

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 8

Aufgabe 29 Man löse die Differentialgleichungen

(a) $\dot{u} + u \sin(t) = (\sin(t))^3$

(b) $(1 + t^2)\dot{u} + tu = t.$

Aufgabe 30 Wir betrachten die Abbildung

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : t \mapsto \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte (als Funktionen von t) und zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2}(t)$ in der linken Halbebene liegen.

(b) Weisen Sie nach, dass

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \exp\left(\frac{t}{2}\right)$$

eine für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkte Lösung der Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ ist.

Aufgabe 31 (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Ruhelagen des Lorenzsystems detailliert. Zeigen Sie speziell die Stabilität der trivialen Ruhelage für $r < 1$ und die Stabilität der nicht trivialen Ruhelagen für

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

(b) Ist die triviale Ruhelage für $r = 1$ stabil oder instabil? Beweisen Sie die Aussage.

Aufgabe 32 Wir betrachten die lineare Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$, wobei $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung sei. Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$U(t) = \left\{ u(t, t_0, u_0) \mid u_0 \in U \right\}.$$

Geben Sie eine Bedingung an A an, das für alle $t \in \mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß $\mu(U(t))$ gleich dem von U ist, also $\mu(U(t)) = \mu(U)$. Beginnen Sie mit dem Fall, dass A konstant, die Differentialgleichung also autonom ist.

Abgabe: 6.6.2008