

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 1

Aufgabe 1 Es sei F der Lift einer Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$F(z+1) = F(z) + k \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie zunächst diese (einfache) Aussage.

Geben Sie hinreichende Bedingungen dafür an, dass $k = 1$. Ist Ihre Bedingung auch notwendig?

Aufgabe 2 Es sei $\{f_t\}_{t \in (0,1)}$ eine differenzierbare Familie von C^1 Abbildungen $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Zeigen Sie, hat für $t_0 \in (0,1)$ die Abbildung f_{t_0} einen periodischen Orbit der Periode p , d.h. ein x_0 mit $f^p(x_0) = x_0$ und ist $Df(x_0)$ ein Isomorphismus

$$T_{x_0}\mathbb{S}^1 \rightarrow T_{f(x_0)}\mathbb{S}^1,$$

dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|t - t_0| < \delta$ impliziert f_t hat einen periodischen Orbit der Länge p .

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Zeigen Sie:

- (a) Gibt es ein $y \in \mathbb{S}^1$, so dass für alle $x \in \mathbb{S}^1$ gilt $f(x) \neq y$, so ist $\deg(f) = 0$.
- (b) Ist f injektiv, so ist $\deg(f) = 1$.
- (c) Ist f injektiv, so ist f surjektiv.

Entscheiden Sie, ob folgende Aussage richtig ist und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel angeben. f surjektiv impliziert $\deg(f) \neq 0$.

Aufgabe 4 Es sei $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ stetig mit $\deg(f) = k \in \mathbb{Z}$.

- (a) Zeigen Sie, dass für $y \in \mathbb{S}^1$ das Urbild $f^{-1}(y)$ mindestens $|k|$ Punkte enthält.
- (b) Gibt es eine obere Schranke für die Anzahl der Punkte in $f^{-1}(y)$? Begründen Sie die Aussage.

Abgabe: 30.10.2007