

Dynamische Systeme

Reiner Lauterbach

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Universität Hamburg

3. Vorlesung
Ergänzungen

30.04.2012

Iterationen

X Menge, $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung.

Iteration:

Startwert $x_0 \in X$,

Folge $x_{n+1} = f(x_n)$

Schreibweise: $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ oder $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ziel: Beschreiben und Verstehen des Langzeitverhaltens.

Beispiele von Iterationen

- ① $I \subset \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, reelle Zahlenfolgen, Fragen nach Konvergenz.
- ② Sätze, Bestimmung der wahren Sätze als Fixpunkte oder periodische Folgen.
- ③ Übersetzen in Folgen von Vektoren, Iteration von Vektoren
- ④ Bilder: Zerschneiden und neu zusammensetzen. Erhalt des Flächeninhaltes: periodisches Verhalten, Zusammenhang mit dem und Hinweis auf den Wiederkehrsatz von Poincaré.

Iteration und das Lösungen von Gleichungen

Beobachtung: $X = [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \cos(x)$.

Erzeugte Folge konvergiert gegen die Lösung von

$$x = \cos(x).$$

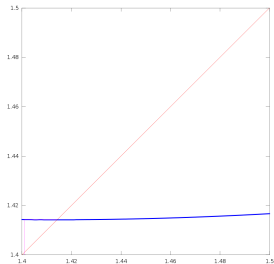
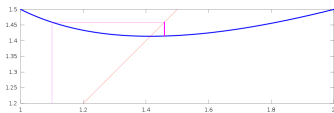
Kann man Gleichungen mit **iterativen Verfahren** lösen?

Beispiel. Kann man die Lösung von $x^2 = 2$ iterativ berechnen?

Verfahren von **Heron**: (nach Heron von Alexandria, 1. Jahrhundert):

$$X = [1, 2], \quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

Verfahren von Heron – graphisch



Fixpunktmenge

Schreiben wir F für die Menge der Fixpunkte, also

$$F = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = f(x) \right\}$$

so ist

$$F = p(G_f \cap \Delta),$$

wobei $p(x, y) = x$ die Projektion auf den ersten Eintrag ist. Wir betrachten das Beispiel $f(x) = \cos(x)$ auf $I = [0, \pi]$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f .

Graph und Fixpunktmenge

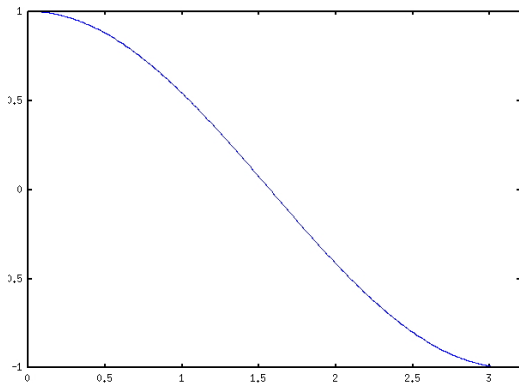
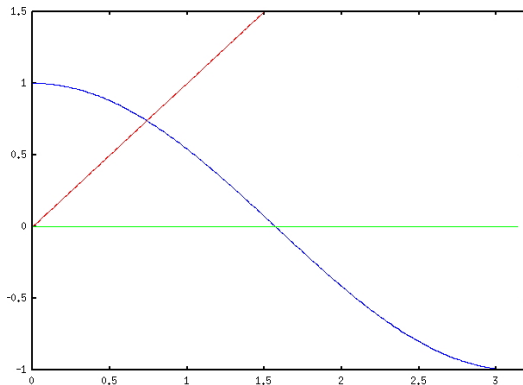


Abbildung: Der Graph der Kosinus-Funktion im Intervall $[0, \pi]$.

Fixpunktmenge im Beispiel

Nun betrachten wir den Schnittpunkt zwischen der Winkelhalbierenden und dem Graphen der Kosinusfunktion, vgl. Abbildung 2.



Projektion

Die Projektion auf die x -Achse wird in der Abbildung 3 skizziert.

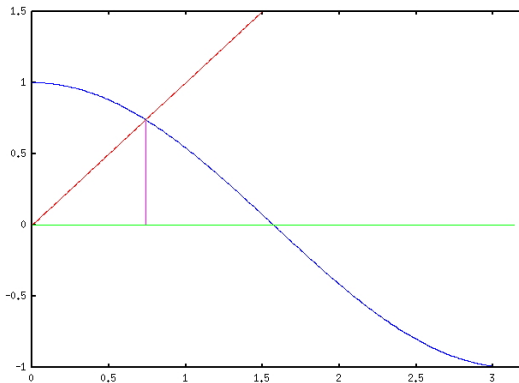


Abbildung: Die Projektion des Schnittpunktes des Graphen $G_{\cos}$ von $\cos(x)$ mit der Winkelhalbierenden Δ auf die x -Achse.

Darstellung zur Basis b

Zu jeder natürlichen Zahl $b > 1$ gibt es eine **eindeutige Darstellung** der natürlichen Zahlen mittels der Symbole $0, 1, \dots, b - 1$ und der Potenzen von b .

Beispiele. $b = 2$, $n = 121$ (Dezimalsystem)

Potenzen sind $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ zu den Exponenten $1, \dots, 6$.
Dann ist

$$n = 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 1111001$$

Für $b = 3$, $n = 131$ (Dezimalsystem)

$$n = 1 * 3^4 + 1 * 3^3 + 2 * 3^2 + 1 * 3^1 + 1 * 3^0 = 11211$$

Weitere Beispiele

Für $b = 5$, $n = 131$ (Dezimalsystem)

$$n = 1 * 5^3 + 0 * 5^2 + 1 * 5^1 + 1 * 5^0 = 1011$$

Für $b = 11$, $n = 131$ (Dezimalsystem) benutzen wir die Ziffern $0, \dots, 9$ und $A = 10$

$$n = 1 * 11^2 + 0 * 11^1 + A * 11^0 = 10A.$$

Beweis der Darstellbarkeit

Sei $\mathbb{N} \ni b > 1$ gegeben. Mit den Ziffern $0, \dots, b-1$ können wir alle natürlichen Zahlen $m < b$ darstellen, für b schreiben wir $10 = 1 * b + 0 * b^0$. Sei nun $x \in \mathbb{N}$ (die erste Zahl, die keine solche Darstellung hat. Dann gibt es eine maximale Potenz $d \geq 1$ von b die entweder kleiner oder höchstens gleich x ist. Im letzten Fall schreiben wir eine 1 mit der entsprechenden Anzahl an Nullen. Sonst suchen wir unter den Zahlen 1 bis $b-1$ die GröÙte und nennen diese r , so dass $r * b^d \leq x$. Dann ist $x - r * b^d < b^d$ und jede Zahl bis $x - r * b^d$ hat eine entsprechende Darstellung $s = s_1, \dots, s_d$. Dann hat x die Darstellung $rs_1 \dots s_d$.

Rechnen in anderen Zahlssystemen

Alle Rechenoperationen und Rechentechniken übertragen sich auf natürliche Weise auf natürliche Weise, es ist Vorsicht angebracht, weil man sich leicht am Anfang leicht verrechnet.

Negative Zahlen

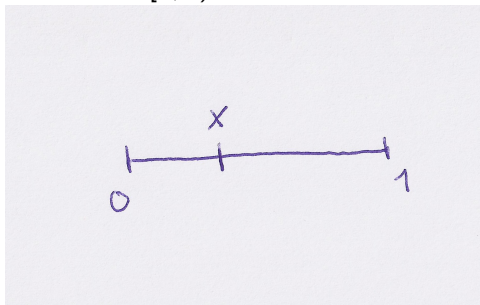
Durch einführen der Zahl Null und eines Vorzeichens kann man alle ganzen Zahlen darstellen.

Damit hat man eine Darstellung aller ganzen Zahlen bezüglich einer Basis b .

Zerlegung reeller Zahlen I

Eine beliebige nichtnegative reelle Zahl r hat nun die Form $r = n + x$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [0, 1)$ ist.

Um r darzustellen benötigen wir nur noch eine Darstellung der Zahlen $x \in [0, 1)$.



Zahldarstellung für $x \in (0, 1)$

Da wir $x = 0$ darstellen können, beschränken wir uns auf $0 < x < 1$. Da die Folge

$$\{b^{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen Null konvergiert, gibt eine natürliche Zahl n^* mit

$$b^{-n^*} < x.$$

Dann gibt es auch eine erste solche Zahl d_1 mit

$$0 < b^{-d_1} < x.$$



Zerlegung reeller Zahlen II

Dann gibt es eine maximale Zahl f_1 in $1, \dots, b-1$ mit

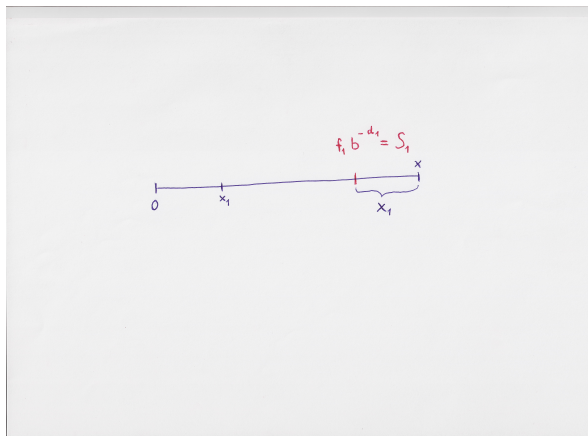
$$f_1 b^{-d_1} < x.$$



Setze

$$x_1 = x - f_1 b^{-d_1}.$$

Zerlegung reeller Zahlen III



Angenommen
wir hätten f_r, d_r
und x_r für
 $r = 1, \dots, N$
gewählt, so dass
für alle $r \leq N$

$$x_r = x_{r-1} - f_r b^{-d_r}$$

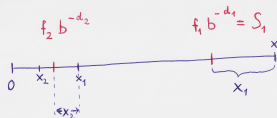
ist.

Ist $x_r = 0$, so haben wir eine Darstellung gefunden.

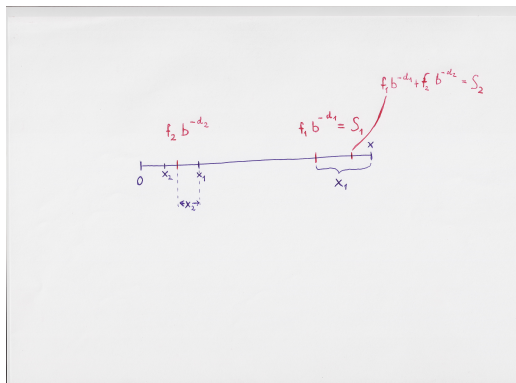
Zerlegung reeller Zahlen IV

Ansonsten,
wähle d_{r+1} die
minimale natürliche
Zahl, so dass
 $b^{-d_{r+1}} < x_r$
und f_{r+1} die
größte Zahl in
 $1, \dots, b-1$ mit

$$f_{r+1} b^{-d_{r+1}} \leq x_r.$$



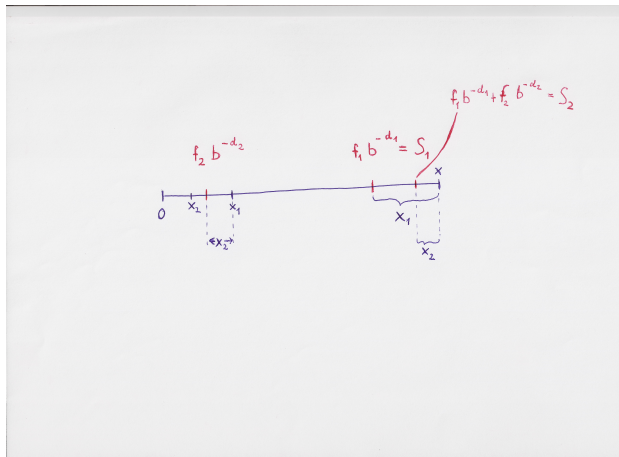
Zerlegung reeller Zahlen VI



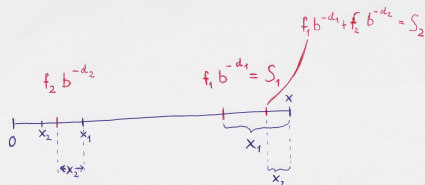
Auf diese Weise erhalten wir eine streng monoton fallende Zahlenfolge x_r , eine streng monoton steigende Folge d_r natürlicher Zahlen und eine Folge von Zahlen $f_r \in \{0, \dots, b-1\}$.

Dann gilt entweder sind die Folgen d_r, f_r, x_r endlich, also für $0 \leq r \leq m_0$ und $x_{m_0} = 0$ oder $d_r \rightarrow \infty$ (wächst über alle Schranken) und $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = 0$.

Zerlegung reeller Zahlen VII



Zerlegung reeller Zahlen VIII



$$S_1 + x_1 = x$$

$$S_2 + x_2 = x$$

allgemein

$$S_N + x_N = x$$

Zerlegung reeller Zahlen IX

Wir nehmen an, wir sind im nicht endlichen Fall, da $d_r \in \mathbb{N}$ und streng monoton steigt, wächst die Folge über alle Schranken. Wir nehmen an, die Konvergenz der x_r liegt nicht vor, dann gibt es ein $\bar{x} > 0$ mit $x_r > \bar{x}$ für alle $r \in \mathbb{N}$. OBdA nehmen wir an $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = \bar{x}$. Dann gibt es ein $e \in \mathbb{N}$ mit $b^{-e} < \bar{x}$, da $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{-n} = 0$. Ist $r > e$ und $x_r > \bar{x}$, so ist $r + 1 > e$ und d_{r+1} der kleinste Exponent, so $b^{-d_r} < x_r$. Aber $x_r > \bar{x} > b^{-e}$ und $e < d_r$ widerspricht dieser Aussage, daher erhalten wir einen Widerspruch und x_r konvergiert für $r \rightarrow \infty$ gegen Null. Dann betrachten wir die Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_r b^{-d_r}.$$

Zerlegung reeller Zahlen X

Wir betrachten dazu die **Teilsummenfolge**

$$S_N = \sum_{r=0}^N f_r b^{-d_r}.$$

Definition. Die Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_r b^{-d_r}.$$

heißt **konvergent**, falls die Teilsummenfolge $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Zerlegung reeller Zahlen XI

Wir behaupten, dass diese Folge streng monoton wächst und gegen x konvergiert. Nach Konstruktion sind alle $f_r > 0$ und daher ist

$$S_{N+1} = \sum_{r=0}^{N+1} f_r b^{-d_r} = S_N + f_{N+1} b^{-d_{N+1}} > S_N.$$

und

$$S_N - x = x_N$$

Da die Folge der $x_n \rightarrow 0$ konvergiert, haben

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^N f_r b^{-d_r} = x.$$

Zerlegung reeller Zahlen XII

Wir schreiben dafür auch

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_r b^{-d_r} = x.$$

Die Folge der f_r ergänzt durch Nullen für die nicht auftretenden Exponenten ergibt die Zahldarstellung für x .

Beispiel. $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.10110101 \dots$ bzgl der Basis 2.

Nichteindeutigkeit der Zahldarstellung

Beispiel. $1 = 0.\bar{9} = 0.9999 \dots 999 \dots$

Satz. Eine positive Zahl hat genau dann keine eindeutige Darstellung zur Basis b , wenn es eine endliche Darstellung gibt.

Beweis. Sei $x > 0$ mit einer endlichen Darstellung. Ist $x \in \mathbb{N}$ folgt die Nichteindeutigkeit aus dem eben gesehenen Beispiel. Im anderen Fall können wir uns auf den Fall $0 < x < 1$ beschränken. Dann hat x die Darstellung

$$x = \sum_{j=1}^N f_j b^{-j}, \quad f_j \in 0, \dots, b-1.$$

Nichteindeutigkeit – Beweis

OBdA sei $f_N \neq 0$. Dann ist dieser Ausdruck aber gleich

$$x = \sum_{j=1}^{N-1} f_j b^{-j} + (f_N - 1)b^{-N} + \sum_{j=N+1}^{\infty} (b-1)b^{-j}.$$

Den Nachweis der Gleichheit stellen wir noch einen Moment zurück. (Dies ist eine Anwendung der geometrischen Reihe, die wir noch brauchen werden.)

Gegenrichtung

Hat x keine endliche Darstellung, so endet die Darstellung nicht mit einer unendlichen Folge von $(b-1)$. Hätte x zwei verschiedene Darstellungen gibt es einen ersten Index j an dem sich diese f_j^1 und f_j^2 unterscheiden, sagen wir $f_j^1 < f_j^2$. Da die zweite Darstellung nicht endlich ist gibt es einen Index $j_1 > j$ mit $f_{j_1}^2 > 0$. Dann ist

$$0 = x - x = \sum_j f_j^2 b^{-j} - \sum_j f_j^1 b^j > f_{j_1}^2 b^{-j_1} > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch.

Beginn das Intervall $[0, 1]$

$$I = [0, 1]$$

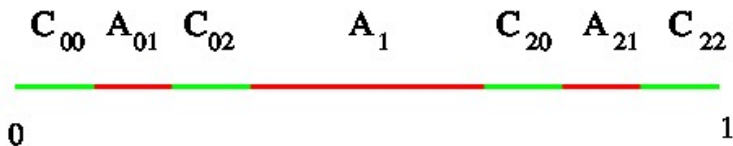


Herausnehmen des mittleren Drittels

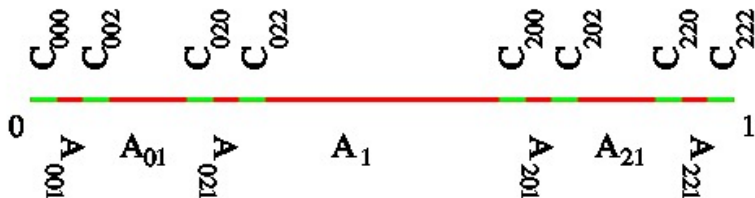
$$C_0 = [0, 1/3] \quad A_1 = (1/3, 2/3) \quad C_2 = [2/3, 1]$$



Herausnehmen der mittleren Drittel



Und noch ein Schritt



Gesamtlänge der herausgenommenen Intervalle

Im erste Schritt wird ein Intervall der Länge $\frac{1}{3}$ herausgenommen,
im zweiten Schritt zwei Intervalle der Länge jeweils ein $\frac{1}{9}$.
Im q -ten schritt werden 2^{q-1} Intervalle er Länge 3^{-q} . Also
insgesamt im q -ten Schritt wird eine Menge der addierten Länge

$$L_q = \frac{2^{q-1}}{3^q}$$

herausgenommen. Wir berechnen $\sum_{q=1}^{\infty} L_q$.

Berechnung der Reihe über L_q

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{\infty} L_q &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2^{q-1}}{3^q} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2^q}{3^{q+1}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2^q}{3^q}.\end{aligned}$$

Geometrische Reihe

Für $\tau < 1$ ergibt sich

$$\sum_{\mu=0}^N \tau^{\mu} = \frac{1 - \tau^{N+1}}{1 - \tau}$$

(durch Ausmultiplizieren) und wegen $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau^N = 0$ ist

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \tau^{\mu} = \frac{1}{1 - \tau}.$$

Damit ergibt sich

$$\sum_{q=1}^{\infty} L_q = \frac{1}{3} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^q = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Charakterisierung der Cantormenge

Definition. Die Zahldarstellung zur Basis $b = 3$ wird als *triadische Darstellung* bezeichnet, die zur Basis $b = 2$ als *duale Darstellung*.

Satz. Die Cantormenge C ist durch folgende Eigenschaft charakterisiert: $x \in C$ dann und nur dann, wenn es eine triadische Darstellung gibt, in der die Ziffer nicht 1 nicht vorkommt.

Beweis. Betrachte $x \in A_1$. Jede triadische Darstellung von x hat eine 1 an erster Stelle. Wir erhalten Abbildungen

$$s_j : I \rightarrow C_j, j = 1, 2 \text{ durch } s_j(x) = j \cdot 3^{-1} + \frac{1}{3}x.$$

das Bild von A_1 ist nun A_{j1} , jedes Element hat eine 1 in der Darstellung. Auf die Weise sieht man, dass x genau dann in einer der Mengen $A_{j_1, j_2, \dots, j_w}$ ist, wenn x in den ersten w_j Stellen eine 1 besitzt.

Gleichmächtigkeit von I und C

Definition. Zwei Mengen A, B heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.

Beachte. Die Nichtgleichmächtigkeit zweier Mengen ist oft schwer zu zeigen.

Satz. Das Intervall $I = [0, 1]$ und die Cantormenge C sind gleichmächtig.

Beweis. Wir schreiben eine Zahl $x \in I$ in dualer Zahldarstellung. Dies gibt eine Folge, aus den Zahlen 0, 1 besteht der Form

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j 2^{-j} \text{ und } f_j \in \{0, 1\}.$$