Übungen zu Dynamische Systeme und Differentialgleichungen

Blatt 10

Aufgabe 37 Zeigen Sie (ausführlich), dass ein periodischer Orbit $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ der Länge $k \in \mathbb{N}$ eines diskreten dynamischen Systems (X, f), wobei (X, d) ein metrischer Raum ist, und $f : X \to X$ stetig ist, genau dann stabil, asymptotisch stabil bzw. instabil ist, wenn gleiches für den Fixpunkt x_0 von f^k gilt.

Aufgabe 38 Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. $F : V \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und $f = \nabla F$. Ist $\dot{x} = -f(x)$ ein Gradientensystem auf $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von F, $F^{-1}(c) \neq \emptyset$ sei kompakt, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Niveaumengen $F^{-1}(c-\delta)$ und $F^{-1}(c+\delta)$ homöomorph sind.

Aufgabe 39 Es sei $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen, $H \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $\dot{u} = J\nabla H(u)$ ein Hamiltonsystem.

(a) Zeigen Sie: Ist y ein regulärer Wert von H, so gibt es kein $u_0 \in H^{-1}(y)$ mit $\alpha(u_0)$ oder $\omega(u_0)$ enthält eine Ruhelage.

(b) Ist $n = 1$, y ein regulärer Wert von H und $H^{-1}(y)$ beschränkt, so besteht $H^{-1}(y)$ aus einer Vereinigung minimaler Mengen für die obige Differentialgleichung.

Aufgabe 40 Untersuchen Sie ob folgende Differentialgleichungen (bzw. deren Rückführungen auf Systeme erster Ordnung) Hamiltonsch sind:

(a) Räuber-Beute-Modell:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y)x \\ \dot{y} &= (-\gamma + \delta x)y \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

(b) Das mathematische Pendel $\ddot{x} + \sin x + c\dot{x} =$ ohne Dämpfung ($c = 0$) oder mit Dämpfung ($c > 0$).

(c) Das n-Körperproblem $\ddot{x} = -\nabla V(x)$ mit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}^+$ und

$$\begin{aligned} V \quad : \quad & \left\{ x^{(1)}, \dots x^{(n)} \in (\mathbb{R}^3)^n \;\middle|\; x^{(i)} \neq x^{(j)} \text{ für } i \neq j \right\} \to \mathbb{R} \\ & (x^{(1)}, \dots x^{(n)}) \mapsto \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_i m_j}{\|x^{(i)} - x^{(j)}\|_{\mathbb{R}^3}}. \end{aligned}$$

Abgabe: 20.6.2008