

# Dynamische Systeme

Reiner Lauterbach

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Universität Hamburg

4. Vorlesung  
Ergänzungen

07.05.2012

## Darstellung zur Basis $b$

Zu jeder natürlichen Zahl  $b > 1$  gibt es eine **eindeutige Darstellung** der natürlichen Zahlen mittels der Symbole  $0, 1, \dots, b - 1$  und der Potenzen von  $b$ .

## Weitere Beispiele

Für  $b = 5$ ,  $n = 131$  (Dezimalsystem)

$$n = 1 * 5^3 + 0 * 5^2 + 1 * 5^1 + 1 * 5^0 = 1011$$

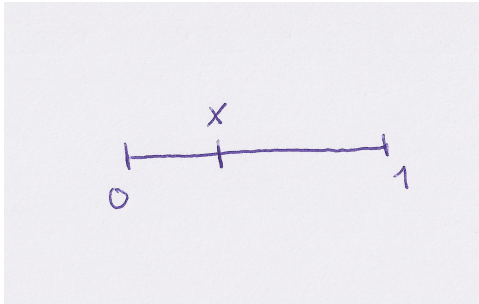
Für  $b = 11$ ,  $n = 131$  (Dezimalsystem) benutzen wir die Ziffern  $0, \dots, 9$  und  $A = 10$

$$n = 1 * 11^2 + 0 * 11^1 + A * 11^0 = 10A.$$

# Darstellung reeller Zahlen

Eine beliebige nichtnegative reelle Zahl  $r$  hat nun die Form  $r = n + x$ , wobei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in [0, 1)$  ist.

Um  $r$  darzustellen benötigen wir nur noch eine Darstellung der Zahlen  $x \in [0, 1)$ .



## Zahldarstellung für $x \in (0, 1)$

Da wir  $x = 0$  darstellen können, beschränken wir uns auf  $0 < x < 1$ . Da die Folge

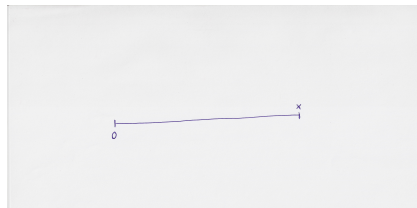
$$\{b^{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen Null konvergiert, gibt eine natürliche Zahl  $n^*$  mit

$$b^{-n^*} < x.$$

Dann gibt es auch eine erste solche Zahl  $d_1$  mit

$$0 < b^{-d_1} < x.$$



## Darstellung reeller Zahlen II

Dann gibt es eine maximale Zahl  $f_1$  in  $1, \dots, b-1$  mit

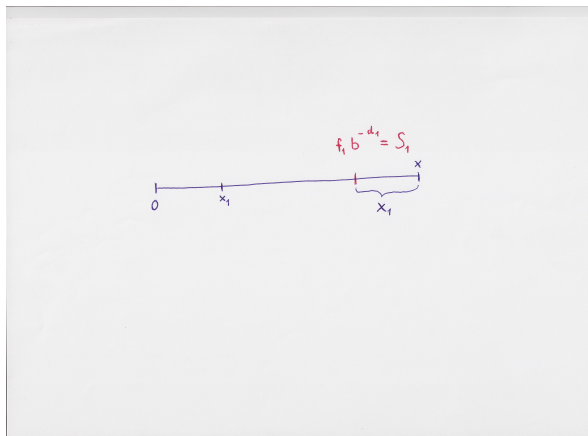
$$f_1 b^{-d_1} < x.$$



Setze

$$x_1 = x - f_1 b^{-d_1}.$$

# Darstellung reeller Zahlen III



Angenommen  
wir hätten  $f_r, d_r$   
und  $x_r$  für  
 $r = 1, \dots, N$   
gewählt, so dass  
für alle  $r \leq N$

$$x_r = x_{r-1} - f_r b^{-d_r}$$

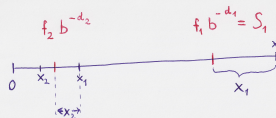
ist.

Ist  $x_r = 0$ , so haben wir eine Darstellung gefunden.

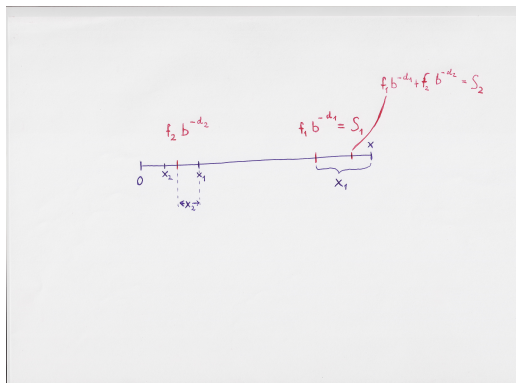
# Darstellung reeller Zahlen IV

Ansonsten,  
wähle  $d_{r+1}$  die  
minimale natürliche  
Zahl, so dass  
 $b^{-d_{r+1}} < x_r$   
und  $f_{r+1}$  die  
größte Zahl in  
 $1, \dots, b-1$  mit

$$f_{r+1} b^{-d_{r+1}} \leq x_r.$$



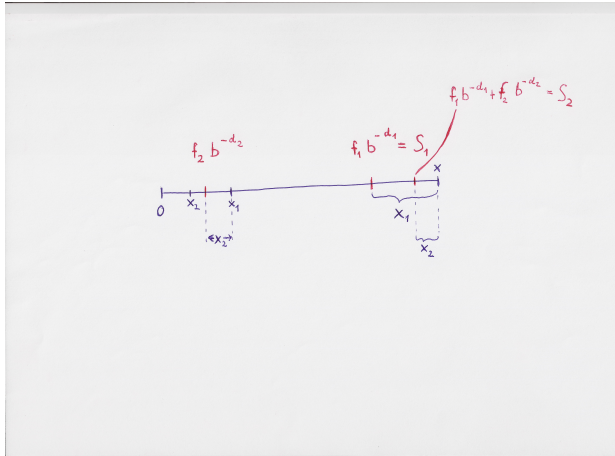
# Darstellung reeller Zahlen V



Auf diese Weise erhalten wir eine streng monoton fallende Zahlenfolge  $x_r$ , eine streng monoton steigende Folge  $d_r$  natürlicher Zahlen und eine Folge von Zahlen  $f_r \in \{0, \dots, b-1\}$ .

Dann gilt entweder sind die Folgen  $d_r, f_r, x_r$  endlich, also für  $0 \leq r \leq m_0$  und  $x_{m_0} = 0$  oder  $d_r \rightarrow \infty$  (wächst über alle Schranken) und  $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = 0$ .

# Darstellung reeller Zahlen VI



# Darstellung reeller Zahlen VII

Wir betrachten dazu die **Teilsummenfolge**

$$S_N = \sum_{r=0}^N f_r b^{-d_r}.$$

**Definition.** Die Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_r b^{-d_r}.$$

heißt **konvergent**, falls die Teilsummenfolge  $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

# Zerlegung reeller Zahlen VIII

Wir behaupten, dass diese Folge streng monoton wächst und gegen  $x$  konvergiert.

# Darstellung reeller Zahlen IX

Wir schreiben dafür auch

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_r b^{-d_r} = x.$$

Die Folge der  $f_r$  ergänzt durch Nullen für die nicht auftretenden Exponenten ergibt die Zahldarstellung für  $x$ .

**Beispiel.**  $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.10110101 \dots$  bzgl der Basis 2.

# Nichteindeutigkeit der Zahldarstellung

**Beispiel.**  $1 = 0.\bar{9} = 0.9999 \dots 999 \dots$

**Satz.** Eine positive Zahl hat genau dann keine eindeutige Darstellung zur Basis  $b$ , wenn es eine endliche Darstellung gibt.

# Beginn das Intervall $[0, 1]$

$$C_0 = [0, 1]$$

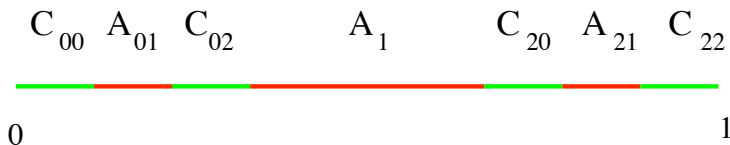


# Herausnehmen des mittleren Drittels

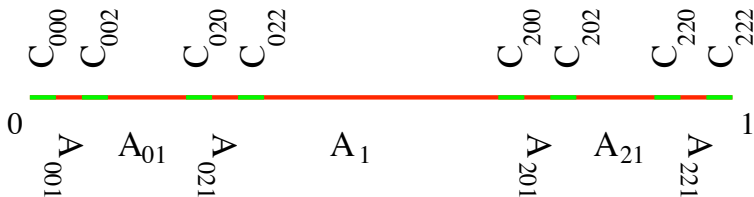
$$C_0 = [0, 1/3] \quad A_1 = (1/3, 2/3) \quad C_2 = [2/3, 1]$$



# Herausnehmen der mittleren Drittel



# Und noch ein Schritt



## Gesamtlänge der herausgenommenen Intervalle

Im erste Schritt wird ein Intervall der Länge  $\frac{1}{3}$  herausgenommen,  
im zweiten Schritt zwei Intervalle der Länge jeweils ein  $\frac{1}{9}$ .  
Im  $q$ -ten schritt werden  $2^{q-1}$  Intervalle er Länge  $3^{-q}$ . Also  
insgesamt im  $q$ -ten Schritt wird eine Menge der addierten Länge

$$L_q = \frac{2^{q-1}}{3^q}$$

herausgenommen. Wir berechnen  $\sum_{q=1}^{\infty} L_q$ .

## Berechnung der Reihe über $L_q$

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{\infty} L_q &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2^{q-1}}{3^q} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2^q}{3^{q+1}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2^q}{3^q}.\end{aligned}$$

# Geometrische Reihe

Für  $\tau < 1$  ergibt sich

$$\sum_{\mu=0}^N \tau^{\mu} = \frac{1 - \tau^{N+1}}{1 - \tau}$$

(durch Ausmultiplizieren) und wegen  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^N = 0$  ist

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \tau^{\mu} = \frac{1}{1 - \tau}.$$

Damit ergibt sich

$$\sum_{q=1}^{\infty} L_q = \frac{1}{3} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^q = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

# Charakterisierung der Cantormenge

**Definition.** Die Zahldarstellung zur Basis  $b = 3$  wird als *triadische Darstellung* bezeichnet, die zur Basis  $b = 2$  als *duale Darstellung*.

**Satz.** Die Cantormenge  $C$  ist durch folgende Eigenschaft charakterisiert:  $x \in C$  dann und nur dann, wenn es eine triadische Darstellung gibt, in der die Ziffer 1 nicht vorkommt.

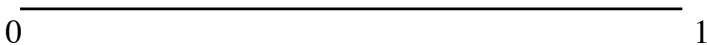
# Gleichmächtigkeit von $I$ und $C$

**Definition.** Zwei Mengen  $A, B$  heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  gibt.

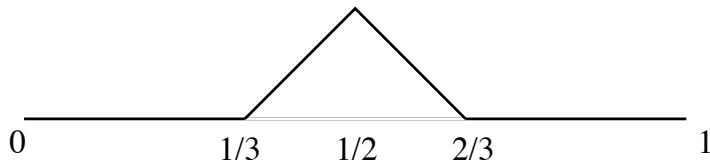
**Beachte.** Die Nichtgleichmächtigkeit zweier Mengen ist oft schwer zu zeigen.

**Satz.** Das Intervall  $I = [0, 1]$  und die Cantormenge  $C$  sind gleichmächtig.

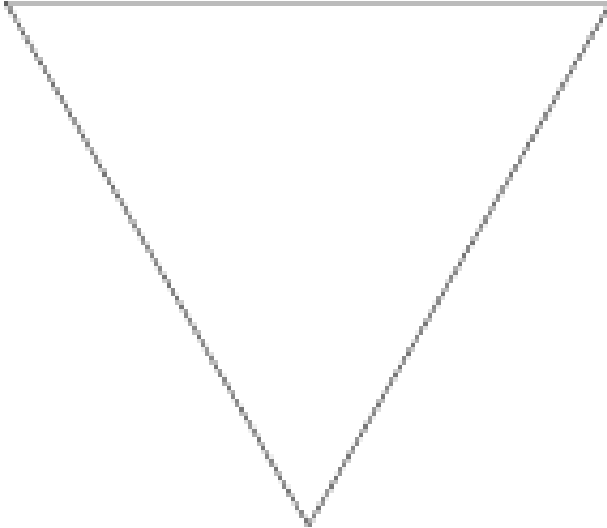
# Ausgangspunkt: ein Intervall



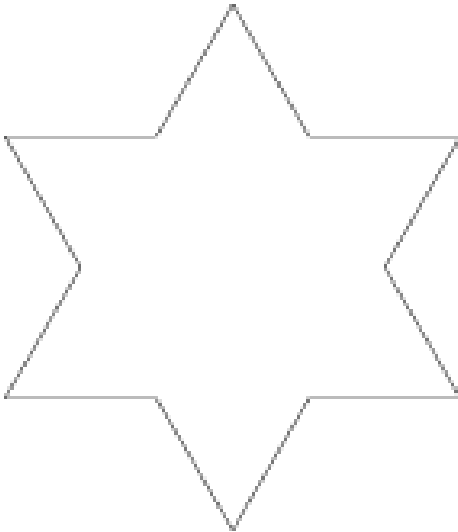
# Elementare Konstruktion



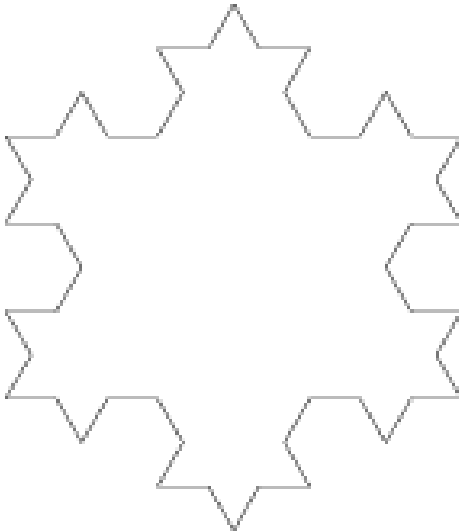
# Ausgangspunkt: gleichseitiges Dreieck



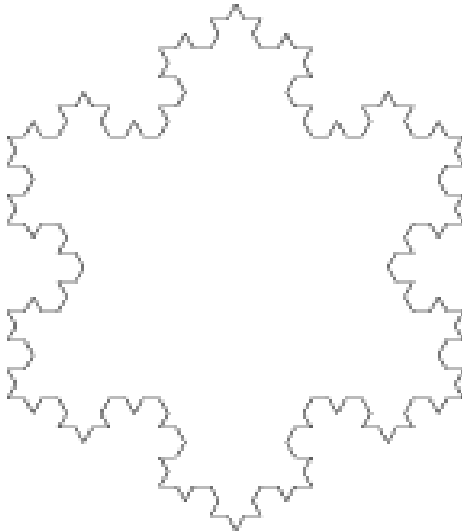
# Anwenden der elementaren Konstruktion auf jede Seite



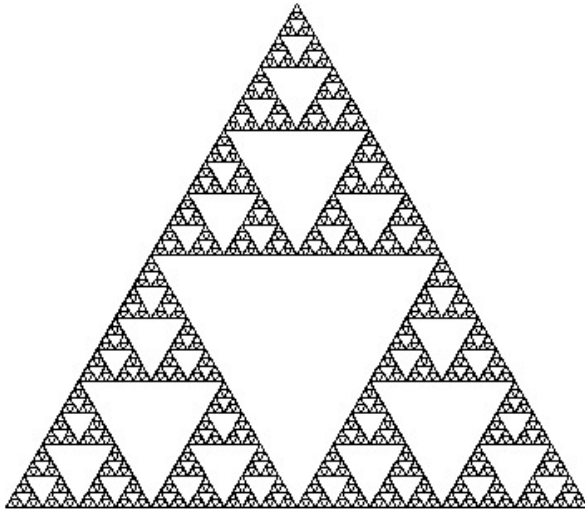
# Nochmaliges Anwenden der elementaren Konstruktion



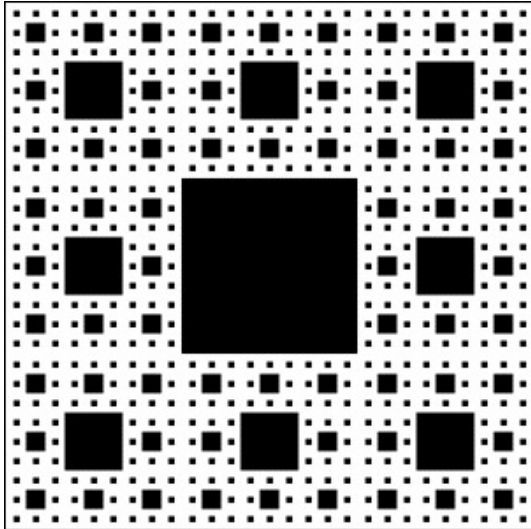
# Und nochmal



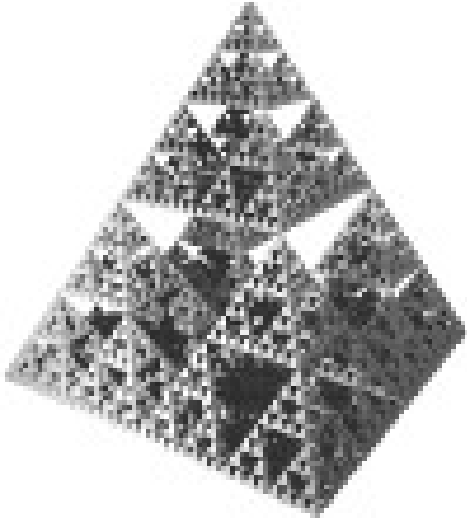
# Sierpinski-Dreieck



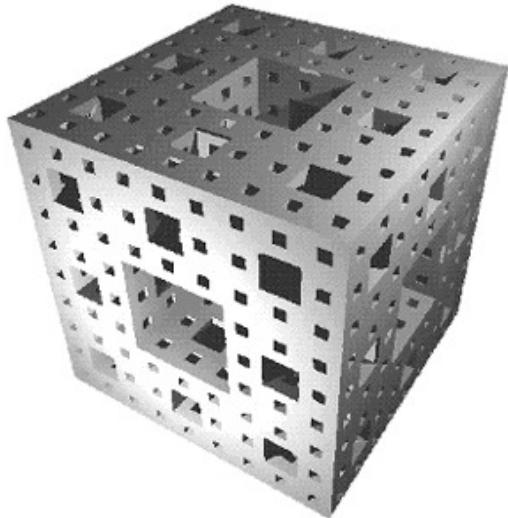
# Sierpinski-Teppich



# Sierpinski-Pyramide



# Menger-Schwamm



# Apfelmännchen

