Übungen zu
Dynamische Systeme
Blatt 12

Aufgabe 44 Beweisen Sie die Aussage aus der Vorlesung: Für eine G-invariante stochastische Übergangsfunktion $p(\cdot, \cdot)$ und ein G-invariantes Gebiet Ω gilt, dass die Menge der Eigenmaße E_1 G-invariant ist und darüberhinaus ist die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße G-invariant.

Aufgabe 45 Sei G eine endliche oder kompakte Lie-Gruppe, und $\rho : G \to \mathbf{O}(n)$ eine endlich dimensionale Darstellung und $f : \Omega \to \Omega$ G-äquivariant, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ G-invariant sei. Es sei U eine isotypische Komponente, zeigen Sie, f bildet U in U ab.

Aufgabe 46 Es sei G eine Gruppe (endlich oder kompakt Lie) mit einer Aktion auf einem endlich dimensionalen Raum oder auf einem Banachraum. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(G)$ eine isotypische Komponente ist. (Verwenden Sie, falls nötig, im Fall eines Banachraumes ohne Beweis, dass eine Zerlegung in isotypische Komponenten existiert.)

Aufgabe 47 Betrachten Sie die Gruppe $\mathbb{Z}_2$. Diese hat zwei inequivalente eindimensionale reelle Darstellungen (Beweis). Betrachte die nichttriviale Darstellung. Es sei $\Omega = [-1, 1]$ und dies ist invariant unter dieser Darstellung. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der Borelmaße auf Ω. Betimmen Sie die isotypischen Komponenten der Aktion von G auf $\mathcal{M}$. Charakterisieren Sie die Maße in beiden Komponenten und bestimmen Sie die Projektoren von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}_i,\ i = 1, 2$. Können Sie dieses Programm auch für die Aktion von $\mathbb{D}_3$ auf $\mathbb{R}^2$ durchführen? Versuchen Sie, es möglichst weitgehend umzusetzen.

Abgabe: 29.1.2008