

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 12

Aufgabe 45 Zeigen Sie: Ist A_0 eine reelle $n \times n$ -Matrix, $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein algebraisch einfacher Eigenwert von A , so gibt es ein $\varepsilon > 0$, und eine reell analytische Abbildung

$$\lambda : B_\varepsilon(A_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit $\lambda(A_0) = \lambda_0$ und $\lambda(A)$ ist einfacher Eigenwert von A .

Aufgabe 46 Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + x^2 + y^2 + x^3 - xy + y^2 \\ \dot{y} &= y + \sin x(\lambda + e^{xy}).\end{aligned}$$

Wählen Sie $\lambda \ni P = \mathbb{R}$ und betrachten Sie die Gleichung als Verzweigungsproblem im Punkt $\lambda_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$ und berechnen Sie mit dem Verfahren von Lyapunov-Schmidt die Verzweigungsgleichung indem Sie die Taylor-Entwicklung der Auflösung der Gleichung, die mit dem Satz über implizite Funktionen gelöst wird in niedriger Ordnung bestimmen. Bestimmen Sie die Verzweigungsgleichung bis auf Terme vierter Ordnung.

Aufgabe 47 Lösen Sie die Verzweigungsgleichung aus der vorigen Aufgabe, indem Sie die Lösung in eine Reihe entwickeln und die Terme niedrigster Ordnung angeben.

Aufgabe 48 Man gebe im Raum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ jede der folgenden Mengen explizit an, zeige, dass es jeweils eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist und bestimme die jeweilige Kodimension:

- (a) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat einen algebraisch einfachen Eigenwert } 0 \right\}$
- (b) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat ein Paar imaginärer Eigenwerte } \pm \mu i, \mu \neq 0 \right\}$
- (c) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat die Jordanform } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (d) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat die Jordanform } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Hinweis: Satz über implizite Funktionen

Abgabe: 4.7.2008