

Dynamische Systeme

Reiner Lauterbach

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Universität Hamburg

11. Vorlesung
Ergänzungen

2.07.2012

Überblick

- 1 Rückblick
 - Dynamische Systeme

Offene und abgeschlossene Mengen in metrische Räume

Definition.

Offene und abgeschlossene Mengen in metrische Räume

Definition.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

- ① Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt offen, wenn zu jedem $x_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, so dass

$$\{x \in M \mid d(x, x_0) < r\} = B_r(x_0) \subset U.$$

Bemerkung.

Offene und abgeschlossene Mengen in metrische Räume

Definition.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

- ① Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt offen, wenn zu jedem $x_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, so dass

$$\left\{ x \in M \mid d(x, x_0) < r \right\} = B_r(x_0) \subset U.$$

- ② Eine Teilmenge $C \subset M$ heißt abgeschlossen, falls $M \setminus C$ offen ist.

Bemerkung.

Offene und abgeschlossene Mengen in metrische Räume

Definition.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

- ① Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt offen, wenn zu jedem $x_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, so dass

$$\left\{ x \in M \mid d(x, x_0) < r \right\} = B_r(x_0) \subset U.$$

- ② Eine Teilmenge $C \subset M$ heißt abgeschlossen, falls $M \setminus C$ offen ist.

Bemerkung.

Offene und abgeschlossene Mengen in metrische Räume

Definition.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

- 1 Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt offen, wenn zu jedem $x_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, so dass

$$\left\{ x \in M \mid d(x, x_0) < r \right\} = B_r(x_0) \subset U.$$

- 2 Eine Teilmenge $C \subset M$ heißt abgeschlossen, falls $M \setminus C$ offen ist.

Bemerkung.

Mengen können gleichzeitig offen und abgeschlossen sein, Beispiele dafür sind M und $\emptyset$, die jeweils offen und abgeschlossen sind.

Abschluss

Definition.

Abschluss

Definition.

Sei nun $A \subset M$ eine beliebige Menge, wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \mid U \cap A = \emptyset \text{ und } U \text{ ist offen} \right\}.$$

Setze

Abschluss

Definition.

Sei nun $A \subset M$ eine beliebige Menge, wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \mid U \cap A = \emptyset \text{ und } U \text{ ist offen} \right\}.$$

Setze

$$\bar{A} = M \setminus \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right).$$

Abschluss

Definition.

Sei nun $A \subset M$ eine beliebige Menge, wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \mid U \cap A = \emptyset \text{ und } U \text{ ist offen} \right\}.$$

Setze

$$\bar{A} = M \setminus \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right).$$

$\bar{A}$ nennen wir den Abschluss von A .

Abschluss

Definition.

Sei nun $A \subset M$ eine beliebige Menge, wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \mid U \cap A = \emptyset \text{ und } U \text{ ist offen} \right\}.$$

Setze

$$\bar{A} = M \setminus \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right).$$

$\bar{A}$ nennen wir den Abschluss von A .

Beispiel.

Abschluss

Definition.

Sei nun $A \subset M$ eine beliebige Menge, wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \mid U \cap A = \emptyset \text{ und } U \text{ ist offen} \right\}.$$

Setze

$$\bar{A} = M \setminus \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right).$$

$\bar{A}$ nennen wir den Abschluss von A .

Beispiel.

$M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ und $A = \mathbb{Q}$. Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen und nichtleer, dann enthält U rationale Punkte und ist demzufolge nicht in $\mathcal{U}$. Also ist $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$. Damit ist

Abschluss

Definition.

Sei nun $A \subset M$ eine beliebige Menge, wir betrachten die Menge

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \mid U \cap A = \emptyset \text{ und } U \text{ ist offen} \right\}.$$

Setze

$$\bar{A} = M \setminus \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right).$$

$\bar{A}$ nennen wir den Abschluss von A .

Beispiel.

$M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ und $A = \mathbb{Q}$. Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen und nichtleer, dann enthält U rationale Punkte und ist demzufolge nicht in $\mathcal{U}$. Also ist $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$. Damit ist

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

Nochmals Abschluss

„ $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.“

Nochmals Abschluss

„ $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.“
Begründung dieser Aussage:

Nochmals Abschluss

„ $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.“

Begründung dieser Aussage:

Sei

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subset M \mid A \subset C \text{ und } C \text{ ist abgeschlossen} \right\}.$$

Nochmals Abschluss

„ $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.“

Begründung dieser Aussage:

Sei

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subset M \mid A \subset C \text{ und } C \text{ ist abgeschlossen} \right\}.$$

Dann gilt

Nochmals Abschluss

„ $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.“

Begründung dieser Aussage:

Sei

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subset M \mid A \subset C \text{ und } C \text{ ist abgeschlossen} \right\}.$$

Dann gilt

$$\bar{A} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Nochmals Abschluss

„ $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.“

Begründung dieser Aussage:

Sei

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subset M \mid A \subset C \text{ und } C \text{ ist abgeschlossen} \right\}.$$

Dann gilt

$$\bar{A} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Versuchen Sie dies zu beweisen!

Grenzwert und Abschluss

Lemma.

Grenzwert und Abschluss

Lemma.

Ist $A \subset M$ eine Menge, $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A , dann ist

$$p = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in \bar{A}.$$

Grenzwert und Abschluss

Lemma.

Ist $A \subset M$ eine Menge, $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A , dann ist

$$p = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in \bar{A}.$$

Beweis.

Grenzwert und Abschluss

Lemma.

Ist $A \subset M$ eine Menge, $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A , dann ist

$$p = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in \bar{A}.$$

Beweis.

Angenommen $p \notin \bar{A}$, dann ist $p \in M \setminus \bar{A}$ und insbesondere gibt es eine offene Menge $U \subset M$ mit $U \cap A = \emptyset$ und $p \in U$.

Grenzwert und Abschluss

Lemma.

Ist $A \subset M$ eine Menge, $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A , dann ist

$$p = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in \bar{A}.$$

Beweis.

Angenommen $p \notin \bar{A}$, dann ist $p \in \mathbb{M} \setminus \bar{A}$ und insbesondere gibt es eine offene Menge $U \subset M$ mit $U \cap A = \emptyset$ und $p \in U$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(0) \cap A = \emptyset$.

Grenzwert und Abschluss

Lemma.

Ist $A \subset M$ eine Menge, $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A , dann ist

$$p = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in \bar{A}.$$

Beweis.

Angenommen $p \notin \bar{A}$, dann ist $p \in M \setminus \bar{A}$ und insbesondere gibt es eine offene Menge $U \subset M$ mit $U \cap A = \emptyset$ und $p \in U$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(p) \cap A = \emptyset$. Insbesondere ist dann für jedes $j \in \mathbb{N}$ $x_j \notin B_r(p)$ und dies widerspricht der Definition des Grenzwertes einer Folge.

Teilfolge

Definition.

Teilfolge

Definition.

Ist $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, so dass $i_1 < i_2$ impliziert, dass $j(i_1) < j(i_2)$. Dann nennen wir

$\{x_{j(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Teilfolge

Definition.

Ist $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, so dass $i_1 < i_2$ impliziert, dass $j(i_1) < j(i_2)$. Dann nennen wir

$$\{x_{j(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ eine } \textit{Teilfolge} \text{ von } \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Bemerkung.

Teilfolge

Definition.

Ist $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, so dass $i_1 < i_2$ impliziert, dass $j(i_1) < j(i_2)$. Dann nennen wir

$$\{x_{j(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ eine } \textit{Teilfolge} \text{ von } \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Bemerkung.

Aus der Monotoniebedingung folgt, dass $j(i) \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$.

Teilfolge

Definition.

Ist $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, so dass $i_1 < i_2$ impliziert, dass $j(i_1) < j(i_2)$. Dann nennen wir

$$\{x_{j(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ eine } \textit{Teilfolge} \text{ von } \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Bemerkung.

Aus der Monotoniebedingung folgt, dass $j(i) \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$.

Definition.

Teilfolge

Definition.

Ist $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, so dass $i_1 < i_2$ impliziert, dass $j(i_1) < j(i_2)$. Dann nennen wir

$$\{x_{j(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ eine } \textit{Teilfolge} \text{ von } \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Bemerkung.

Aus der Monotoniebedingung folgt, dass $j(i) \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$.

Definition.

Wir nennen einen metrischen Raum (M, d) (folgen-)kompakt, wenn man aus jeder Folge in M eine konvergente Teilfolge auswählen kann.

Folgenkompaktheit

Diese Definition ist zunächst nicht sehr anschaulich, hilft aber gewisse beweistechnische Probleme zu lösen. Ein wichtiger Satz der Analysis besagt, dass jede beschränkte und abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^n$ versehen mit einer der Metriken d_1, d_2, d_3 folgenkompakt ist. Insofern kennt man viele metrische Räume, die folgenkompakt sind.

Grenzmengen

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Theorie.

Grenzmengen

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Theorie.

Definition.

Grenzmengen

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Theorie.

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System.

Grenzmengen

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Theorie.

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Zu $x_0 \in M$ definieren wir die ω -Limesmenge oder ω -Grenzmenge $\omega(x_0)$ durch

Grenzmengen

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Theorie.

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Zu $x_0 \in M$ definieren wir die ω -Limesmenge oder ω -Grenzmenge $\omega(x_0)$ durch

$$\omega(x_0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\mathbf{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(x_0)}.$$

Bemerkungen.

Grenzmengen

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Theorie.

Definition.

Es sei (M, d, f) ein dynamisches System. Zu $x_0 \in M$ definieren wir die ω -Limesmenge oder ω -Grenzmenge $\omega(x_0)$ durch

$$\omega(x_0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\mathbf{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(x_0)}.$$

Bemerkungen.

Bei der Abschlussbildung benötigen wir noch einen kleinen logischen Kunstgriff: der Abschluss ist für Teilmengen definiert und nicht für Folgen. Vergessen wir bei einer Folge die Anordnung erhalten wir daraus eine Menge, auf die wir übliche mengentheoretische Konzepte Vereinigung, Schnitt und in metrischen Räumen auch Abschlussbildung anwenden können.

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- 1 Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$.

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- 1 Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$.

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- ① Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$. Es ist $(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)$.

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- ① Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$. Es ist $(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)$. Dann ist

$$\overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \overline{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)} = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\}.$$

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- ① Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$. Es ist $(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)$. Dann ist

$$\overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \overline{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)} = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\}.$$

Dann gilt weiter

$$\omega_f(1) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\} = \{0\}.$$

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- ① Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$. Es ist $(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)$. Dann ist

$$\overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \overline{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)} = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\}.$$

Dann gilt weiter

$$\omega_f(1) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\} = \{0\}.$$

- ② Ist (M, d, f) ein dynamisches System und mit einem periodischen Orbit der Periode 2: $\mathcal{O}_f(x_0) = (x_0, x_1, x_0, x_1, \dots)$.

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- ① Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$. Es ist $(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)$. Dann ist

$$\overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \overline{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)} = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\}.$$

Dann gilt weiter

$$\omega_f(1) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\} = \{0\}.$$

- ② Ist (M, d, f) ein dynamisches System und mit einem periodischen Orbit der Periode 2: $\mathcal{O}_f(x_0) = (x_0, x_1, x_0, x_1, \dots)$.

Beispiele von Grenzmengen

Beispiel.

- ① Wähle $M = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ als metrischen Raum. Sei (M, d, f) ein dynamisches System, sei $\mathcal{O}_f(1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ein Orbit, bestimme $\omega_f(1)$. Es ist $(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)$. Dann ist

$$\overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \overline{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots)} = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\}.$$

Dann gilt weiter

$$\omega_f(1) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{(\text{sh}^-)^n \mathcal{O}_f(1)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\} = \{0\}.$$

- ② Ist (M, d, f) ein dynamisches System und mit einem periodischen Orbit der Periode 2: $\mathcal{O}_f(x_0) = (x_0, x_1, x_0, x_1, \dots)$. Dann ist $\omega_f(x_0) = \omega_f(x_1) = \{x_0, x_1\}$.