

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

Blatt 1

Aufgabe 1 (a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

mit $x(0) = 0$ auf jedem reellen Intervall I , das die Null enthält genau eine Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt} = \beta x$$

mit $x(t_0) = x_0$ auf jedem t_0 enthaltenden Intervall genau eine Lösung besitzt.

Aufgabe 2 (a) Zeigen Sie, dass die zeitlichen Entwicklungen der Population mit konstanter Geburts- und Sterberate, die einerseits durch die diskrete Dynamik und andererseits durch die gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben werden, für Zeiten $t \in \mathbb{N}$ gleiche Zustände für die Population liefern.

(b) Diskutieren Sie ausführlich das Verhalten der in der Vorlesung angegebenen Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} = \beta p - Sp^2.$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt{x}$$

$x(t_0) = 0$ auf keinem Intervall der Form $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie: für eine Metrik d gilt $d(x, y) \geq 0$.

(b) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \rightarrow X$ sei stetig und $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, $f^n = f \circ f^{n-1}$ sei die n -fache Iteration von f , zeigen Sie, dass

$$d^{f^n}(x, y) = \max_{0 \leq j \leq n} d(f^j(x), f^j(y))$$

eine Metrik auf X definiert. Sei für eine Metrik d die metrische Kugel mit Radius $r > 0$ um $x_0 \in X$ durch

$$B_r^d(x_0) = \left\{ x \in X \mid d(x, x_0) < r \right\}$$

definiert. Zeigen Sie für $n \geq m$ gilt

$$B_r^{d^{f^n}}(x_0) \subset B_r^{d^{f^m}}(x_0).$$

Abgabe: 11.4.2008