Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 3

Aufgabe 9 Wir definieren einen topologischen Raum

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

indem wir die offenen Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$ beschreiben: eine Menge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist offen, genau dann wenn entweder $U \subset \mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$ ist, oder falls für $U \not\subset \mathbb{C}$ gilt $\hat{\mathbb{C}} \backslash U \subset \mathbb{C}$ ist kompakt.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass dies ein topologischer Raum ist.

(b) Wir fassen nun $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ als offene Teilmenge auf. Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} h_1 : &\quad \mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C} \quad : \hat{z} \mapsto \hat{z} \\ h_2 : &\quad \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad : \hat{z} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\hat{z}} & \text{, falls} \quad \hat{z} \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{, falls} \quad \hat{z} = \infty \end{cases} . \end{aligned}$$

stetig sind, und die Einschränkungen auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen sogar Homöomorphismen auf das Bild sind.

Aufgabe 10 (a) Die beiden Paare $(h_1, U_1 = \hat{\mathbb{C}} \backslash \{\infty\})$, $(h_2, U_2 = \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\})$ überdecken $\hat{\mathbb{C}}$ und

$$h_i \circ h_j^{-1} : h_j(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, i, j = 1, 2$$

sind differenzierbar.

(b) Ist $W \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen und $f : W \to \hat{\mathbb{C}}$ stetig, so nennen wir f im Punkt $\hat{z}_0 \in W$ differenzierbar, falls

$$\hat{z} \in U_i \Longrightarrow h_j \circ f \circ h_i : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für $j = 1, 2$ differenzierbar ist. Entscheiden Sie ob die Abbildungen

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : \hat{z} \mapsto \begin{cases} \hat{z}^2 & \text{, falls} \quad \hat{z} \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{, falls} \quad \hat{z} = \infty \end{cases}$$

im Punkt $\hat{z} = \infty$ und

$$g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : \hat{z} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\hat{z}^2} & \text{, falls} \quad \hat{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{, falls} \quad \hat{z} = 0 \\ 0 & \text{, falls} \quad \hat{z} = \infty \end{cases}$$

in den Punkten $\hat{z} = 0, \infty$ jeweils differenzierbar sind.

Aufgabe 11 Geben Sie eine Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ an und weisen Sie die entsprechenden Eigenschaften nach.

Aufgabe 12 Bestimmen Sie alle Fixpunkte und alle periodischen Punkte von f, g. Untersuchen Sie diese auf Stabilität und asymptotische Stabilität, d.h. untersuchen Sie ob für Startwerte hinreichend nahe an den singulären Orbits, die Orbits zu diesen Startwerten diesen singulären Orbits nahe bleiben und ob für $n \to \infty$ der Abstand zwischen den Orbits zu diesen Startwerten und singulären Orbits gegen 0 geht.

Abgabe: 13.11.2007