

# Dynamische Systeme

Reiner Lauterbach

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Universität Hamburg

7. Vorlesung  
Ergänzungen

04.06.2012

# Metrik

Wir wollen jetzt einen Abstands begriff abstrakt definieren, der diese Eigenschaften besitzt und diesen dann in etlichen Situationen konkret wiederfinden.

**Definition.**

Es sei  $M$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Metrik auf  $M$ , wenn für alle  $x, y, z \in M$  gilt

$$(M1) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (Symmetrieeigenschaft),}$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \text{ genau dann wenn } x = y,$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

Ist  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik, so nennen wir  $(M, d)$  einen metrischen Raum.

# Positivität

**Lemma.**

Für alle  $x, y \in M$  gilt

$$d(x, y) \geq 0.$$

**Beweis.**

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y).$$

Damit ist

$$d(x, y) \geq 0.$$

# Beispiele für Metriken

Wir betrachten zunächst drei Metriken, die man auf dem  $\mathbb{R}^n$  definieren kann. Sei also  $M = \mathbb{R}^n$  für ein  $n \geq 1$ . Für einen Punkt  $\mathbf{x}$  schreiben wir  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  (transponiert).

$$\textcircled{1} \quad d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

$$\textcircled{2} \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max \left\{ |x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n \right\}.$$

# Nachweis der Eigenschaft einer Metrik $d_1$

(1) (M1) Offensichtlich ist  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  genau dann wenn  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

(M2) Da alle Summanden bei der jeweiligen Vertauschung von  $x_i$  und  $y_i$  den Wert nicht ändern ist  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

(M3) Es gilt für  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\&\leq \sum_{i=1}^n (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\&= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| \\&= d_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}).\end{aligned}$$

# Nachweis der Eigenschaft einer Metrik $d_\infty$

(1) (M1) Offensichtlich ist  $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  genau dann wenn für alle  $i$  gilt  $x_i = y_i$  und dies ist die Definition von  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

(M2) Da alle bei der Maximumbildung beteiligten Terme bei der jeweiligen Vertauschung von  $x_i$  und  $y_i$  den Wert nicht ändern ist  $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

(M3) Seien  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , dann ist

$$\begin{aligned} d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \max \left\{ |x_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n \right\} \\ &\leq \max \left\{ |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n \right\} \\ &\leq \max \left\{ |x_i - z_i| \mid 1 \leq i \leq n \right\} + \max \left\{ |y_i - z_i| \mid 1 \leq i \leq n \right\} \\ &= d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

# Nachweis der Eigenschaft einer Metrik $d_2$

(1), (2) werden wie in den anderen Beispielen begründet. Die Dreiecksungleichung ist diesem Fall anders zu begründen: wir definieren ein Skalarprodukt:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Dies hat folgende Eigenschaften (definierte Eigenschaften für Skalarprodukt)

- ❶  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- ❷  $\langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + b\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$
- ❸  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  und  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  genau dann wenn  $\mathbf{x} = 0$ .

# Norm

Eine Abbildung  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm, wenn gilt

- ❶ (N1)  $\|\mathbf{x}\| = 0$  genau dann wenn  $\mathbf{x} = 0$ .
- ❷ (N2)  $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$  für alle  $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ .
- ❸ (N3)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

# Norm und Metrik

Ist eine Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  gegeben, so erhält man aus

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

eine Metrik:

- ① (M1)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  dann ist  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$  und daher  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$  also  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Die Umkehrung ist trivial.
- ② (M2) Dies ist ebenfalls trivial.
- ③ (M3) Aus  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  folgt mit  $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  und  $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{z}$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v} - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{z})$$

Damit folgt (M3).

# Skalarprodukt und Norm

**Satz.** Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt, so ist  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$  eine Norm.

**Beweis.** (N1)  $\|\mathbf{x}\| = 0$  impliziert  $0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ . Aber dann ist  $\mathbf{x} = 0$ .

Die Umkehrung ist wieder trivial.

(N2)  $\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ .

(N3)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ . Mit der folgenden Ungleichung,

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

die wir gleich beweisen werden, erhalten wir

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$$

Wir ziehen die Wurzel und erhalten das erwünschte Resultat.

# Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

**Satz.** Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt und  $\| \cdot \|$  die zugehörige Norm, so gilt

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

**Beweis.** Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  betrachten wir die Funktion einer reellen Variablen  $t$

$$f(t) = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle.$$

Dann ist  $f(t) \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $f(t) = 0$  genau dann wenn  $\mathbf{x} + t\mathbf{y} = 0$  ist. Wir multiplizieren aus und erhalten

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle + t \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

# CSU – Bestimmung des Minimums

Als Funktion von  $t$  ist  $f$  ein Polynom zweiten Grades mit Faktor  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$  bei  $t^2$ . Ist  $\mathbf{y} \neq 0$  so ist der Graph eine nach oben geöffnete Parabel und für die Minimalstelle  $t^* \in \mathbb{R}$  hat man die notwendige Bedingung  $f'(t^*) = 0$ .

$$\text{Aus } f'(t) = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2t\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \text{ folgt dann } t^* = -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Wir haben

$$0 \leq f(t^*) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Dann ist

$$\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

oder

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Wurzel ziehen ergibt

## $d_2$ und Skalarprodukt

Wir haben nun gesehen, dass aus einem Skalarprodukt eine Norm entsteht und daraus eine Metrik. Mit dem speziellen Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

entsteht die Norm

$$\|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und dies führt auf die Metrik

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

# Einheitskugeln

Wie sehen für  $n = 2$  und für die Metriken  $d_1, d_2, d_\infty$  die Mengen der Punkte  $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, 0) = \|\mathbf{x}\| \leq 1 \right\}$  aus?

(1) Für  $d_1$  bedeutet dies die Menge

$$\left\{ \mathbf{x} \mid |x_1 + x_2| \leq 1 \right\}$$

zu bestimmen. Wir erhalten das Quadrat mit den Eckpunkten  $(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, -1)$ .

(2) Für  $d_2$  ergibt sich die übliche Einheitskugel im  $\mathbb{R}^2$

(3) Für  $d_\infty$  erhalten wir das Quadrat mit den Eckpunkten  $(-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ .

# Beispiele metrischer Räume

## Beispiele.

- 1 Abstände von Bildern: für jedes Pixel  $p_j = (r_j, g_j, b_j)$  RGB-Wert, dies sind bei  $n$ -Pixeln  $3n$ -Werte und für diese können wir die Abstände  $d_1, d_2, d_\infty$  anwenden. Die Wahl der Metrik hat für den Begriff „nahe“ Bilder Bedeutung!
- 2 Metrik auf  $\mathbb{Z}^b$ : diskrete Metrik.

# Stetigkeit

**Definition.**

Es seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in M$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so dass  $d(x_0, y) < \delta$  impliziert, dass  $d(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$ . Sie heißt stetig auf  $M$ , falls sie in jedem Punkt  $x_0 \in M$  stetig ist. Eine Abbildung bezeichnet man als Homöomorphismus, falls  $f : M \rightarrow N$  stetig, surjektiv und injektiv ist und die damit existierende Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

# Konvergenz

## Definition.

- ① es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Diese heißt *konvergent gegen*  $m \in M$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für  $n > N$  gilt

$$d(x_n, m) < \varepsilon.$$

Wir schreiben dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m.$$

- ② Eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent* wenn es ein  $m \in M$  gibt, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m$  ist.

**Lemma.** Ist  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig.

Angenommen  $m_1, m_2$  sind beides Grenzwerte der Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N_1, N_2$  wie oben bzgl. der Konvergenz gegen  $m_1, m_2$  gewählt. Sei  $N > \max\{N_1, N_2\}$  und  $n > N$ . Dann ist

$$d(m_1, m_2) \leq d(m_1, x_n) + d(x_n, m_2) < 2\varepsilon.$$

# Konvergenz – Ende des Beweises

Weil dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $d(m_1, m_2) = 0$  und damit  $m_1 = m_2$ .