

Dynamische Systeme

Reiner Lauterbach

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Universität Hamburg

6. Vorlesung
Ergänzungen

21.05.2012

Triadische Darstellung

Satz. Eine reelle Zahl ist genau dann rational, wenn ihre triadische Darstellung endlich oder (schließlich) periodisch ist.

Bemerkung. Der Satz gilt analog für jede Darstellung zu einer Basis $\mathbb{N} \ni b > 1$.

Beweis. Offenkundig ist eine Zahl mit einer endlichen triadischen Darstellung, eine Summe von Vielfachen von Potenzen von 3, alle Summanden sind rational, damit ist Summe rational.

Besitzt eine Zahl r eine schließlich periodische Darstellung und p die Länge der Periode, so hat die Zahl r die Darstellung

$$r = x + \sum_{j=N}^{\infty} \frac{s}{3^{pj}},$$

wobei $x \in \mathbb{Q}$ und $s < 3^p$.

Beweis – erster Teil

Die Reihe konvergiert als geometrische Reihe

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{s}{3^{pj}} = \frac{s}{3^{Np}} \sum_{j=0}^{\infty} (3^{-p})^j = \frac{s}{3^{Np}} \frac{3^p}{3^p - 1} \in \mathbb{Q}.$$

Beweis – andere Richtung

Wir haben eine rationale Zahl in vollständig gekürzter Form $\frac{p}{q}$ und wollen diese in triadischer Darstellung aufschreiben. Wir nehmen an $0 < p < q$. Wir zeigen: ist die Darstellung nicht endlich, so ist sie schließlich periodisch.

Setze $r_0 = p < q$. Wir finden die erste Potenz $k_1 \geq 1$ von 3 mit $3^{k_1} r_0 > q$. Dann gibt es Potenzen von 3 der Form $P_0 = 1$, $P_1 = 3$ bis $P_{k_1-1} = 3^{k_1-1}$ und Ziffern $s_k \in 0, 1, 2$ mit

$$\left(\sum_{k=0}^{k_1-1} s_k P_k \right) q < 3^{k_1-1} p.$$

Dabei seien die s_k so gewählt, dass die linke Seite maximal mit dieser Eigenschaft wird.

Sei

$$r_1 = 3^{k_1-1} p - \left(\sum_{k=0}^{k_1-1} s_k P_k \right) q$$

Beweis – andere Richtung –Fortsetzung

Dann ist $0 < r_1 < q$. Finde induktiv $r_0, \dots, r_j$. Konstruiere $0 < r_{j+1}$ aus r_j wie r_1 aus r_0 . Dann sind alle $0 < r_j < q$ (ansonsten ist die Darstellung endlich). Daher können nicht alle verschieden sein, angenommen $r_N = r_{N+d}$. Dann gilt für alle $j \geq N$ aufgrund der Konstruktion $r_{j+d} = r_j$ und die Folge ist ab der N -ten Stelle periodisch.

Orbit

Es sei M eine Menge und $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung.

Definition. Wir bezeichnen die Folge von Objekten in M , die durch

$$(x, f(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)), \dots)$$

gegeben ist als Orbit von x unter der Iteration f . Wir schreiben für den Orbit $\mathcal{O}_f(x)$. Ist f aus dem Kontext klar, oft auch nur $\mathcal{O}(x)$.

Ruhelagen, periodische Punkte

Definition.

Gegeben sei eine Iteration $f : M \rightarrow M$

- 1 Dann heißt ein Orbit eine *Ruhelage* oder *stationär*, wenn $f(x) = x$. Wir unterscheiden in diesem Fall nicht zwischen dem Punkt $x \in M$ und der Folge $(x, x, x, x, x, \dots)$.
- 2 Ein Orbit heißt *periodisch* der Periode $p \in \mathbb{N}$, falls $f^{(p)}(x) = x$ ist oder falls für die Folge

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

gilt

$$x_{n+p} = x_n.$$

Schließlich stationär

- ③ Ein Orbit heißt *schließlich stationär*, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_{N+1} = f(x_N) = x_N$ ist. Dies bedeutet dann, dass wir eine Folge der Form

$$(x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1} = x_N, x_{N+2} = x_N, \dots)$$

haben, anders ausgedrückt ist die Folge ab dem N -ten Folgenglied konstant, bzw. stationär.

- ④ Ein Orbit heißt *schließlich periodisch*, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(N+n+p)}(x) = f^{(N+n)}(x).$$

Betrag und Abstand

Betragsfunktion in $\mathbb{R}$:

Definition.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Definition. Setze für $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Dafür gilt für alle Paare $x, y \in \mathbb{R}$ oder Tripel $x, y, z \in \mathbb{R}$

- ❶ $d(x, y) = d(y, x)$ (von x nach y ist es soweit wie von y nach x).
- ❷ $d(x, y) \geq 0$ (Abstand ist nicht negativ)
- ❸ $d(x, y) = 0 \iff x = y$. (Abstand ist Null genau dann, wenn $x = y$).
- ❹ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (der direkte Weg ist der Kürzeste)

Dreiecksungleichung

Die letzte Eigenschaft besagt

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

was aus der elementaren Ungleichung

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

sofort mit $a = x - z$, $b = z - y$ folgt.

Metrik

Wir wollen jetzt einen Abstandsbegriff abstrakt definieren, der diese Eigenschaften besitzt und diesen dann in etlichen Situationen konkret wiederfinden.

Definition.

Es sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf M , wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt

M1 $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrieeigenschaft),

M2 $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$,

M3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Ist $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik, so nennen wir (M, d) einen metrischen Raum.

Positivität

Lemma.

Für alle $x, y \in M$ gilt

$$d(x, y) \geq 0.$$

Beweis.

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y).$$

Damit ist

$$d(x, y) \geq 0.$$