Dynamische Systeme

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Universität Hamburg

12. Vorlesung
Ergänzungen

9.07.2012

Überblick

1. Rückblick
   - Dynamische Systeme

Grenzmengen

Definition.

Grenzmengen

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System.

Grenzmengen

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Zu $x_0 \in M$ definieren wir die ω-Limesmenge oder ω-Grenzmenge $\omega(x_0)$ durch

Grenzmengen

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Zu $x_0 \in M$ definieren wir die ω-Limesmenge oder ω-Grenzmenge $\omega(x_0)$ durch

$$\omega(x_0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\mathbf{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(x_0)}$$

Grenzmengen

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Zu $x_0 \in M$ definieren wir die ω-Limesmenge oder ω-Grenzmenge $\omega(x_0)$ durch

$$\omega(x_0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\mathbf{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(x_0)}$$

Bemerkungen.

Bei der Abschlussbildung benötigen wir noch einen kleinen logischen Kunstgriff: der Abschluss ist für Teilmengen definiert und nicht für Folgen. Vergessen wir bei einer Folge die Anordnung erhalten wir daraus eine Menge, auf die wir übliche mengentheoretische Konzepte Vereinigung, Schnitt und in metrischen Räumen auch Abschlussbildung anwenden können.

Lemma zu ω-Limesmengen

Zur näheren Beschreibung der ω-Limesmenge haben wir das folgende Resultat bewiesen:

Lemma zu ω-Limesmengen

Zur näheren Beschreibung der ω-Limesmenge haben wir das folgende Resultat bewiesen:

Lemma.

Seien (M, d) ein kompakter metrischer Raum, (M, d, f) ein dynamisches System und $x_0 \in M$. Dann gilt:

Lemma zu ω-Limesmengen

Zur näheren Beschreibung der ω-Limesmenge haben wir das folgende Resultat bewiesen:

Lemma.

Seien (M, d) ein kompakter metrischer Raum, (M, d, f) ein dynamisches System und $x_0 \in M$. Dann gilt:

- $\omega(x_0)$ ist abgeschlossen.

Lemma zu ω-Limesmengen

Zur näheren Beschreibung der ω-Limesmenge haben wir das folgende Resultat bewiesen:

Lemma.

Seien (M, d) ein kompakter metrischer Raum, (M, d, f) ein dynamisches System und $x_0 \in M$. Dann gilt:

- $\omega(x_0)$ ist abgeschlossen.
- Ist $\left\{x_{j(i)}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $\mathcal{O}_f(x_0)$, so ist

$$\lim_{i \to \infty} x_{j(i)} \in \omega(x_0)$$

Lemma zu ω-Limesmengen

Zur näheren Beschreibung der ω-Limesmenge haben wir das folgende Resultat bewiesen:

Lemma.

Seien (M, d) ein kompakter metrischer Raum, (M, d, f) ein dynamisches System und $x_0 \in M$. Dann gilt:

- $\omega(x_0)$ ist abgeschlossen.
- Ist $\left\{x_{j(i)}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $\mathcal{O}_f(x_0)$, so ist
$$\lim_{i \to \infty} x_{j(i)} \in \omega(x_0)$$
- Ist $y \in \omega(x_0)$, so gibt es eine konvergente Teilfolge $\left\{x_{j(i)}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{O}_f(x_0)$ mit
$$y = \lim_{i \to \infty} x_{j(i)}$$

Attraktoren

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

Attraktoren

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.

Attraktoren

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.
2. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen Attraktor, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

Attraktoren

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.
2. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen Attraktor, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:
    - A ist invariant.

Attraktoren

Definition.
Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.
2. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen Attraktor, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:
   - A ist invariant.
   - A ist stabil,

Attraktoren

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.
2. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen Attraktor, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:
   - A ist invariant.
   - A ist stabil, d.h. es gibt zu jeder offenen Menge $U \subset M$ mit $A \subset U$ eine offene Menge $V \subset M$ mit $A \subset V$, so dass für alle $x_0 \in V$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset U$.

Attraktoren

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.
2. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen Attraktor, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:
   - A ist invariant.
   - A ist stabil, d.h. es gibt zu jeder offenen Menge $U \subset M$ mit $A \subset U$ eine offene Menge $V \subset M$ mit $A \subset V$, so dass für alle $x_0 \in V$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset U$.
   - A ist attraktiv,

Attraktoren

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.
2. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen Attraktor, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:
   - A ist invariant.
   - A ist stabil, d.h. es gibt zu jeder offenen Menge $U \subset M$ mit $A \subset U$ eine offene Menge $V \subset M$ mit $A \subset V$, so dass für alle $x_0 \in V$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset U$.
   - A ist attraktiv, d.h. es gibt eine offene Menge $P \subset M$ mit $A \subset P$, so dass für alle $x_0 \in P$ gilt: $\omega(x_0) \subset A$.

Attraktoren

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Dann nennen wir

1. eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ invariant, falls für $x_0 \in K$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset K$.
2. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen Attraktor, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:
   - A ist invariant.
   - A ist stabil, d.h. es gibt zu jeder offenen Menge $U \subset M$ mit $A \subset U$ eine offene Menge $V \subset M$ mit $A \subset V$, so dass für alle $x_0 \in V$ gilt: $\mathcal{O}_f(x_0) \subset U$.
   - A ist attraktiv, d.h. es gibt eine offene Menge $P \subset M$ mit $A \subset P$, so dass für alle $x_0 \in P$ gilt: $\omega(x_0) \subset A$.
3. eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ einen globalen Attraktor, falls A ein Attraktor ist und für alle $x_0 \in M$ gilt: $\omega(x_0) \subset A$.