches gilt für die Instabilität: x_0 ist für f^k genau dann instabil, wenn dies für x_0 unter f^k gilt.

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.4 Aufgaben

Aufgabe 2.4.1 Wir bezeichnen mit A^T die Transponierte einer reellen Matrix A und mit $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A. Man zeige:
(a) $\det E(A,t) = e^{\mathrm{tr}(A)t}$
(b) $E(A^T,t) = (E(A,t))^T$
(c) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A + A^T = 0$, so ist $E(A,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal. (Eine Matrix B heißt orthogonal, wenn $B^T B = BB^T = \mathbb{1}$ ist.)

Aufgabe 2.4.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. A habe keinen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\ \lambda\ ) = 0$.
(a) Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ besitzt eine beschränkte Lösung.
(b) Ist diese Lösung eindeutig?
(c) Ist f periodisch mit Periode $T > 0$, so ist auch die in (a) gefundene Lösung T-periodisch.

Aufgabe 2.4.3 Man finde $E(A,t)$ für folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht $E(A,t)u_0$ für verschiedene $u_0 \neq 0$ aus.

Aufgabe 2.4.4 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \ldots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.
(a) Man zeige: Gibt es ein $\tau \in I$, so dass die Vektoren $u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear

unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix*.
(b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A. Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \mathrm{tr}(A)w$.

Aufgabe 2.4.5 Sei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nichtleere Teilmenge und $t_0 \in I$ sei fest gewählt. Setze

$$U(t) = \{u(t, t_0, u_0) \mid u_0 \in U\},$$

wobei $u(t, t_0, u_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = A(t)u,\ u(t, t_0, u_0) = u_0$ bezeichnet. Mit μ bezeichnen wir das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$. Man gebe eine hinreichende Bedingung an A dafür, dass $\mu(U(t)) = \mu(U)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2.4.6 Man löse die Differentialgleichungen

$$(a) \quad \dot{u} + u\sin(t) = (\sin(t))^3 \qquad (b) \quad (1 + t^2)\dot{u} + tu = t.$$