Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorlesung

Universität Augsburg

Reiner Lauterbach

SS 1991

Kapitel 1

Einführung

1.1 Was sind Differentialgleichungen?

In der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ beschäftigt man sich, wie der Name schon besagt, mit Differentialgleichungen und Eigenschaften der Lösungen, sowie mit Methoden, diese zu bestimmen. Was ist aber eine Differentialgleichung? Wir wollen hier keine formale Definition geben. Einfach gesagt ist es eine Gleichung, mit der man eine Funktion u sucht. In dieser Gleichung tritt die Funktion u selbst, Ableitungen von u und vielleicht noch die Variable(n), von denen u abhängt, auf. Bevor wir uns weiter in Allgemeinheiten verlieren, ein Beispiel:

$$u' = u, \tag{1.1}$$

wobei die gesuchte Funktion u von einer unabhängigen Veränderlichen x abhängen soll. Eine Lösung kann man leicht angeben:

$$u(x) = e^x. \tag{1.2}$$

Offensichtlich löst die angebene Funktion Gleichung (1.1), jedoch ist es nicht die einzige Lösung. Weitere Lösungen findet man leicht. Oft ist man nicht an der gesamten Lösungsvielfalt interessiert, sondern man stellt weitere Forderungen, um eine eindeutige Lösbarkeit zu gewährleisten. Bevor ich exemplarisch typische zusätzliche Anforderungen angebe und motiviere, will ich noch eine weitere Abgrenzung vornehmen. Sucht man Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und gibt eine Relation zwischen u und den Ableitungen von u an, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung.** Betrachtet man hingegen Funktionen, die auf einem höherdimensionalen Raum, z.B. dem $\mathbb{R}^n$, definiert sind, und hat man Beziehungen zwischen u und den **partiellen** Ableitungen von u, so handelt es sich um eine **partielle Differentialgleichung**. Das Interesse an Differentialgleichungen ist schon alt, denn sie eignen sich hervorragend zum Modellieren von Problemen der realen Welt. Diese Problemstellungen haben auch die Typen der oft untersuchten Gleichungen und der zusätzlichen Bedingungen, die man an die Lösung stellt um Eindeutigkeit zu erzielen, geprägt. Wir betrachten eine Reihe von Beispielen. Gleichzeitig lernen wir eine Reihe von Techniken kennen, mit der man explizite Lösungen erhalten kann. Man muß aber sagen, daß die meisten Differentialgleichungen analytisch nicht in geschlossener Form gelöst werden können. Analytische Methoden liefern aber oft, und das aufzuzeigen ist ein Ziel dieser Vorlesung, Aufschluß über qualitatives Verhalten. Darunter wollen wir verstehen, Frage nach dem Langzeitverhalten, Stabilität von Lösungen usw.. Während sich das quantitative Verhalten von Lösungen heutzutage recht eindrucksvoll mit dem Computer untersuchen läßt, sind die

Abbildung 1.1: Am Pendel wirkende Kraft bei einer Auslenkung φ

qualitativen Aussagen fast ausschließlich analytischen Untersuchungen zu verdanken. Moderne Fragestellungen von Anwendern verlangen oft beides. Die Symbiose von analytischem Werkzeug und Rechnern kann zu neuer Einsicht führen. Deshalb wollen wir uns im weiteren Verlauf auch mit einfachen numerischen Methoden beschäftigen. Zunächst zu unseren Modellproblemen. Bei einigen dieser Probleme werde ich zur Begründung, warum gerade die angegebene Gleichung untersucht wird, einige physikalische Überlegungen anstellen. Diese sind für das Verstehen der Mathematik nicht notwendig.

- **Das mathematische Pendel**
  Hier hat man es mit folgender Aufgabenstellung zu tun: Ein Pendel der Länge ℓ und Masse M ist an einem festen Punkt P aufgehängt und schwingt in einer Ebene um die untere Ruhelage. Wir wollen den zeitlichen Verlauf dieser Bewegung untersuchen. Zunächst eine Konvention. Da die unabhängige Variable die Zeit ist, werden wir sie wie allgemein üblich, mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen. Bei der zu beschreibenden Bewegung reicht es offensichtlich, die Winkelauslenkung φ zu jedem Zeitpunkt t anzugeben. Wir werden die Bewegung also durch eine (gesuchte) Funktion $\varphi(t)$ beschreiben. Wie erhält man eine Gleichung für φ? Dazu betrachten wir Abbildung 1.1: Mit $-g$ bezeichnen wir die Erdbeschleunigung, dann wirkt auf M die Kraft $-Mg$, wobei der radiale Anteil dafür sorgt, daß die Befestigung gespannt bleibt, während der Winkelanteil für die Winkelbeschleunigung $\ell\varphi''(t)$ sorgt. Also erhält man als radialen Kraftanteil $-Mg\sin\varphi(t)$. Damit ergibt sich als Gleichung (KRAFT=MASSE$*$BESCHLEUNIGUNG):

  $$M\ell\varphi''(t) = -Mg\sin\varphi(t)$$

  oder

  $$\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi(t). \tag{1.3}$$

  Zur einfacheren Behandlung dieser Gleichung hat man schon früh ausgenutzt, daß zumindest für kleine Auslenkungen φ und $\sin\varphi$ annähernd gleich sind. Eine Näherungsgleichung (der Zusammenhang mit (1.3) bleibt dabei zumindest jetzt offen) ist daher

  $$\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell}\varphi(t). \tag{1.4}$$

Setzt man

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

ergibt sich als Lösung dieser Gleichung

$$\varphi(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t), \tag{1.5}$$

wobei $c_{1,2}$ beliebige reelle Konstanten sind. Man erkennt, daß man Eindeutigkeit erhält, wenn man eine Anfangsauslenkung und eine Anfangswinkelgeschwindigkeit vorgibt. Dies ist ein erstes Beispiel eines *Anfangswertproblems*.

- **Der radioaktive Zerfall**
  Beim radioaktiven Zerfall betrachtet man folgenden Vorgang. Man hat zum Zeitpunkt 0 eine gewisse Menge u_0 einer radioaktiven Substanz. Mit $u(t)$ bezeichnen wir den zum Zeitpunkt t verbleibenden Rest der Substanz. Durch Beobachtungen erhält man, daß die Anzahl der Zerfälle proportional zur Menge der Substanz ist. Sei α diese Rate. Dann lautet die zugehörige Gleichung
  (VERÄNDERUNG=ZERFALLSRATE$*$MENGE)

  $$u'(t) = -\alpha u(t). \tag{1.6}$$

  Wie bei Gleichung (1.1) kann man eine Lösung sofort hinschreiben:

  $$u(t) = ce^{-\alpha t}. \tag{1.7}$$

  Nachdem zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten muß, daß $u(0) = u_0$ erhält man $c = u_0$. Aus dieser Beziehung leitet man sofort ab, wielange es dauert bis sich die Menge der radioaktiven Substanz halbiert hat. Ist nämlich $u(T) = \frac{1}{2}u_0$, so rechnet man aus $T = \ln(2)/\alpha$. Dieser Wert ist unabhängig von u_0 und daher gilt immer

  $$u(t + T) = u(t)/2. \tag{1.8}$$

  T wird als **Halbwertszeit** bezeichnet. Sie charakterisiert wie wir eben gesehen haben den Zerfallsprozess. Wiederum haben wir es hier mit einem **Anfangswertproblem** zu tun. Allgemein führen Wachstums- oder Zerfallsprozesse, wo die Veränderung proportional zur gegenwärtigen Größe ist, auf Differentialgleichungen von zu (1.6) ähnlicher Gestalt.

- **Bevölkerungswachstum**
  Ein einfaches Modell zur Beschreibung einer Population p ohne natürliche Feinde ist, daß sowohl die Geburtenzahl, wie auch die Sterbezahl proportional zum Stand der Bevölkerung sind. Dann gibt es eine Geburtenrate B (birthrate), eine Sterberate D (deathrate) und p genügt der Differentialgleichung

  $$p' = Bp - Dp. \tag{1.9}$$

  Aus (1.9) wird natürlich mit $\beta = B - D$ die Gleichung (1.6) mit $\alpha = -\beta$. Ist β positiv, hat man ein Bevölkerungswachstum, ähnlich der Halbwertszeit gibt es nun eine Verdoppelungszeit $T = \ln(2)/\beta$. Beobachtet man in der Realität ein Wachstum, das noch stärker ist (Verkürzung der Verdoppelungszeiten), dann ist (1.9) kein geeignetes Modell. Ein schwerwiegender Nachteil dieses Modells ist die Vorhersage grenzenlosen Wachstums. Dies kann wegen der Endlichkeit aller Dinge nicht vorliegen, so gab es schon lange Versuche die Gleichung (1.9) zu modifizieren. Ein solches Modell ist die Einführung eines Streßfaktors S, der proportional zur Anzahl der Begegnungen von Individuen der Bevölkerung ist. Diese ist proportional zu p^2. Damit erhält man

$$p' = \beta p - Sp^2. \tag{1.10}$$

Mit $p(t) = \beta/S$ hat man eine konstante Lösung. Es ergibt sich sogar, daßjede Lösung sich an diese konstante Lösung annähert. Man erhält dies, indem man zu jedem Anfangswert eine Lösung durch diesen Anfangswert angibt, die diese Eigenschaft hat. Aus der Eindeutigkeit, die wir noch zeigen werden, folgt dann die Behauptung. Man bekommt die Lösung für einen beliebigen Anfangswert mit der Methode der **Trennung der Veränderlichen**. Wir nehmen uns vor, eine Lösung der Gestalt $p(t)$ mit $p(t_0) = p_0 \neq \beta/S$, zu finden und schreiben

$$\frac{dp}{dt} = \beta p - Sp^2. \tag{1.11}$$

Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$ erhält man

$$\frac{dp}{dt}\frac{1}{\beta p - Sp^2} = 1. \tag{1.12}$$

Integration dieser Gleichung von t_0 bis t liefert

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dp(s)}{dt}\frac{ds}{\beta p(s) - Sp(s)^2} = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0. \tag{1.13}$$

Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$, so ist auch $p' \neq 0$ und die linke Seite ergibt mit der Substitutionsregel

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dz}{\beta z - Sz^2}.$$

Dies wird mittels einer Partialbruchzerlegung integriert. Es ergibt sich (wir führen diese Rechnung einmal sehr ausführlich durch) mit $K = \beta/S$

$$\frac{1}{\beta}\int_{p_0}^{p} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{K-z}\right) dz = \frac{1}{\beta}\left(\ln\left(\frac{|p|}{|p-K|}\right) - \ln\left(\frac{|p_0|}{|p_0-K|}\right)\right).$$

Da die Größe der Population jeweils nicht negativ ist, kann man $p > 0,\ p_0 > 0$ annehmen. Daher hat man

$$\ln\left(\frac{p|p_0-K|}{|p-K|p_0}\right) = \beta(t - t_0). \tag{1.14}$$

Einsetzen und Auflösen nach p bringt uns die endgültige Gestalt der Lösung

$$\frac{p(p_0-K)}{(p-K)p_0} = e^{\beta(t-t_0)}. \tag{1.15}$$

Hier beachtet man noch, daß die Annahme, daß $p(s) \neq K$ für alle $s \in [t_0, t]$ dazu führt, daß $p - K$ und $p_0 - K$ gleiches Vorzeichen haben. Daraus erhält man

$$p = \frac{e^{\beta(t-t_0)}p_0}{p_0 - K}(p - K).$$

Bezeichnet man den hier aufgetretenen Bruch mit B so ergibt sich

$$p(1 - B) = -BK$$

und damit

$$p = \frac{BK}{(B-1)}.$$

Einsetzen ergibt

$$p(t) = K\frac{e^{\beta(t-t_0)}p_0}{e^{\beta(t-t_0)}p_0 - p_0 + K}.$$

Multiplikation mit $e^{-\beta(t-t_0)}$ führt auf

$$p(t) = \frac{Kp_0}{p_0 - e^{-\beta(t-t_0)}(p_0 - K)}. \tag{1.16}$$

Wie erwartet, liefert das Einsetzen von $t = t_0$ den Wert p_0. Um das Verhalten von p für $t \to \infty$ zu studieren, muß man sich nur anschauen was der Nenner macht. Er konvergiert gegen p_0 und insgesamt ergibt sich der Wert K.
Wir wollen noch die Frage stellen, woher kommen die Lösungen für $t < t_0$, sozusagen, fragen wir nach der Vergangenheit. Ist $p_0 \in (0, K)$ so existiert die Lösung für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und konvergiert für $t \to -\infty$ gegen 0. Ist jedoch $p_0 > K$ so würde formal die Grenzwertbetrachtung $t \to -\infty$ den gleichen Wert ergeben, dies jedoch erscheint absurd. Man überlegt sich, daß der Nenner für ein $t < t_0$ eine Nullstelle $t_1(p_0)$ hat und demzufolge die Lösung nur auf dem Intervall (t_1, ∞) existiert.
Die hier behandelte Gleichung wird oft *logistische Gleichung* genannt. Sie geht auf den niederländischen Mathematiker Verhulst zurück.

- **Die schwingende Saite**
  Hier betrachtet man die Aufgabe die Auslenkung u einer schwingenden Saite zum Zeitpunkt t and der Stelle x zu beschreiben. Ohne Begründung möchte ich im Moment die zugrundeliegende Differentialgleichung angeben. Sie lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.17}$$

Eine Herleitung dieser Gleichung findet man bei Heuser [5, S.291/292]. Üblicherweise befestigt man eine Saite an den Endpunkten und hindert sie damit an der Auslenkung. Wir nehmen an, daß diese Endpunkte $x = 0$ und $x = \pi$ sind. Damit erhält man die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$.
Hier handelt es sich um eine *partielle Differentialgleichung*. In diesem und im folgenden Beispiel sehen wir, daß gewöhnliche Differentialgleichungen eine erhebliche Rolle bei der Diskussion von Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen spielen.
Wir setzen der Einfachheit halber $\lambda = 1$. Mit dem Ansatz

$$u(x, t) = v(x)w(t) \tag{1.18}$$

erhält man die Beziehung

$$v(x)w''(t) = v''(x)w(t). \tag{1.19}$$

Steckt man noch die Annahme rein, daß man sich in einem Punkt (x, t) befindet, wo beide Funktionen nicht verschwinden, so ergibt sich

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}. \tag{1.20}$$

Da die beiden Seiten von verschiedenen Variablen abhängen, müssen diese konstant und gleich sein. Setzen wir diese Konstante $-K,\ K > 0$ so ergibt sich

$$\begin{aligned} w'' &= -Kw \\ v'' &= -Kv. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Das Vorzeichen von K ist physikalisch motiviert. Sonst erhält man keine zeitlich periodische Lösung. Für eine vollständige Lösung muß man zumindest aus mathematischer Sicht auch den anderen Fall diskutieren. Eine Lösung der zweiten Gleichung lautet, wie in (1.5)

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{K}x) + c_2 \sin(\sqrt{K}x).$$

Die Randbedingung $v(0) = 0$ eliminiert den Kosinusterm, die Bedingung $v(\pi) = 0$, ergibt für K die möglichen Werte $K = n^2$ wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Damit kann man eine Schar von Lösungen der Gleichung (1.17) angeben. Sie lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(d_n^1 \cos(nt) + d_n^2 \sin(nt) \Big)\, sin(nx). \tag{1.22}$$

Geht man von einer Ausgangsauslenkung mit Ausgangsgeschwindigkeit 0 aus, so verschwindet der Sinusterm und man behält die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(nt) sin(nx). \tag{1.23}$$

Ausführliche historische Bemerkungen findet man bei Heuser, [5, S. 441-449]. Diese seien allen Hörern anempfohlen. Man erkennt, daß über das Problem der schwingenden Saite viele der großen Mathematiker nachgedacht haben, wir erwähnen Euler, Lagrange, Bernoulli, d'Alambert und Riemann. Diese Liste ist unvollständig.

- **Die Wärmeleitungsgleichung**
  Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, die die Temperaturentwicklung in einem Stab modelliert. Wir nehmen an wir hätten einen Stab der Länge ℓ. Für $x \in (0, \ell)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $u(x,t)$ die Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t an der Stelle x. Die Anfangsverteilung der Temperatur sei durch eine Funktion $u_0(x)$ gegeben. An den Enden des Stabes bieten sich verschiedene Randbedingungen an, die physikalisch motiviert sind. Zum einen kann man annehmen, daß man an den Enden eine feste Temperatur τ hat, o.B.d.A. nehmen wir $\tau = 0$ an oder eine vollständige Isolierung, d.h. keine Temperaturänderung durch den Rand, d.h. $u_x(0,t) = u_x(\ell, t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die erste Randbedingung wird nach Dirichlet benannt, die zweite nach Neumann. An der Stelle (x,t) ist dabei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \tag{1.24}$$

erfüllt. Zur Vereinfachung setzen wir $k = 1$. Wieder macht man den Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$. Dann erhält man

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v} = \lambda.$$

Hier lautet eine mögliche Lösung

$$u(x,t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Aus der Randbedingung am linken Rand ergibt sich $c_1 = 0$ und die Randbedingung am rechten Rand ergibt $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, also

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}.$$

für eine natürliche Zahl n. Da man beliebige Summen (Reihen) bilden kann, lautet eine sehr allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{1.25}$$

Die Werte für c_n bestimmt man durch Entwicklung von u_0 in eine Fourierreihe, siehe z.B. Dym & McKean[4]

- **Das elektrische Feld**
  Sei $\mathbf{E}$ ein elektrisches Feld in der Ebene mit Komponenten $\mathbf{E}$=($\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$). Sei $\mathbf{U}$ das Potential dieses Feldes. Also $\mathbf{E}= \nabla\mathbf{U}$, wobei $\mathbf{U}$ eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y ist. Wir stellen uns die Frage, welches sind die Linien längs denen das Potential konstant ist. An fast allen Punkten $(x,\ y)$ wird entweder $x = x(y)$ eine Funktion von y sein, oder umgekehrt $y = y(x)$ eine Funktion von x. Wir beschränken uns auf den zweiten Fall, der erste geht daraus durch einfaches Umschreiben hervor. Um die Äquipotentiallinien zu finden, geben wir uns eine zunächst beliebige Konstante c vor und stellen die Frage, wo ist $\mathbf{U}= c$? Die Annahme, daß diese Linie durch $y = y(x)$ zu beschreiben ist, führt auf

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.26}$$

Dies ist ein Beispiel einer **exakten** Differentialgleichung. Allgemeiner sind diese folgendermaßen definiert: Die Differentialgleichung habe die Form

$$f(x,y)\frac{dy}{dx} + g(x,y) = 0. \tag{1.27}$$

gibt es eine Funktion $\mathbf{U}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß

$$f(x,y) = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial y},\ g(x,y) = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x}, \tag{1.28}$$

so nennt man die Gleichung (1.27) exakt. Niveaulinien von $\mathbf{U}$ sind dann immer aus Trajektorien der Gleichung zusammengesetzt. Hat man die Niveaulinien gefunden, kann man oft auch noch die Trajektorien bestimmen, Ist bei einer Gleichung der Form (1.27) die Bedingung (1.28) nicht erfüllt, so ist es manchmal möglich einen **integrierenden Faktor** zu finden. Dies ist eine Funktion $\mathbf{M}(x,y)$, so daß $\mathbf{M}f$ bzw. $\mathbf{M}g$ die Bedingung (1.28) erfüllen. Eine Diskussion der Gleichung ist dann der Diskussion einer exakten Gleichung ähnlich.

1.1.1 Aufgaben

Aufgabe 1.1.1.1 Man überlege sich ob ein Zerfallsgesetz $u(t)$ welches der Beziehung (1.8) genügt auch eine Gleichung der Form (1.6) erfüllt.

Aufgabe 1.1.1.2 (a) Man begründe, daß jede Lösung der Gleichung (1.1) die Form Ce^x mit einer reellen Konstante C hat.
(b) Man gebe ein entsprechendes Argument für die Gleichung (1.4) und die Lösungen (1.5) an.

Aufgabe 1.1.1.3 Man löse die Gleichungen
(a) $u' = u^2 + 1$
(b) $u' = -\frac{x^2}{u^3}$
(c) $u' = e^u \sin(x)$
mit der Methode der *Trennung der Veränderlichen* und diskutiere das Verhalten der Lösungen mit $u(0) = p_0,\ p_0 \in \mathbb{R}$. Darunter verstehen wir die Beantwortung der folgenden Fragen.

- Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?
- Wie verhält sich die Lösung für $t \to t_+,\ t \to t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnet auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

Aufgabe 1.1.1.4 Man verifiziere die Aussagen über die logistische Gleichung:
(a) Für $p_0 \in (0, K)$ existiert die Lösung für alle Zeiten und strebt für $t \to \infty$ gegen K, für $t \to -\infty$ gegen null.
(b) Für $p_0 > K$ existiert die Lösung nicht für alle reellen Zeiten. Man diskutiere das Verhalten.
(c) Man untersuche das Verhalten der Lösungen für $p_0 < 0$!

Aufgabe 1.1.1.5 Man diskutiere das System (1.21) für $K < 0$.

Aufgabe 1.1.1.6 Man überprüfe die folgenden Gleichungen auf Exaktheit, bestimme für die nicht exakten Gleichungen einen integrierenden Faktor und bestimme die Lösungen. Man beachte, daß die Gleichungen nicht überall Sinn machen. In diesen Fällen betrachte man eine äquivalente Differentialgleichung für die Funktion $x = x(y)$. Gibt es eine symmetrische Schreibweise?

1. $yy' = x$
2. $xy' = y$
3. $x - y + (-x + 1)y' = 0$
4. $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$
5. $xy^2 + y - xy' = 0$

1.2 Bezeichnungen

Die folgenden Bezeichnungen sind Standard und werden regelmäßig gebraucht werden. Einige werden erst später erklärt.

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$i\mathbb{R}$	die imaginäre Achse
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeller Vektorraum mit üblichen Strukturen
u'	Ableitung einer Funktion die auf $\mathbb{R}$ definiert ist
$\dot{u}$	wie eben, unabhängige Veränderliche ist die Zeit t
$\exp(.)$	Exponentialfunktion
$\lvert . \rvert$	Betrag einer reellen Zahl oder Norm im $\mathbb{R}^n$
$\lVert . \rVert$	Norm in einem Banachraum
X,Y	metrische Räume oder Banachräume
$M,\ N$	Mannigfaltigkeiten
T_xM	Tangentialraum an M in $x \in M$
TM	Tangentialbündel von M
$C(A,B)$	Raum der stetigen Funktionen von $A \to B$
$\mathrm{Lip}(A,B)$	Raum der Lipschitz stetigen Funktionen
∂U	Rand einer Menge U
dist(A,B)	Abstand zweier Mengen: $\inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

1.3 Hilfsmittel aus der Analysis

In diesem Abschnitt wollen wir einige Begriffe einführen, bzw. wiederholen, die für eine einfache und geschlossene Behandlung der Theorie unumgänglich sind.

1.3.1 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Definition 1.3.1.1 Sei $\mathbf{X}$ eine Menge, $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Das Paar $(\mathbf{X}, d)$ heißt metrischer Raum, falls d den folgenden Forderungen genügt.
(M1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$
(M2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(M3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$
(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.3.1.2 Es sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum.
(a) Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{X}$ nennt man *Cauchyfolge* wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$n > N,\ m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(b) Ein metrischer Raum $\mathbf{X}$ heißt *vollständig*, wenn zu jeder Cauchyfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{X}$ ein Element $\overline{x}\in\mathbf{X}$ existiert, so daß

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dies bedeuted natürlich: zu jedem $\varepsilon > 0$ exstiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$n > N \Rightarrow d(x_n, \overline{x}) < \varepsilon.$$

Eine reiche Klasse von metrischen Räumen sind normierte Vektorräume. Wir werfen einen Blick darauf.

Definition 1.3.1.3 Sei $\mathbf{X}$ ein reeller Vektorraum.
(a) Man nennt $(\mathbf{X}, \|.\|)$ einen normierten Raum, falls $\|.\|$ eine Abbildung $\|.\| : \mathbf{X}\to\mathbb{R}$ ist, so daß

1. $\|x\| \geq 0\ \forall x \in\mathbf{X}$;
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall(x, y) \in\mathbf{X}\times\mathbf{X}$;
4. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|\ \forall\alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in\mathbf{X}$

gilt.

Ohne Beweis geben wir das folgende (triviale) Lemma an.

Lemma 1.3.1.4 Mit

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{1.29}$$

wird ein normierter linearer Raum $(\mathbf{X}, \|.\|)$ zum metrischen Raum $(\mathbf{X}, d)$.

Definition 1.3.1.5 Ist ein normierter, linearer Raum $(\mathbf{X}, \|.\|)$ bezüglich der Metrik aus (1.29) vollständig, so bezeichnet man ihn als *Banachraum*.

Definition 1.3.1.6 Sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum. Eine Abbildung $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ heißt Kontraktion, falls für alle $(x,\ y)$ in $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ gilt:

$$d(Tx, Ty) < d(x, y). \tag{1.30}$$

T nennt man *stark kontrahierend*, wenn es ein $\lambda \in (0, 1)$ gibt, so daß für alle $(x, y) \in \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ gilt

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y). \tag{1.31}$$

Satz 1.3.1.7 [*Banach*] Jede stark kontrahierende Abbildung $T : \mathbf{X}\to \mathbf{X}$ hat einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\overline{x} \in \mathbf{X}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Angenommen $x_1,\ x_2$ sind Fixpunkte. Dann ist

$$d(x_1,x_2) = d(Tx_1,Tx_2) < \lambda d(x_1,x_2).$$

Also ist $d(x_1,x_2) = 0$ und wegen (M2) folgt $x_1 = x_2$. Wir kommen zur Existenz. Sei $x_0 \in \mathbf{X}$ beliebig. Wir konstruieren die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{X}$ durch $x_n = Tx_{n-1}$ und behaupten, daß dies eine Cauchyfolge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $m,\ n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 1$ ergibt sich mit (M4)

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_{m-1}) + \ldots + d(x_{n+1},x_n) = \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1},x_j)$$

Für ein j im angegebenen Bereich schließt man

$$d(x_{j+1},x_j) = d(T^j x_1, T^j x_0) \leq \lambda^j d(x_1,x_0).$$

Also hat man

$$d(x_m,x_n) \leq \sum_{j=n}^{m} \lambda^j d(x_1,x_0) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \lambda^j d(x_1,x_0) < \varepsilon$$

solange nur n genügend groß ist. □

Satz 1.3.1.8 [Stetige Abhängigkeit] Sei $(\mathbf{X}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $(\mathbf{Y}, d')$ ein metrischer Raum. Ferner sei für jedes $y \in \mathbf{Y}$ eine starke Kontraktion $T_y : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ mit Kontraktionskonstante λ_y gegeben. Es sei $s = \sup_{y\in\mathbf{Y}} \lambda_y < 1$. Für jedes $x \in \mathbf{X}$ sei die Abbildung

$$F_x : \mathbf{Y} \to \mathbf{X} : y \mapsto T_y x$$

stetig. Dann ist auch die Abbildung

$$G : \mathbf{Y} \to \mathbf{X} : y \mapsto \overline{x}_y, \tag{1.32}$$

stetig, wobei $\overline{x}_y$ durch $T_y\overline{x}_y = \overline{x}_y$ definiert ist.

Beweis: Fixiere $y_0 \in \mathbf{Y}$. Wir zeigen die Stetigkeit in y_0. Sei $\overline{x}_0$ der zugehörige Fixpunkt von T_{y_0}. Dann gilt für den Fixpunkt $\overline{x}_y$ von T_y,

$$\begin{aligned} d(\overline{x}_y,\overline{x}_0) &= d(T_y\overline{x}_y, T_{y_0}\overline{x}_0) \\ &\leq d(T_y\overline{x}_y, T_y\overline{x}_0) + d(T_y\overline{x}_0, T_{y_0}\overline{x}_0) \\ &\leq \lambda_y d(\overline{x}_y,\overline{x}_0) + d(T_y\overline{x}_0, T_{y_0}\overline{x}_0) \end{aligned} \tag{1.33}$$

Es folgt

$$(1-s)d(\overline{x}_y,\overline{x}_0) \leq (1-\lambda_y)d(\overline{x}_y,\overline{x}_0) \leq d(T_y\overline{x}_y, T_{y_0}\overline{x}_0)$$

Da $s < 1$ darf man durch $(1-s)$ teilen und die Behauptung folgt aus der Stetigkeit von F_{x_0}. □

1.3.2 Mannigfaltigkeiten

In diesem kurzen Abschnitt führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit soweit ein, daß wir Anfangswertprobleme auf Mannigfaltigkeiten diskutieren können. Dies macht die Theorie nicht schwieriger, führt aber oft zu entscheidenden Vereinfachungen der Beschreibung von Lösungen von Differentialgleichungen. Oft ist allein die Geometrie eines Vorgangs so einschränkend, daß es sinnvoll ist, sich diese Einschränkungen zunutze zu machen. Man denke an das Pendel. Die Geometrie zwingt zur Bewegung auf einerKreislinie. Zur Beschreibung des Zustandes benötigt man zwei Variable in $S^1 \times \mathbb{R}$, den Winkel (nimmt nur Werte auf der Kreislinie an) und die Winkelgeschwindigkeit, welche Werte in $\mathbb{R}$ annehmen kann. Eine Beschreibung in $\mathbb{R}^2$ würde vier Größen benötigen, zwei Zahlen für den Ort, zwei für die Geschwindigkeit.

Definition 1.3.2.1 Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

1. Sei $\{U_x \subset M | x \in M\}$ eine offene Überdeckung von M. Eine Familie von Homöomorphismen $\tau_x : U_x \to V_x$, wobei $V_x \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist, so daß für je zwei Abbildungen $\tau_x,\ \tau_y$ gilt
   $$\tau_x \circ \tau_y^{-1} : \tau_y(U_x \cap U_y) \to \tau_x(U_x \cap U_y) \tag{1.34}$$
   ist $r-$mal stetig differenzierbar, nennt man einen C^r-*Atlas* auf M. Einen Atlas bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$.

2. Ist $\mathcal{A}$ ein C^r-Atlas, $\tau \in \mathcal{A}$ eine Abbildung mit zugehörigem Definitionsbereich U. So nennen wir τ eine C^r-*Karte* und das Paar $(\tau,\ U)$ eine C^r-*Koordinatenumgebung.*

3. Zwei C^r-Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sind *äquivalent*, wenn für zwei Koordinatenumgebungen $(\tau_1,\ U_1)$, (τ_2, U_2) mit $\tau_1 \in \mathcal{A}_1,\ \tau_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt,
   $$\tau_1 \circ \tau_2^{-1} : \tau_2(U_1 \cap U_2) \to \tau_1(U_1 \cap U_2) \tag{1.35}$$
   ist r-mal stetig differenzierbar.

4. Eine Äquivalenzklasse Σ von C^r-Atlanten $[\mathcal{A}]$ wird als C^r-differenzierbare Struktur auf M bezeichnet.

5. Ist Σ eine C^r-differenzierbare Struktur auf M, so nennt man eine C^r-Mannigfaltigkeit.(M, Σ) eine C^r

6. Ist M zusammenhängend, so sind alle Bilder von Koordinatenumgebungenim gleichen Raum $\mathbb{R}^n$. Di e Zahl n heißt die Dimension der Mannigfaltigkeit.

<u>Bemerkung:</u> Die in Punkt 3 definierte Äquivalenz ist, wie man leicht nachprüft, tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Damit wird die Definition in Punkt 4 sinnvoll.**Beispiele:**

- **Der euklidische Raum**
  Hier definiert man durch eine Koordinatenumgebung $(id, \mathbb{R}^n)$ einen Atlas und dieser gibt eine differenzierbare Struktur. Dieses Beispiel ist natürlich trivial.

- **Sphären**
  Die Einheitssphäre S^n im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist gegeben durch
  $$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}.$$
  Die Definition von Koordinatenumgebungen bleibt dem Leser/ der Leserin überlassen. Hier, wie bereits zuvor, bezeichnet $|.|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^{n+1}$.

- **Tori**
  Die Definition der Tori ist eine erste interessante Konstruktion mit Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ und darin $\mathbb{Z}^n$ als additive Untergruppe. Wir führen auf $\mathbb{R}^n$ eine Äquivalenzrelation ein, indem wir zwei Punkte äquivalent nennen, falls sie sich um einen Vektor in $\mathbb{Z}^n$ unterscheiden. Sei $\mathbf{T}^n$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation. Als Metrik führt man ein
  $$d'([x],[y]) = \inf\{d(x,y) \mid x \in [x], y \in [y]\}, \tag{1.36}$$
  wobei d di e euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Das Nachprüfen der ersten drei Eigenschaften einer Metrik ist elementar. Für die letzte Eigenschaft überlegt man sich, daß es tatsächlich zwei Punkte $x \in [x]$ bzw. $y \in [y]$ gibt, so daß $d'([x],[y]) = d(x,y)$ erfüllt ist. Sei $[z] \in \mathbf{T}$. Dann gilt für jedes $z \in [z]$
  $$d'([x],[y]) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
  Auf der rechten Seite muß man zum Infimum übergehen, dabei entsteht d as Problem, daß jeder der beiden Ausdrücke von einem anderen $z \in [z]$ minimiert werden könnte. Man betrachtet deshalb die einzelnen Koordinaten x_i, $,y_i$, z_i, $i = 1, \ldots n$. Aufgrund der Bedingung, daß x, y den Abstand von $[x]$, $[y]$ realisieren, folgt, daß in jeder Komponente der Abstand nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist. Dann ist aber der Abstand der beiden Elemente z, z' von $[z]$ die den Abstand zu $[x]$, bzw. $[y]$ realisieren in jeder Komponente höchstens 1. Wir minimieren die einzelnen Komponenten getrennt. Ist $z_i' = z_i$, so ist klar, daß$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i'| + |y_i - z_i|$ gilt. Sind sie verschieden, so ist o.B.d.A. $z_i' = z_i + 1$ und man hat (wir betrachten den Fall $z_i + 1 \geq x_i \geq y_i \geq z_i$ alle anderen Fälle sind ganz ähnlich)
  $$|x_i - 1 - z_i| + |y_i - z_i| = z_i + 1 - x_i + y_i - z_i = 1 + y_i - x_i \geq 1 - |x_i - y_i| \geq \frac{1}{2} \geq |x_i - y_i|$$
  Addieren der Komponenten ergibt die Dreiecksungleichung. Um Koordinatenumgebungen zu definieren, betrachten wir für $x \in \mathbb{R}^n$ die Kugel $K(x)$ mit Radius $1/4$ um x. Sie schneidet jede Äquivalenzklasse höchstens einmal. Sei $\rho_x : K(x) \to \mathbf{T}^n$ gegeben durch die Einschränkung der Abbildung $x \mapsto [x]$. Da jede Klasse höchstens einen Punkt in dieser Kugel besitzt, ist die Abbildung injektiv und deswegen umkehrbar. Für je zwei Punkte y_1, $y_2 \in K(x)$ gilt $d'(\rho_x(y_1), \rho_x(y_2)) = d(y_1, y_2)$. Deswegen ist ρ_x ein Homöomorphismus und gleiches gilt natürlich für die Umkehrung $\tau_x = \rho_x^{-1}$. Insgesamt ergibt sich, daß $\mathbf{T}^n$ eine C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Definition 1.3.2.2 Eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to M$ heißt differenzierbar, wenn für jede Karte τ aus einem Atlas in Σ gilt, daß $\tau \circ \gamma$ differenzierbar ist. Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen.

Allgemeiner definiert man differenzierbare Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Wir werden dies benötigen um Differentialgleichungen hinschreiben zu können.

Definition 1.3.2.3 Seien (M, Σ), (N, Σ') differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt differenzierbar, wenn für je zwei Karten τ, τ' aus Σ, Σ' gilt, daß

$$\tau' \circ f \circ \tau^{-1} : \tau(U) \to \tau'(U')$$

differenzierbar ist.

Bemerkung: Euklidische Räume seien immer mit der differenzierbaren Struktur versehen welche durch die Identität definiert wird.

Definition 1.3.2.4 Sei (M, Σ) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $\gamma_{1,2} : \mathbb{R} \to M$ seien differenzierbare Abbildungen (Kurven) mit $x_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Wir sagen, γ_1 und γ_2 sind im Punkt x_0 tangential, in Zeichen $\gamma_1 \sim_0 \gamma_2$, wenn für jede Koordinatenumgebung (τ, U) von $\gamma_1(0)$ gilt

$$(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0).$$

Eine einfache Überlegung liefert:

Lemma 1.3.2.5 (a) $\sim_0$ ist eine Äquivalenzrelation.
(b) Ist für eine Karte τ die Beziehung $(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0)$ erfüllt, so ist sie für jede Karte richtig.

Beweis: Durch einfaches Nachprüfen! □

Definition 1.3.2.6 Sei $[\gamma]_0$ eine Äquivalenzklasse, der Relation $\sim_0$. Eine Klasse $[\gamma]_0$ wird Tangentialvektor an M im Punkt $\gamma(0)$ genannt. Die Menge der Tangentialvektoren bei $x \in M$ bezeichnet man mit $T_x M$.

Lemma 1.3.2.7 Die Menge $T_x M$ bildet einen reellen Vektorraum, dessen Dimension mit der Dimension der Mannigfaltigkeit zusammenfällt.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß man Tangentialvektoren an M im Punkt $x \in M$ in geeigneter Weise mit Skalaren multiplizieren kann und auch eine Addition möglich ist. Seien dazu $[\gamma]_0$, $[\gamma_{1,2}]_0$ drei Tangentialvektoren an M bei x, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und (τ, U) eine Koordinatenumgebung von $x \in M$. Die Kurven $\gamma, \gamma_{1,2}$ seien Repräsentanten der Tangentialvektoren $[\gamma]_0$, $[\gamma_1]_0$, bzw. $[\gamma_2]_0$. Wir setzen

$$\lambda[\gamma]_0 = [\tau^{-1}(\lambda(\tau \circ \gamma))]_0 \tag{1.37}$$

und

$$[\gamma_1]_0 + [\gamma_2]_0 = [\tau^{-1}(\tau \circ \gamma_1 + \tau \circ \gamma_2 - \tau(x))]_0 \tag{1.38}$$

Zunächst muß gezeigt werden, daß diese Verknüpfungen unabhängig von den Repräsentanten und unabhänig von der gewählten Koordinatenumgebung (τ, U) ist. Wir führen dies nur in einem, dem einfacheren, Fall aus. Angenommen, $\gamma, \overline{\gamma}$ seien beide Repräsentanten von $[\gamma]_0$. Aufgrund der Definition ist $\gamma(0) = \overline{\gamma}(0) = x$. Wir müssen nun zeigen, daß für jede Karte σ, die bei x definiert ist, gilt

$$\left(\sigma \circ \tau^{-1}(\tau \circ \gamma)\right)'(0) = \left(\sigma \circ \tau^{-1}(\tau \circ \overline{\gamma})\right)'(0).$$

Eine einfache Anwendung der Produktregel liefert als Ergebnis, daß beide Seiten gleich sind. Wählt man in der Konstruktion eine andere Karte $\tilde{\tau}$, so muß wiederum für eine beliebige Karte σ gezeigt werden, daß

$$\sigma\left(\tau^{-1}\left(\lambda\tau\circ\gamma\right)\right)'(0)=\sigma\left(\tilde{\tau}^{-1}\left(\lambda\tilde{\tau}\circ\gamma\right)\right)'(0)$$

ist. Da die Ableitung linear in λ ist, folgt das Ergebnis wieder aus der Produktregel. Die Dimension erhält man einfach durch Identifizierung von $[\gamma]_0$ mit $(\tau\circ\gamma)'(0)$ für eine feste Karte mit zugehöriger Koordinatenumgebung (τ, U), wobei $\gamma(0)\in U$ liegt. □

Lemma 1.3.2.8 Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit M, für $x\in M$ sei T_xM der Tangentialraum. Wir setzen

$$TM=\bigcup_{x\in M}T_xM$$

und definieren Karten $\tau_{x,v}:TM\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Hier ist $(x,v)\in TM$, d.h. $x\in M,\ v\in T_xM$. Ferner sei (τ,U) eine Koordinatenumgebung von x. Für $y\in U$ und $w\in T_yM$ setzen wir

$$\tau_{x,v}(y,w)=(\tau_x(y),(\tau_x\circ\gamma)'(0)),$$

wobei γ eine Kurve ist, welche w repräsentiert. Man beachte, daß die Konstruktion nicht von v abhängt.
Die Menge $\{\tau_{x,v},\ x\in M,\ v\in T_xM\}$ bildet einen Atlas auf TM. Hat M eine C^k differenzierbare Struktur, so ist TM eine C^{k-1}-differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis: Nachzulesen in Büchern über Differentialtopologie. Siehe z.B. Bröcker & Jänich [2]. □

Definition 1.3.2.9 Seien $M,\ N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten,$f:M\to N$ eine differenzierbare Abbildung. Wir definieren die tangentiale Abbildung $Tf:TM\to TN$ **fasernweise** durch $T_xf:T_xM\to T_{f(x)}N$ indem wir einen Tangentialvektor $v\in T_xM$, der durch eine Kurve γ repräsentiert wird, abbilden auf die Klasse $[f\circ\gamma]_0$.

Definition 1.3.2.10 (a) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (wir werden in Zukunft auf die Schreibweise als Paar verzichten), Sei $\gamma:\mathbb{R}\to M$ eine Kurve (d.h. eine glatte Abbildung). Wir definieren den Tangentialvektor $[\gamma]_t$ für $t\in\mathbb{R}$ im Punkt $\gamma(t)$ durch den Tangentialvektor der Kurve $\gamma_1(s)=\gamma(t+s)$ im Punkt $\gamma_1(0)$.
(b) Eine stetige Abbildung $v:M\to TM$ mit der Eigenschaft $v(x)\in T_xM$ für alle $x\in M$ heißt *Vektorfeld* auf M. .
(c) $w:M\times\mathbb{R}\to TM$ sei eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft $w(x,t)\in T_xM$ für alle $(x,t)\in M\times\mathbb{R}$. Wir nennen w ein *zeitabhängiges Vektorfeld* auf M.
(d) Gegeben sei ein (zeitabhängiges) Vektorfeld v. Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Eine Kurve $\gamma:I\to M$ heißt *Integralkurve* für v, wenn für jedes $t\in I$ der Tangentialvektor $[\gamma]_t$ der Kurve im Punkt $\gamma(t)$ mit $v(\gamma(t))$ bzw. mit $v(\gamma(t),t)$ übereinstimmt.

Bemerkung: Ist $M=\mathbb{R}^n$, so ist natürlich $TM=\mathbb{R}^{2n}$. Jedoch identifiziert man üblicherweise die Tangentialvektoren wieder mit Punkten des Raumes und betrachtet dann Vektorfelder als Abbildungen $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, bzw. $v:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. Dies macht manchmal die Schreibweise

einfacher. Konzeptionell ist jedoch die Trennung einfacher. Im weiteren Verlauf werden wir uns ausschließlich dem Studium von Integralkurven von (zeitabhängigen) Vekorfeldern widmen.
Bemerkung: Hat man ein Vektorfeld $v : M \to TM$ auf einer Mannigfaltigkeit M, dann ist formal die tangentiale Abbildung Tv eine Abbildung von $TM \to T(TM)$. Im Spezialfall, daß $v(x) = 0 \in T_xM$ ist, kann man jedoch T_xf als Abbildung $T_xM \to T_xM$ auffassen. Das sollte sich jede(r) selbst überlegen! Noch ein Hinweis: viele Bilder zur Erläuterung der Konzepte findet man im Buch von CHILLINGWORTH [3] oder bei ARNOL'D [1]

1.3.3 Aufgaben

Aufgabe 1.3.3.1 Man zeige, daß die Menge $C([0,1],\mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Norm

$$\|u\| = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 1.3.3.2 Wir betrachten die Abbildung

$$T : C([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n) : u \mapsto \int_0^1 f(.,y)u(y)dy, \tag{1.39}$$

wobei f eine auf $[0,1]\times[0,1]$ stetige, reellwertige Funktion ist. Man zeige T ist stetig und linear. Ist T eine Kontraktion?

Aufgabe 1.3.3.3 Man beweise das Lemma 1.3.1.4.

Aufgabe 1.3.3.4 Man veranschauliche sich das Tangentialbündel an die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^2$. Wie sehen typische Vektorfelder aus? Wie hat man sich das entsprechende auf dem Torus $\mathbf{T}^2$ vorzustellen.

Kapitel 2

Allgemeine Existenzsätze

Im weiteren Verlauf der Vorlesung beschränken wir uns auf Anfangswertprobleme gewöhnlicher Diffentialgleichungen. Zunächst zeigen wir Existenz von Integralkurven. Dabei betrachten wir nicht den allgemeinsten Fall. Danach zeigen wir, daß unter gewissen Annahmen, Integralkurven eindeutig sind. Daran anschließend werden stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit von den Parametern des Problems untersucht.

2.1 Nichtautonome Differentialgleichungen

2.1.1 Die Existenz von Integralkurven

Wir beginnen mit der Gleichung

$$\dot{u} = f(u, t), \tag{2.1}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine *lokal Lipschitz stetige Funktion* sei. Dies bedeutet, daß f stetig ist und zu jedem Punkt $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und eine Konstante M_U existiert, so daß für je zwei Punkte $(x_1, t),\ (x_2, t) \in U$ gilt

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq M_U \left(|x_1 - x_2|\right). \tag{2.2}$$

Man nennt die Differentialgleichung (2.1) **nichtautonom**, weil die Variable t explizit in der Gleichung auftritt. Natürlich können wir in den folgenden Ausführungen auch zulassen, daß f nicht von t abhängt. Sei $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Wir suchen ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften $t_0 \in I$,

$$u(t_0) = u_0 \tag{2.3}$$

und für jedes $t \in I$ gilt $\dot{u}(t) = f(u(t), t)$, d.h. u erfüllt (2.1).

Definition 2.1.1.1 Wir nennen $\mathbb{R}^n$ den *Phasenraum*, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ den *erweiterten Phasenraum* und den Graphen der Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \mapsto (u(t), t)$$

bezeichnen wir als *Integralkurve*.

Man beachte den Unterschied der Definition in diesem Spezialfall und der allgemeineren von oben! Bezüglich der Existenz von Integralkurven hat man den folgenden

Satz 2.1.1.2 [Lokaler Existenzsatz] Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz stetig. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in W$, $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl $\delta > 0$ und eine auf dem Intervall $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $u : I_\delta \to W$, mit folgenden Eigenschaften

- u ist auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ stetig differenzierbar;
- u genügt der Bedingung (2.3);
- u löst die Differentialgleichung (2.1).

Gibt es ein Intervall I, welches t_0 enthält und eine Funktion $w : I \to W$ mit den Eigenschaften $w(t_0) = u_0$ und w löst die Differentialgleichung (2.1), so gilt $u = w$ auf $I_\delta \cap I$.

Beweis: Sei U eine Umgebung von (u_0, t_0) in $W \times \mathbb{R}$, so daß auf U die Funktion f die Lipschitz Konstante M_U hat mit der die Ungleichung (2.2) erfüllt ist, und $|f(u,t)| \le N_U \ \forall (u,t) \in U$. Sei $\Delta = \inf\{|(x,t) - (u_0,t_0)| \mid (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus U\}$. Ist $\mathbb{R}^{n+1} \setminus U$ leer, so sei Δ eine beliebige positive Zahl. Wähle $\lambda \in (0,1)$. Setze $M = \max\{1, M_U\}$, $N = \max\{1, N_U\}$ und

$$\delta = \frac{1}{3} \min\{\frac{\Delta}{N}, \frac{3\lambda}{M}\}.$$

Mit $C(I_\delta, W)$ bezeichnen wir die Menge der auf I_δ definierten stetigen Funktionen mit Werten in W. Mit der Metrik $d(u,v) = \max\{|u(t) - v(t)| \mid t \in I_\delta\}$ wird $C(I_\delta, W)$ zum vollständigen metrischen Raum. Man prüfe alle Eigenschaften nach! Für $u \in C(I_\delta, W)$ definieren wir eine neue Funktion $Tu \in C(I_\delta, W)$ durch

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s) ds. \tag{2.4}$$

Wir zeigen
1.) T ist eine starke Kontraktion auf $C(I_\delta, W)$
2.) Der Fixpunkt u ist eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.
Zu 1.) Zunächst prüfen wir, ob für $v \in C(I_\delta, W)$ auch Tv wieder in diesem Raum liegt. Die Stetigkeit von Tv ist nahezu offensichtlich. Um einzusehen, daß $Tv(t) \in W$ liegt, zeigen wir, daß sogar $(Tv(t), t) \in U$ gilt. Offensichtlich ist $(Tv(t_0), t_0) = (u_0, t_0) \in U$. Wegen der Stetigkeit von Tv folgt, daß die Menge $I_U = \{t \in I_\delta \mid (v(t), t) \in U\}$ offen in I_δ ist. Damit gibt es ein Intervall $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ mit $\delta_1 \le \delta$, so daß für $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ gilt $(Tv(t), t) \in U$. Dann ist aber auch $(Tv(t), t) \in U$ für $|t - t_0| = \delta_1$. Dazu schätzen wir die Differenz $|Tv(t) - u_0|$ ab:

$$|(Tv(t), t) - (u_0, t)| \le |\int_{t_0}^{t} f(v(s), s) ds| + \delta_1 \le \int_{t_0}^{t} |f(v(s), s)| ds + \delta_1 \le \delta_1 N_U + \delta_1 \le \delta(1 + N) < \Delta$$

Damit ist $(Tv(t), t) \in U$. Die Menge I_U ist damit offen und abgeschlossen in I_δ. Da $t_0 \in I_U$ liegt, gilt $I_U = I_\delta$.

Wir kommen zur Kontraktionseigenschaft. Seien $v, w \in C(I_\delta, W_1)$, wobei $W_1 = \{u \in W \mid |u - u_0| \leq \Delta\}$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} d(Tv, Tw) &= \max\{|Tv(t) - Tw(t)| \mid t \in I_\delta\} \\ &\leq |\int_{t_0}^{t} (f(v(s), s) - f(w(s), s))ds| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(v(s), s) - f(w(s), s)|ds \\ &\leq \delta M_U d(v, w) \\ &< \lambda d(v, w). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz 1.3.1.7 folgt nun die Existenz von genau einem Fixpunkt von T.
Zu 2.) Ist $Tu = u$ so gilt für $t \in I_\delta$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)ds. \tag{2.6}$$

Damit ist klar, daß u im Inneren des Intervalls stetig differenzierbar ist. Die Ableitung $\dot{u}(t)$ ist nach dem HDI gleich $f(u(t), t)$. Wie schon vorher bemerkt, gilt auch (2.3). □

Korollar 2.1.1.3 Seien W, f wie im Satz 2.1.1.2. Die Konstanten Δ, M, N seien wie im Beweis angegeben. Dann existiert auf jedem Intervall I_δ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) mit $\delta < \min\{\frac{\Delta}{2N}, \frac{1}{M}\}$.

Beweis: Bitte selbst einfügen!

□

Der eben bewiesene Satz wird oft nach den Mathematikern *Picard* und *Lindelöf* benannt. Ohne Beweis möchte ich den Satz von Peano angeben, der eine Verallgemeinerung der Existenzaussage darstellt.

Satz 2.1.1.4 Ist $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(u_0, t_0) \in W \times \mathbb{R}$, so besitzt das Anfangswertproblem (2.1), (2.3) eine Lösung (lokal in der Zeit, d.h. es existiert ein Intervall I_δ und eine Funktion $u : I_\delta \to W$ welche (2.1) und (2.3) erfüllt.

Bemerkung: Man beachte, daß in diesem Satz die Eindeutigkeitsaussage des vorherigen Satzes nicht gemacht wird. Sie ist auch falsch, wie das Beispiel $\dot{x} = \sqrt{x}$ lehrt. Eine genauere Diskussion folgt in den Übungen.

2.1.2 Fortsetzbarkeit

Schon bei der Diskussion der logistischen Gleichung trat das Phänomen auf, daß Lösungen nicht für alle Zeiten existieren müssen. Wir wollen dies nun vertiefen.

Definition 2.1.2.1 (a) Wir betrachten das Anfangswertproblem (2.1), (2.3). Sei $u : I \to W$ eine Lösung. Man nennt eine Lösung u_1, welche auf einem Intervall I_1 definiert ist, eine *Fortsetzung* von u, wenn $I \subset I_1$ gilt und zusätzlich auf I die Funktionen u und u_1 übereinstimmen.
(b) Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt *maximales Existenzintervall*, wenn es eine Funktion $u : I \to W$ gibt, welche (2.1), (2.3) löst, so daß aus $u_1 : I_1 \to W$ ist Fortsetzung von u folgt, $I = I_1$.

Lemma 2.1.2.2 [Maximale Existenzintervalle] Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung. Dann gilt für Lösungen des Anfangswertproblems (2.1), (2.3)
(a) jede Lösung besitzt eine Fortsetzung auf ein maximales Existenzintervall;
(b) maximale Existenzintervalle sind offen;
(c) Für das Verhalten von u am Rand des maximalen Existenzintervall (t_1, t_2) des genannten Anfangswertproblems erhält man die folgende Alternative (sei T einer der Randpunkte, d.h. $T \in \{t_1,\ t_2\}$).

- $T = \infty$ oder $T = -\infty$,
$$\lim_{t \to T, t \in (t_1, t_2)} u(t)$$
existiert oder auch nicht.
- $|T| < \infty$, dann gilt: zu jedem Kompaktum $K \subset W$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß
$$|t - T| < \delta, t \in (t_1, t_2) \Rightarrow u(t) \notin K.$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus den beiden Beobachtungen:
1.) Sind $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des Anfangswertproblems (2.1), (2.3), so gibt es eine Lösung dieses Problems, welche auf $I_1 \cup I_2$ definiert ist. Denn aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des Satzes 2.1.1.2 stimmen u_1 und u_2 auf $I_1 \cap I_2$ überein. außerhalb des Durchschnitts setzt man $u(t) = u_1(t)$, falls $t \in I_1$ und $u(t) = u_2(t)$ andernfalls.
2.) Die Vereinigung von allen Intervallen auf denen Lösungen des Anfangswertproblems existieren, ist wieder ein Intervall. An jedem Punkt in diesem Intervall stimmen alle dort definierten Lösungen überein.
Behauptung (b) ist offensichtlich. Warum?
Zum Beweis der dritten Aussage unterscheiden wir die beiden Fälle $|T| = \infty$ und $|T| < \infty$. Im ersten Fall ist nichts zu zeigen. Der zweite Fall bedarf einer Überlegung. Angenommen, es gäbe ein Kompaktum $K \subset W$ und eine Folge $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}},\ t_i \in (t_1, t_2)\ \forall i$ und $\lim_{i \to \infty} t_i = T$ mit $w_i = u(t_i) \in K\ \forall i \in \mathbb{N}$. Dann hat die Folge $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $w_0 \in K \subset W$. Aufgrund des Existenzsatzes 2.1.1.2 gibt es eine Lösung $w_i : J_i \to W$, wobei $J_i \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist

und $w(t_i) = w_i$. Nun sei U eine Umgebung von (w_0, T) mit einer Lipschitzkonstante $M = M_U$. Wir setzen

$$\Delta = \frac{1}{2} \inf\{|(w_0, T) - (w, t)| \mid (w, t) \in \mathbb{R}^n \setminus U\}.$$

Sei $\delta < \frac{1}{M} \min\{\Delta, 1\}$. Dann existiert nach Korollar 2.1.1.3 jede Lösung mit Anfangswert $|(w_a, t_a) - (w_0, T)| < \Delta$ zumindest auf dem Intervall $(t_a - \delta, t_a + \delta)$. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß aus $i > N$ folgt, $|(w_i, t_i) - (w_0, T)| < \Delta$ und $|t_i - T| < \delta$. Dann existiert aber die Lösung durch (w_i, t_i) auf dem Intervall $(t_i - \delta, t_i + \delta)$. Dies enthält aber T als inneren Punkt, im Widerspruch zur Annahme, daß T Endpunkt des maximalen Existenzintervalls ist. □

Bemerkung: Die Aussage in Teil (c) kann man folgendermaßen interpretieren. Entweder die Lösung des Anfangswertproblems existiert für alle Zeiten, oder wenn dies nicht der Fall ist, so konvergiert sie bei Annäherung an einen Endpunkt des maximalen Existenzintervalls gegen den Rand ∂W von W oder gegen Unendlich. Es stellt sich die Frage, ob man einfache Bedingungen für *globale Existenz* angeben kann. Darunter verstehen wir die Frage, wann die Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Eine einfache hinreichende Bedingung wird im nächsten Satz angegeben.

Satz 2.1.2.3 [Globale Existenz] Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, mit einer globalen Lipschitzkonstante M. Dann exisiteren für alle Anfangswerte u_0 die Lösungen des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Dies folgt, wenn wir zeigen können, daß für jeden Anfangswert $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die zugehörige Lösung $u(t)$ auf einem Intervall I_δ existiert mit einem δ, welches nicht von (u_0, t_0) abhängt. (Wie?) Dies ist eine direkte Konsequenz des Korollars 2.1.1.3, denn Δ ist beliebig, M ist unabhängig vom Paar (u_0, t_0) und N läßt sich durch Δ und M nach oben abschätzen. □

2.1.3 Stetige Abhängigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert und von Parametern untersuchen. Dazu führen wir zunächst die folgenden Schreibweisen ein.

Definition 2.1.3.1 Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz stetige Abbildung. Eine Lösung $u : I \to W$ des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) wollen wir mit $u(t, t_0, u_0)$ bezeichnen, dh.

$$\frac{du}{dt}(t, t_0, u_0) = f(u(t, t_0, u_0), t)$$

für alle $t \in W$ und

$$u(t_0, t_0, u_0) = u_0.$$

Soll die Abhängigkeit von der rechten Seite f ausgedrückt werden, so schreiben wir $u(t, t_0, u_0, f)$. Hängt f von Parametern $\lambda \in \mathbf{Y}$ ab, wobei $\mathbf{Y}$ ein metrischer Raum ist, so bezeichnen wir diese Abhängigkeit durch $u(t, t_0, u_0, \lambda)$.

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ die Menge aller Lipschitz stetigen Funktionen auf $W \times \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$. Wir wollen einen Abstandsbegriff auf diesem Funktionenraum einführen. Dazu wählen wir eine abzählbare Familie von offenen Mengen $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Abschluß von U_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt.

2. $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$

3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = W \times \mathbb{R}$

D amit kann man Pseudo-Metriken (der Begriff wird weiter unten erläutert) auf $\mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ durch

$$d_n(f,g) = \max_{(u,t)\in U_n} |f(u,t) - g(u,t)| \tag{2.7}$$

definieren. Diese wiederum geben uns die Möglichkeit eine Metrik auf $\mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ zu konstruieren. Wir setzen einfach

$$d_L(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} \tag{2.8}$$

und fassen die notwendigen Beweisschritte im nächsten Lemma zusammen.

Lemma 2.1.3.2

1. Es gibt Familien von offenen Mengen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit den eben angegebenen Eigenschaften. item d_n ist eine Pseudo-Metrik, d.h. es sind alle Axiome einer Metrik außer dem Axiom M.2) erfüllt, stattdessen gilt nur noch die Implikation $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$.

2. d_L ist eine Metrik.

3. Eine Folge $f_n \in \mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann bezüglich der Metrik d_L, wenn sie auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert.

4. Die Konvergenz von Funktionen ist unabhängig von der gewählten Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen.

<u>Beweis:</u> Die erste Aussage beweisen wir durch Angabe einer Familie mit den genannten Eigenschaften. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$U_n = \{(u,t) \mid |(u,t)| < n \text{ und } \mathrm{dist}((u,t), \partial W \times \mathbb{R}) > \frac{1}{n}\}.$$

Man prüft leicht nach, daß diese Wahl zum gewünschten Ergebnis führt.
Die zweite Aussage ist klar. Natürlich ist d_n keine Metrik, stimmen nämlich f, g auf U_n überein und sind auf W verschieden, so ist $d_n(f,g) = 0$, obwohl $f \neq g$ gilt.
Bei der dritten Behauptung sind alle Aussagen bis auf M.2) und die Dreiecksungleichung trivial. Zum Beweis von M.2) überlegt man sich, daß $d_L(f,g) = 0$ impliziert, daß $d_n(f,g) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $f = g$. Andernfalls gäbe es einen Punkt $(u,t) \in W \times \mathbb{R}$ mit $f(u,t) \neq g(u,t)$. Dann gibt es aber auch eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $(u,t) \in U_n$ und $d_n(f,g) \neq 0$.
Zum Beweis der Dreiecksungleichung betrachten wir zunächst einen der Summanden, schreiben statt d_n einfach d und schätzen die Differenz

$$\frac{d(f,h)}{1 + d(f,h)} + \frac{d(h,g)}{1 + d(h,g)} - \frac{d(f,g)}{1 + d(f,g)} \tag{2.9}$$

ab. Nach Multiplikation mit den drei Nennern ergibt sich aus (2.9)

$$\begin{aligned}
&d(f,h) + d(f,h)(d(h,g) + d(f,g)) + d(f,h)d(h,g)d(g,f)\\
&+d(g,h) + d(g,h)(d(h,f) + d(f,g)) + d(f,h)d(h,g)d(g,f)\\
&-(d(f,g) + d(f,g)(d(h,g) + d(f,h)) + d(f,h)d(h,g)d(g,f))\\
&= d(f,h) + d(g,h) - d(f,g) + 2d(f,h)d(h,g) + d(f,h)d(f,g)d(g,h)\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Die vierte Aussage wollen wir in den Übungen beweisen, vgl. Aufgabe 2.1.5.2. Multiplizieren und Aufsummieren ändern natürlich nichts an der Eigenschaft einer Metrik.
Die letzte Behauptung folgt aus der vorherigen Aussage. □

Wir kommen nun zur wesentlichen Aussage dieses Abschnitts.

Satz 2.1.3.3 [Stetige Abhängigkeit] Die Lösung $u(t, t_0, u_0, f)$ des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) ist in allen Variablen stetig.

Bemerkung: In Wirklichkeit beweisen wir etwas mehr. Wenn wir die Existenzaussage des Satzes von Peano zugrunde legen würden, würden wir sogar die stetige Abhängigkeit von $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ erhalten. Es wäre natürlich die Stetigkeit auf den parameterabhängigen Fixpunktsatz 1.3.1.8 von Banach zurückzuführen. Doch dabei treten Probleme auf. Deshalb geben wir hier einen direkten Beweis ohne auf diese Version des Fixpunktsatzes zurückzugreifen. Beweis: Setze $\mathbf{Y} = W \times \mathbb{R} \times \mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Als Metrik d' auf $\mathbf{Y}$ setzen wir

$$d'(y_1, y_2) = |w_1 - w_2| + |t_1 - t_2| + d_L(f_1, f_2),$$

wobei $y_k = (w_k, t_k, f_k)$ für $k = 1, 2$ bezeichnet. Ist $u(t)$ Lösung von (2.1), (2.3), so hat u die Form

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)ds.$$

Ist v die Lösung von

$$\dot{v} = g(v, t) \text{ und } v(\tau_0) = v_0, \tag{2.10}$$

so hat man natürlich die entsprechende Formel

$$v(t) = v_0 + \int_{\tau_0}^{t} g(v(s), s)ds.$$

Wir werden zeigen, daß zu jedem $t \in (t_1,\ t_2)$, dem maximalen Existenzintervall der Lösung u des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$ existiert, so daß

$$d'((u_0, t_0, f), (v_0, \tau_0, g)) < \delta' \tag{2.11}$$

impliziert, daß $[t_0, t]$ (oder $[t, t_0]$) im maximalen Existenzintervall der Lösung v von (2.10) liegt und für alle $s \in [t_0, t]$ (oder für alle $s \in [t, t_0]$) gilt,

$$|u(s) - v(s)| < \varepsilon.$$

Wir wollen beides in einem Schritt zeigen. Seien also $t \in (t_1,\ t_2)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.O.B.d.A. nehmen wir an, daß $t > t_0$. U sei eine Umgebung von $G = \{(u(s), s) \,|\, s \in [t_0, t]\}$ in $W \times \mathbb{R}$, deren

Abschluß kompakt ist und so daß f auf U eine Lipschitz Konstante M_U besitzt. Wir definieren $N = \sup\{|f(w,s)| \mid (w,s) \in U\} + 1$, $M = \max\{1, M_U\}$, $\Delta = \text{dist}(G, \partial U)$ und $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon e^{-M(t-t_0)}$. Ersetzen wir ε durch $\min\{\varepsilon,\ \Delta\}$und zeigen wir, daß für ein $\delta' > 0$ aus (2.11) folgt, daß

$$|u(s) - v(s)| < \varepsilon,\ \forall s \in [t_0, t],$$

so folgt natürlich insbesondere auch die Aussage über das maximale Existenzintervall. Es gibt ein $\varepsilon' > 0$, so daß aus $d_L(f,g) < \varepsilon'$ folgt, daß $|g(w,s)| < N$ für alle $(w,s) \in U$ ist. Wegen der Kompaktheit des Abschlusses von U gibt es ein n_0, so daß $U \subset U_{n_0}$. Da $\overline{U}$ kompakt und $\cup_{n=0}^{\infty} U_n$ eine Überdeckung von $\overline{U}$ ist, kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Da die Folge der $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist (siehe Punkt 2 der Konstruktion der Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), genügt dann eine einzelne Menge zum Überdecken. Wir setzen $\delta = \frac{\Delta}{3N}$. Dann gilt die Teilbehauptung: Ist $d_L(f,g) < \varepsilon'$ und $\text{dist}((v_0, \tau_0), G) < \delta$, so existiert die Lösung v des Anfangswertproblems (2.10) zumindest auf dem Intervall $[\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$. Diese Behauptung folgt aus dem Satz 2.1.2.3, wenn wir zeigen, daß für $\tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$, die Integralkurve $(v(\tau), \tau)$ in U verläuft. Dazu berechnen wir den Abstand von $(v(\tau), \tau)$ von G

$$\begin{aligned}\text{dist}(G, (v(\tau), \tau)) &\le \text{dist}(G, (v_0, \tau_0)) + |(v_0, \tau_0) - (v(\tau), \tau)| < \delta + \int_{\tau_0}^{\tau} |g(v(s), s)| ds + |\tau - \tau_0| \\ &\le \delta + \delta N + \delta \le 3N\delta \le \Delta.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\delta' = \min\{2^{-n_0-1}, 2^{-n_0-2}\frac{\tilde{\varepsilon}}{|t-t_0|}, \frac{\tilde{\varepsilon}}{4N}, \varepsilon', \delta\}$$

und zeigen, ist $d'((u_0, t_0, f), (v_0, \tau_0, g)) < \delta'$, so existiert die Lösung $v(s)$ für $s \in [t_0, t]$ und es gilt $|u(s) - v(s)| < \varepsilon$.
Zunächst folgern wir aus der Zwischenbehauptung, daß die Lösung v bei t_0 definiert ist, da $d_L(f,g) < \varepsilon'$ und $|t_0 - \tau_0| < \delta$ ist. Für die Differenz $|u_0 - v(t_0)|$ ergibt sich:

$$|u_0 - v(t_0)| \le |u_0 - v_0| + \int_{\tau_0}^{t_0} |g(v(s), s)| ds < \delta' + N\delta' \le 2N\delta' \le \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \tag{2.12}$$

Da sowohl u, wie v in t stetig sind, ist das maximale Intervall $T \subset [t_0, t]$ mit den Eigenschaften

- $t_0 \in T$
- $|u(t) - v(t)| < \varepsilon$

offen in $[t_0, t]$. Im nächsten Schritt beweisen wir, daß die Implikation

$$[t_0, \tau) \subset T \Rightarrow [t_0, \tau] \subset T$$

wahr ist. Ist nämlich$[t_0, \tau) \subset T$ so dürfen wir schreiben

$$u(\tau) - v(\tau) = u_0 - v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} f(u(s), s) ds - \int_{t_0}^{\tau} g(v(s), s) ds.$$

Für die Beträge ergibt sich

$$|u(\tau) - v(\tau)| \le |u_0 - v(t_0)| + |\int_{t_0}^{\tau} f(u(s), s) ds - \int_{t_0}^{\tau} g(v(s), s) ds|.$$

Wir benutzen die Abschätzung bei t_0 und erhalten

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + |\int_{t_0}^{\tau} (f(u(s), s) - g(v(s), s))ds|.$$

Einfügen eines weiteren Termes und eine Anwendung der Dreiecksungleichung liefern:

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} |f(u(s), s) - f(v(s), s)|ds + \int_{t_0}^{\tau} |f(v(s), s) - g(v(s), s)|ds.$$

Wir formen um (da $(v(s), s) \in U \ \forall s \in [t_0, \tau)$ ist dies möglich)

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)|ds + \int_{t_0}^{\tau} d_{n_0}(f, g)ds$$

$$\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)|ds + (t - t_0)d_{n_0}(f, g). \tag{2.13}$$

Z unächst schätzen wir $d_{n_0}(f, g)$ ab. Da $d_L(f, g) < \delta'$ ist, hat man insbesondere $d_L(f, g) < 2^{-n_0-1}$. Da

$$2^{-n_0} \frac{d_{n_0}(f, g)}{1 + d_{n_0}(f, g)} \leq d_L(f, g)$$

ist, gilt

$$\frac{d_{n_0}(f, g)}{1 + d_{n_0}(f, g)} \leq 2^{n_0} d_L(f, g)$$

und daraus folgt

$$d_{n_0}(f, g)(1 - 2^{n_0} d_L(f, g)) \leq 2^{n_0} d_L(f, g).$$

Wegen der erwähnten Abschätzung für $d_L(f, g)$ ist der Faktor auf der linken Seite immer größer als $1/2$ und man erhält$d_{n_0}(f, g) < 2^{n_0+1} d_L(f, g)$. Also hat man die Abschätzung $d_{n_0}(f, g) \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2|t-t_0|}$. Eingesetzt in (2.13) ergibt dies

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \tilde{\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)|ds.$$

Wir benutzen nun eine Ungleichung, die auf den amerikanischen Mathematiker Gronwall zurückgeht, die im nachfolgenden Lemma bewiesen werden wird und erhalten

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \tilde{\varepsilon} e^{M(\tau - t_0)} \leq \varepsilon.$$

□

Lemma 2.1.3.4 [*Gronwall*] S ei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $u : I \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion, welche für zwei positive Konstanten α, β, für ein $t_0 \in I$ und alle $t \in I$ der Abschätzung

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} u(s)ds \tag{2.14}$$

genügt. Dann gilt für alle $t \in I$

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}. \tag{2.15}$$

Setzt man in (2.14) die strikte Ungleichung voraus, so gilt auch in (2.15) eine echte Ungleichheit.

Beweis: Sei
$$v(t) = \int_{t_0}^{t} u(s)ds.$$
Damit schreibt sich (2.14) um zu
$$\dot{v} \leq \alpha + \beta v.$$
Setze $w(t) = v(t)e^{-\beta t}$. Differenzieren von w ergibt $\dot{w} \leq \alpha e^{-\beta t}$. Integration dieser Ungleichung (auf beiden Seiten stehen ausschließlich nichtnegative Funktionen) zwischen t_0 und t führt zu (man beachte $w(t_0) = 0$)
$$w(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}|e^{-\beta t} - e^{-\beta t_0}|.$$
Damit ergibt sich für v,
$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}|1 - e^{\beta(t-t_0)}|,$$
oder
$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta|t-t_0|} - \frac{\alpha}{\beta}.$$
Für $u(t)$ erhält man daraus
$$u(t) \leq \alpha + \beta v(t) = \alpha + \alpha e^{\beta|t-t_0|} - \alpha.$$
Man beachte, daß eine strikte Ungleichung in (2.14) zu einer echten Ungleichheit in jeder dieser Abschätzungen führt. □

Bemerkung: Es gibt allgemeinere Versionen dieses Lemmas, von denen wir später noch einige kennenlernen werden. Der nächste Schritt besteht darin, eine differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswert, Anfangszeit und Parametern zu beweisen. Dazu zunächst eine einfache Konsequenz des gerade bewiesenen Satzes.

Korollar 2.1.3.5 [Stetige Abhängigkeit von Parametern] Sei (Λ, d_Λ) ein metrischer Raum, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : W \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ stetig und für festes $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda$ bezüglich u lokal Lipschitz stetig. Dann ist $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ in allen Variablen stetig.

Beweis: Wir setzen $f^\lambda(u, t) = f(u, t, \lambda)$ und müssen zeigen, daß die Abbildung $\lambda \mapsto f^\lambda$ stetig (bezüglich der Metrik d_L) ist. Seien $\varepsilon > 0$ und $\lambda_0 \in \Lambda$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

(2.16)
$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Sei U_{n_0} das entsprechende Elemen t aus der Familie von Mengen, welche zur Konstruktion von d_L herangezogen wurde. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß
$$d_\Lambda(\lambda_0, \lambda) < \delta \Rightarrow d_{n_0}(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Wenn dies gezeigt ist, ist der Rest kl ar. Denn dann ist für $n \leq n_0$ auch$d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \varepsilon/2$ und daher ist

(2.17)
$$\sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} \frac{d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0})}{1 + d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und aus (2.16), (2.17) folgt, daß $d_L(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \varepsilon$. Bleibt noch die Existenz von δ zu beweisen. Zu jedem $(u_0, t_0) \in U_{n_0+1}$ gibt es eine Umgebung $Z(u_0, t_0, \lambda_0) \subset W \times \mathbb{R} \times \Lambda$, so daß $|f(u, t, \lambda) - f(u_0, t_0, \lambda_0)| < \varepsilon/2$ist. Dies liegt an der Stetigkeit von f in allen Variablen. Natürlich enthält $Z(u_0, t_0, \lambda_0)$ eine Menge der Form $U'(u_0, t_0) \times Y_{\delta(u_0,t_0)}$, wobei $U'(u_0, t_0) \subset U_{n_0+1}$ eine Umgebung von (u_0, t_0) ist und

$$Y_{\delta(u,t)} = \{\lambda \in \Lambda \mid d_\Lambda(\lambda, \lambda_0) < \delta(u, t)\}$$

ist. Da $\overline{U}_{n_0}$ kompakt ist, überdecken endlich viele Mengen der Form $U'(u_k, t_k)$, $k = 1, \ldots, K$ die Menge U_{n_0}. Sei $\delta = \min\{\delta(u_k, t_k) \mid 1 \leq k \leq K\}$. Dieses δ hat offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. □

Als Folgerung hieraus betrachten wir nun differenzierbare Abhängigkeiten. Dazu schränken wir uns auf den Fall ein, daß Λ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. d_Λ ist dann natürlich die übliche Metrik.Zur Motivation betrachten wir das folgende Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$gegeben durch $f(u, \lambda) = \lambda u$. Dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = \lambda u,\ u(0) = 1$ gegeben durch $u(t, 0, 1, \lambda) = e^{\lambda t}$. Diese Lösung ist nach λ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial u(t, 0, 1, \lambda)}{\partial \lambda} = te^{\lambda t}.$$

Sei u_λ diese Funktion, dann erfüllt u_λ die
Anfangsbedingung $u_\lambda(0) = 0$ und genügt der Differentialgleichung (hier ist $f_\lambda = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ und $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$)

$$\dot{u}_\lambda = u + \lambda u_\lambda (= f_\lambda + f_u u_\lambda).$$

Die auf diese Weise vermutete Formel kann man auch noch durch eine formale Betrachtung von Differentialquotienten motivieren. Dazu sei $f : W \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung, wobei $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge ist. Sei λ_i eine der Variablen in $\mathbb{R}^m$. Die Abbildung f hat in Koordinaten die Form $f = (f^1, \ldots, f^n)$. Mit $f^j_{\lambda_i}$ bezeichnen wir die partielle Ableitung, also

$$f^j_{\lambda_i} = \frac{\partial f^j}{\partial \lambda_i},\ j = 1, \ldots, n,\ i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Wir schreiben f_{λ_i} für die Abbildung

$$f_{\lambda_i} = (f^1_{\lambda_i}, \ldots, f^n_{\lambda_i}).$$

Für die Vorbetrachtung reicht es, sich auf den Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ zu beschränken. Wir wollen damit uns die nachfolgenden Ergebnisse plausibel machen. Nun seien $u(t, t_0, u_0, \lambda_1)$ bzw. $u(t, t_0, u_0, \lambda_2)$ Lösungen des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) für zwei verschiedene Werte des Parameters $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Weiter schreiben wir $u_\lambda(t, t_0, u_0, \lambda_i)$ für die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach λ im Punkt $\lambda = \lambda_i$. Für die Differenz der beiden Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t, t_0, u_0, \lambda_1) - u(t, t_0, u_0, \lambda_2) &= f(u(t, t_0, u_0, \lambda_1), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_2) \\ &= f(u(t, t_0, u_0, \lambda_1), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_1) \\ &\quad + f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_2). \end{aligned}$$

Wir schreiben nun $u(1)$ für $u(t, t_0, u_0, \lambda_1)$ und entsprechend auch $u(2)$ für $u(t, t_0, u_0, \lambda_2)$.Dividiert man durch $(\lambda_1 - \lambda_2)$, so ergibt sich aus dem obigen

$$\begin{array}{ccccc} \frac{u(1)-u(2)}{\lambda_1-\lambda_2} & = & \frac{f(u(1),t,\lambda_1)-f(u(2),t,\lambda_1)}{u(1)-u(2)} \frac{u(1)-u(2)}{\lambda_1-\lambda_2} & + & \frac{f(u(2),t,\lambda_1)-f(u(2),t,\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \qquad\qquad \lambda_2 \to \lambda_1. \\ u_\lambda(1) & & f_u(u(1), t, \lambda_1) u_\lambda(1) & + & f_\lambda(u(1), t, \lambda_1) \end{array}$$

Man sieht, daß es einiger Überleg ungen bedarf um die Vertauschung der entsprechenden Grenzprozesse zu rechtfertigen. Ähnliche Überlegungen kann man für die Ableitungen nach Anfangswert und Anfangszeit anstellen. Statt den Grenzübergang für Differentialquotienten zu rechtfertigen, werden wir Differentialgleichungen herleiten, die von den Ableitungen nach der verschiedenen Variablen erfüllt werden. Existenz- und Eindeutigkeitssätze erlauben uns dann zu schließen, daß die Ableitungen existieren.Zur Herleitung dieser Differentialgleichungen dient ein Hilfssatz. Wir wollen noch folgende Bezeichnung vereinbaren. Seien V_1, V_2 endlichdimensionale Vektorräume. Dann bezeichne $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ die Menge aller linearen Abbildungen von V_1 nach V_2. Ist $V_1 = V_2$ so sei $\mathbb{1}$ die Identität.

Hilfssatz 2.1.3.6 Sei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung eines reellen Intervalls I in den Raum der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich. Dann hat das Anfangswertproblem, wobei eine Funktion $C : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gesucht wird,

$$\dot{C} = AC, \quad C(t_0) = \mathbb{1} \tag{2.18}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Hängt A stetig von Parametern λ in einem metrischen Raum Λ ab, so ist $C(t, \lambda)$ in beiden Variablen stetig.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die folgenden n Anfangswertprobleme für Funktionen $c_i : I \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$ gegeben durch

$$\dot{c}_i = Ac_i, \ c_i(t_0) = e_i,$$

wobei e_i der i-te kanonische Einheitsvektor ist. Diese Gleichung hat für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Lösung, welche auf I existiert. Dann ist aber

$$C = (c_1, \dots, c_n)$$

eine Lösung von (2.18). □

Definition 2.1.3.7 Sei $u(t, t_0, u_0)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.3). Die Differentialgleichung für eine Funktion $v : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\dot{v} = D_u f(u(t, t_0, u_0), t)v$$

heißt *Variationsgleichung* für u. Entsprechendes definiert man auch für parameterabhängige f's.

<u>Bemerkung:</u> Aus dem Hilfssatz 2.1.3.6 folgt die Lösbarkeit der Variationsgleichung. <u>Bezeichnung:</u> Mit $D_i u$ wird die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach der i-ten Variablen bezeichnet.

Satz 2.1.3.8 [Differenzierbare Abhängigkeit] Seien $W \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : W \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$sei k-mal stetig differenzierbar. Dann ist die Lösung $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ des Anfangswertproblems (2.1), (2.3) nach allen Variablen k-mal stetig differenzierbar.
Die ersten Ableitungen von u genügen den Differentialgleichungen

1. Die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach der Anfangszei t, die wir, unserer Konvention folgend, mit $D_2 u$ bezeichnen wollen, löst die Gleichung

$$\dot{z} = \frac{\partial f(u(t), t, \lambda)}{\partial u} z,$$

für eine Abbildung $z : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit Anfangswert $z(t_0) = -f(u_0, t_0, \lambda)$.

2. Die Ableitung D_3u nach dem Anfangswert ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und löst die Gleichung
$$\dot{C} = \frac{\partial f(u(t),t,\lambda)}{\partial u} C,$$
mit Anfangsbedingung $C(t_0) = \mathbb{1}$.

3. Die Ableitung nach dem Pa rameter D_4u ist eine Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und löst die Gleichung
$$\frac{\partial}{\partial t} B = \frac{\partial f(u(t),t,\lambda)}{\partial u} B + f_\lambda(u,t,\lambda).$$
mit Anfangswert $B(t_0) = 0$.

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion nach k. Haben wir die obigen Formeln bewiesen, dann folgt zunächst die einmalige Differenzierbarkeit. Aber diese Abbildungen sind dann nach dem gleichen Schritt wieder differenzierbar. Sei $u(t,t_0,u_0,\lambda)$ die Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.3). wir betrachten die Ableitungen nach u_0 und nach λ zusammen. Dazu erweitern wir künstlich das Anfangswertproblem zu

(2.19)
$$\begin{array}{rcll} \dot{u} & = & f(u,t,\lambda), & u(t_0) = u_0 \\ \dot{\lambda} & = & 0, & \lambda(t_0) = \lambda. \end{array}$$

Natürlich sind die Lösungen des neuen Systems nichts anderes als die Lösungen des alten Systems, nur, daß die Parameter als Anfangswerte auftreten. Sei
$$w = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$
und damit

(2.20)
$$\dot{w} = F(w,t), \ w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$
mit den offensichtlichen Identifikationen
$$F(w,t) = \begin{pmatrix} f(u,t,\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Differenzierbarkeit nach dem Anfangswert für die neue Gleichung bedeuted natürlich, daß die Lösung der ursprünglichen Gleichung sowohl nach dem Anfangswert, wie auch nach den Parametern differenzierbar ist.Sei $w(t,t_0,w_0)$ die Lösung der Gleichung (2.20). Wir setzen für $h \in \mathbb{R}^{n+m}$
$$v(t,t_0,w_0,h) = w(t,t_0,w_0+h) - w(t,t_0,w_0)$$
und
$$V(t,t_0,w_0,h) = \int_0^1 D_w F(w(t,t_0,w_0) + sv(t,t_0,w_0,h),t) ds.$$
Dann gilt
$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial v}{\partial t} & = & \frac{\partial w}{\partial t}(t,t_0,w_0+h) - \frac{\partial w}{\partial t}(t,t_0,w_0) \\ & = & F(w(t,t_0,w_0+h),t) - F(w(t,t_0,w_0),t) \\ & = & V(t,t_0,w_0,h)v(t,t_0,w_0,h) \end{array}$$

Da $v(t_0, t_0, w_0, h) = w_0 + h - w_0 = h$ ist, löst v das Anfangswertproblem

$$\dot{z} = V(t, t_0, w_0, h)z, \ z(t_0) = h.$$

Nach Hilfssatz 2.1.3.6 hat das Anfangswertproblem

$$\dot{C} = VC, \ C(t_0) = \mathbb{1}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $C(t, t_0, w_0, h)$, die nach Hilfssatz 2.1.3.6 und Korollar 2.1.3.5 in allen Variablen stetig ist. Aus der Eindeutigkeit wiederum schließt man, daß v die Form

$$v(t, t_0, w_0, h) = C(t, t_0, w_0, h)h.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} |w(t, t_0, w_0 + h) - w(t, t_0, w_0) - C(t, t_0, w_0, 0)h| &\leq |v(t, t_0, w_0, h) - C(t, t_0, w_0, 0)h| \\ &= |C(t, t_0, w_0, h)h - C(t, t_0, w_0, 0)h| \\ &\leq |C(t, t_0, w_0, h) - C(t, t_0, w_0, 0)||h| \\ &= o(|h|). \end{aligned}$$

Man beachte, daß die erste Norm in der letzten Ungleichung eine Norm im Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^{n+m}$ in sich ist. Diese wird wegen der Stetigkeit von C in allen Variablen klein. Aus diesen Überlegungen folgt, daß w nach dem Anfangswert w_0 differenzierbar ist, mit Ableitung $C(t, t_0, w_0, 0)$. Damit haben wir Differenzierbarkeit von u nach Anfangswert und Parameter geklärt. Wir kommen zur Ableitung nach der Anfangszeit. Für den Rest des Beweises unterdrücken wir bei der Lösung u die Abhängigkeit vom Parameter, um die Schreibweise nicht unnötig zu verkomplizieren. Im folgenden sei $h \in \mathbb{R}$. Setzt man

$$v(t, t_0, u_0, h) = u(t, t_0 + h, u_0) - u(t, t_0, u_0)$$

und

$$A(t, t_0, u_0, h) = \int_0^1 f_u(u(t, t_0, u_0) + sv(t, t_0, u_0, h), t)ds,$$

so erhält man für v die Darstellung

$$\begin{aligned} v(t_0, t_0, u_0, h) &= u(t_0, t_0 + h, u_0) - u(t_0, t_0, u_0) \\ &= u(t_0, t_0 + h, u_0) - u(t_0 + h, t_0 + h, u_0) + u(t_0 + h, t_0 + h, u_0) - u_0 \\ &= -(u(t_0 + h, t_0 + h, u_0) - u(t_0, t_0 + h, u_0)) \\ &= -h \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + sh, t_0 + h, u_0)ds \\ &= -h \int_0^1 f(u(t_0 + sh, t_0 + h, u_0), t_0 + sh)ds \\ &= -hf(u_0, t_0) + R(t_0, u_0, h)h, \end{aligned}$$

wobei natürlich gilt

$$R(t_0, u_0, h) = \int_0^1 \left(f(u_0, t_0) - f(u(t_0 + sh, t_0 + h, u_0), t_0 + sh)\right) ds.$$

Die Funktion v löst wieder ein Anfangswertproblem, nämlich

$$\dot{z} = A(t, t_0, u_0, h)z, \;\; z(t_0) = -hf(u_0, t_0) + R(t_0, u_0, h)h.$$

Man beachte, daß A eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich ist. Also können wir mit dem Hilfssatz 2.1.3.6 das Anfangswertproblem

$$\dot{C} = AC, \;\; C(t_0) = \mathbb{1}$$

mit einer matrixwertigen Funktion $C = C(t, t_0, u_0, h)$ lösen. Wiederum ist C in allen Variablen stetig. Aus der Eindeutigkeit folgt wie oben die Darstellung von v durch

$$v(t, t_0, u_0, h) = C(t, t_0, u_0, h)\left(-hf(u_0, t_0) + hR(t_0, u_0, h)\right).$$

Auch das weitere ist dem obigen ganz ähnlich. Man erhält

$$\begin{aligned} &u(t, t_0 + h, u_0) - u(t, t_0, u_0) + C(t, t_0, u_0, 0)f(u_0, t_0)h \\ &= ((C(t, t_0, u_0, 0) - C(t, t_0, u_0, h))f(u_0, t_0) + C(t, t_0, u_0, h)R(t_0, u_0, h))h \\ &= o(|h|). \end{aligned}$$

Damit ist u stetig nach t_0 differenzierbar und $D_2u(t, t_0, u_0) = -C(t, t_0, u_0, 0)f(u_0, t_0)$. Hieraus folgt die Behauptung. □

2.1.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir eine Verbindung zwischen Differentialgleichungen höherer Ordnung in $\mathbb{R}$ und Gleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$ herstellen. Damit übertragen sich die Existenzsätze fürdie Lösungen von nichtautonomen Gleichungen auch auf Gleichungen höherer Ordnung. Wir bezeichnen die n-te Ableitung einer Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u^{(n)}$. In diesem Abschnitt sei die unabhängige Veränderliche x.Gegeben seien $n-1$ stetige Funktionen $a_i : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und eine lokal Lipschitz stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$.Wir suchen nun eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}$, welche der Gleichung

$$\text{(2.21)} \qquad \mathrm{L}u = u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)u' + a_n(x)u = f(u, u', \ldots, u^{(n-1)}, x)$$

genügt. Bevor wir uns über Anfangsbedingungen Gedanken machen, schreiben wir die Gleichung um. Wir setzen $y_i = u^{(i-1)}$. Daraus erhält man dann das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -(a_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)u' + a_n(x)u) + f(y, x). \end{aligned}$$

Setzt man in die letzte Gleichung noch die neuen Variablen ein, so hat man

$$y_n' = -(a_1(x)y_n + \ldots + a_{n-1}(x)y_2 + a_n(x)y_1) + f(y, x).$$

Dieses System hat die Form

$$y' = A(x)y + F(y, x)$$

mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

und

$$F(y,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(y,x) \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Um hieraus ein Anfangswertproblem zu machen, müssen wir noch Anfangswerte für y vorgeben, also $y(t_0) = y_0$. Solche Anfangswerte übersetzen sich in Anfangswerte für u und die ersten $n-1$ Ableitungen von u. Damit überträgt sich der Existenz und Eindeutigkeitssatz auf solche Gleichungen. Wir notieren:

Satz 2.1.4.1 Es seien $u_0^{(k)}$ für $k = 0, \dots, n-1$ reelle Zahlen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$ seien stetige Funktionen. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich der ersten Variablen lokal Lipschitz stetig. Dann hat das Anfangswertproblem (vgl. (2.21))

$$\mathrm{L}u = f(u, u' \dots, u^{(n-1)}, x),\ u^{(k)}(x_0) = u_0^{(k)}\ k = 0, \dots, n-1\ x_0 \in I$$

eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf einem Intervall $J \subset I$ definiert ist. Genügt f einer Lipschitz Bedingung mit einer globalen Lipschitz Konstante, so existiert die Lösung auf ganz I.

Beweis: Folgt sofort aus den entsprechenden Sätzen für die Anfangswertprobleme (2.1) und (2.3). □

2.1.5 Aufgaben

Aufgabe 2.1.5.1 Man vervollständige den Beweis von Satz 2.1.2.3

Aufgabe 2.1.5.2 Man zeige, daß eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ genau dann in der Metrik d_L konvergiert, wenndie Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset W \times \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2.1.5.3 (a) Man löse das Anfangswertproblem $\dot{u} = \mathrm{sgn}(u)\sqrt{|u|}$, $u(0) = u_0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$. Sind die Lösungen eindeutig?(b) Existieren die Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{u} = u^2$, $u(0) = u_0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.1.5.4 Man zeige, daß die Lösungen des Anfangswertproblems $p(x)u'' + q(x)u' + c(x) = 0$ und $u(x_0) = a, u'(x_0) = b$ eindeutig auf dem Intervall $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ lösbar sind, sofern p, q, c auf dem Intervall I stetig sind und p dort nicht verschwindet. Wie ist es, wenn p auf dem Rand verschwindet?

2.2 Berechnung von Lösungen

2.2.1 Die Euler'sche Polygonzugmethode

Die Grundlage dieser Methode ist die ein fache Beobachtung, daß $f(u,t)$ in der Nähe eines Punktes als nahezu konstant angesehen werden kann. Man wählt daher eine (kleine) Schrittweite h und ersetzt $u(t)$ durch die Approximation

$$u_h(t_n) = u_h(t_{n-1}) + hf(u_h(t_{n-1}), t_{n-1})$$

Diese Methode ist einfach durchzuführen. Natürlich kann man keine übermäßig gute Approximation erwarten. Jedoch hat man den folgenden Satz, der zumindest noch theoretische Konvergenz vorhersagt. Man beachte, daß die Näherungslösung nicht für alle t im Existenzintervall definiert ist. Deshalb muß man nach Wahl einer Zahl t im Existenzintervall der Lösung sich auf Schrittweiten

$$h_n = (t - t_0)/n$$

beschränken.

Satz 2.2.1.1 Sei $u(t, t_0, u_0)$ Lösung eines Anfangswertproblems der Form (2.1), (2.3) mit einer Lipschitz stetigen Funktion $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.Es sei $u_{h_n}(t_k, t_0, u_0)$ der Wert den das Euler'sche Verfahren nach k Schritten liefert. Dann konvergiert $u_{h_n}(t_n, t_0, u_0)$ für $n \to \infty$, d.h.

$$u_{h_n}(t_n, t_0, u_0) \to_{n\to\infty} u(t, t_0, u_0).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, geben wir noch einen Hilfssatz an, der eine wichtige Abschätzung liefert.

Hilfssatz 2.2.1.2 Seien $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, $\alpha \geq 0$ und $\beta > 0$ mit

$$|\zeta_{n+1}| \leq \alpha + (1+\beta)|\zeta_n| \; n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.25}$$

Dann genügt die Folge $\{|\zeta_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Abschätzung

$$|\zeta_n| \leq e^{n\beta}|\zeta_0| + \alpha\frac{e^{n\beta} - 1}{\beta}. \tag{2.26}$$

<u>Beweis des Hilfssatzes 2.2.1.2:</u> Durch eine einfache Induktion erhält man die Aussage

$$|\zeta_n| \leq (1+\beta)^n|\zeta_0| + \alpha\frac{(1+\beta)^n - 1}{\beta}. \tag{2.27}$$

Für $n = 1$ is t dies genau die Voraussetzung (2.25). Angenommen die Gleichung (2.27) ist für n gültig. Dann folgt daraus, daß

$$|\zeta_{n+1}| \leq \alpha + (1+\beta)^{n+1}|\zeta_0| + \alpha(1+\beta)\frac{(1+\beta)^n - 1}{\beta}$$

und daher folgt

$$|\zeta_{n+1}| \leq (1+\beta)^{n+1}|\zeta_0| + \alpha\frac{(1+\beta)^{n+1} - (1+\beta) + \beta}{\beta}.$$

Dies ist (2.27) für $n+1$. Weil $(1+\beta)^n \leq e^{n\beta}$ ist (sogar für $\beta > -1$) folgt aus (2.27) die Aussage des Hilfssatzes. ∎

Beweis des Satzes 2.2.1.1: Sei $G = \{(u(s),s) \mid s \in [t_0,t] \text{ (oder } [t,t_0])\}$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß $t > t_0$ ist. Die Modifikationen für den anderen Fall sind nahezu offensichtlich. Sei U eine Umgebung von G mit kompaktem Abschluß $\overline{U}$, so daßfür f bezüglich der ersten Variablen auf U eine Lipschitz Konstante M_U existiert, d.h. eine Konstante mit der die Ungleichung (2.2) erfüllt ist. Wie schon zuvor setzen wir wie schon zuvor $M = \max\{1, M_U\}$, $N = \sup\{|f(u,s)| \mid (u,s) \in U\} + 1$ und $\Delta = \text{dist}(G, \partial U)$. Für $\varepsilon < \frac{\Delta}{2M}$ sei

$$G_\varepsilon = \{(u,t) \in U \mid \text{dist}((u,t),G) < \varepsilon\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $t_k = t_0 + kh_n$ und $(u_1,t_k) \in G_\varepsilon$ mit $|u_1 - u(t_k,t_0,u_0)| < \varepsilon$ berechnen wir die Distanz von $(u_1,t_k) + h_n(f(u_1,t_k),1)$ zu $u(t_{k+1},t_0,u_0)$. Sei $u^k = u(t_k,t_0,u_0)$. Damit ist $u^{k+1} = u(t_{k+1},t_0,u_0) = u(h_n,t_k,u^k)$. Es ergibt sich die Formel

$$u^{k+1} = u^k + \int_{t_k}^{t_k+h_n} f(u(s,t_k,u^k),s)ds = \int_0^{h_n} f(u(t_k+s,t_k,u^k),t_k+s)ds.$$

Für die Differenz erhält man daher

$$\begin{aligned}
|(u_1,t_k) + h_n(f(u_1,t_k),1) - (u^{k+1},t_{k+1})| &\leq |u_1 - u^k| \\
&\quad + \int_0^{h_n} |f(u_1,t_k) - f(u(t_k+s,t_k,u^k),t_k+s)|ds \\
&\leq |u_1 - u^k| + h_n|f(u_1,t_k) - f(u^k,t_k)| + h_n s(h_n) \\
&\leq (1+Mh_n)|u_1 - u^k| + h_n s(h_n),
\end{aligned}$$

wobei $s(.)$ ei ne Funktion ist, mit der Eigenschaft $s(h) \to 0$ für $h \to 0$.Die Existenz einer solchen Funktion erhält man einfach:

$$\begin{aligned}
\int_0^{h_n} |f(u_1,t_k) - f(u(t_k+s,t_k,u^k),t_k+s)|ds &\leq h_n|f(u_1,t_k) - f(u^k,t_k)| \\
+ \int_0^{h_n} |f(u^k,t_k) - f(u(t_k+s,t_k,u^k),t_k+s)|ds.&
\end{aligned}$$

Aus der Differenzierbarkeit von f folgt die Zwischenbehauptung. Ist nun u_1 der Punkt der durch k Schritte des Euler Verfahrens definiert wurde, so gilt für den Abstand $\zeta_k = |u_{h_n}(t_k,t_0,u_0) - u^k|$ eine Abschätzung der Form

$$\zeta_{k+1} \leq (1+Mh_n)|\zeta_k| + s(h_n)h_n.$$

Mit $\alpha = s(h_n)h_n$ und $\beta = Mh_n$ und dem Hilfssatz 2.2.1.2 schließt man, daß der Fehler nach k Schritten abzuschätzen ist durch

$$\zeta_k \leq e^{k\beta}\zeta_0 + \alpha\frac{e^{k\beta}-1}{\beta}. \tag{2.28}$$

Da $\zeta_0 = 0$ ist erhält man die Abschätzung

$$\zeta_k \leq \alpha\frac{e^{k\beta}-1}{\beta}.$$

Wir müssen noch zeigen, daß der Ausdruck rechts durch die Wahl von h_n für alle $k \leq n$ kleiner als ε wird. Dann ist der Satz bewiesen. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß der Ausdruck rechts mit h_n gegen null konvergiert:

$$\begin{aligned}
\zeta_k &\leq h_n s(h_n)\frac{e^{kMh_n}-1}{Mh_n} \\
&\leq s(h_n)\frac{e^{nMh_n}-1}{M} \\
&\leq s(h_n)\frac{e^{M(t-t_0)}}{M} \to_{h_n\to 0} 0.
\end{aligned}$$

□

In Worten besagt dieser Satz, daß man auf endlichen Zeitintervallen, durch Wahl einer genügend kleinen Schrittweite die Lösung mit dem Euler Verfahren approximieren kann. Leider kann man genötigt werden die Schrittweite sehr klein zu wählen, wobei man in der Praxis natürlich schnell an die Grenzen stößt. Wir werden dies in der Aufgabe 2.2.4.3 einsehen. Ein zweiter gewichtiger Nachteil ist, daß gewisse qualitative Phänomene nicht erkannt werden können. Wir werden dies an einem Beispiel sehen, vgl. Aufgabe 2.2.4.2. Man beachte, daß beim numerischen Rechnen noch zusätzlich Rundungsfehler auftreten.

2.2.2 Das implizite Euler Verfahren

Hier wird zumindest eines der beiden genannten Probleme vermieden. Natürlich kann man nicht erwarten, daß die Mängel bei der Beschreibung gewisser qualitativer Phänomene behoben werden. Hier bestimmt man die Näherungslösung nicht dadurch, daß man tangential um die Schrittweite h weitergeht, sondern, man bestimmt die $k+1$-Näherung aus der k-ten durch die *implizite Bedingung*

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_{k+1}, x_{k+1}).$$

Dies bedeutet, daß man in jedem Schritt ein Gleichungssysten lösen muß. Deswegen ist die praktische Durchführung mit einem wesentlich größeren Rechenaufwand verbunden. Hat man eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so lautet die Bedingung

$$y_{k+1} = y_k + hAy_{k+1}$$

und daraus erhält man

$$(\mathbb{1} - hA)y_{k+1} = y_k.$$

Ist die Schrittweite h genügend klein, so läßt sich die Matrix $\mathbb{1} - hA$ invertieren und die Iteration hat die Darstellung

$$y_{k+1} = (\mathbb{1} - hA)^{-1}y_k.$$

An dieser Darstellung erkennt man, daß dieses Verfahren, zumindest wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, das Verhalten der Lösungen zufriedenstellend wiedergibt. Ist nämlich y_0 Eigenvektor von A zum Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}\lambda < 0$ so lautet die Folge der y_k

$$y_k = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^k y_0.$$

Da der auftretende Bruch betragsmäßig kleiner als 1 ist, konvergiert die Folge der y_k gegen null, wie es auch die wahre Lösung tut.

2.2.3 Ober- und Unterlösungen

Oberlösungen bzw. Unterlösungen dienen dazu die wahre Lösung einzugrenzen und zumindest noch Abschätzungen machen zu können. Sie sind für eine qualitative Diskussion oft äußerst nützlich, wie wir an Beispielen sehen werden. Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung.

Lemma 2.2.3.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $I = [x_0, b), b \leq \infty$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen, die im Inneren von I differenzierbar sind. Ist $f(x_0) < g(x_0)$ so ist entweder

- $f(x) < g(x)$ für alle $x \in I$

oder

- es gibt eine Stelle $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = g(x_1)$ und $f'(x_1) \geq g'(x_1)$.

Beweis: Angenommen das Lemma wäre falsch. Seien f, g differenzierbare Funktionen für die die Aussage des Lemmas nicht gilt. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, daß $f < g$ auf dem Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Da wir annehmen, daß für f, g das Lemma nicht gilt, gibt es einen Punkt $y \in I$ mit $f(y) \geq g(y)$. Dann gibt es ein maximales Intervall $J \subset I$ mit $x_0 \in J$ und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in J$. Am rechten Endpunkt x_1 von J hat man, daß $f(x_1) = g(x_1)$ ist. Wäre nun $f(x_1) > g(x_1)$, so wäre $f - g$ auf einem Intervall $(x_1 - \delta, x_1)$ positiv, im Widerspruch zur Wahl von x_1. (Man führe dieses Argument aus!) □

Definition 2.2.3.2 Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = f(u, t), u(t_0) = u_0, \tag{2.29}$$

wobei f eine Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Eine Funktion $v : \mathbb{R} \to I$ heißt Oberlösung von (2.29), falls

- $v(t_0) \geq u_0$

und

- $\dot{v} > f(v, t)$.

Sind für eine Funktion w beide Ungleichungen gerade umgekehrt, so sprechen wir von einer Unterlösung.

Aufgrund unseres Lemmas 2.2.3.1 verlaufen Unterlösungen unterhalb und Oberlösungen oberhalb der wahren Lösung des Anfangswertproblems. Man erhält sie oft durch eine Veränderung von f, die eine explizite Lösung möglich macht. Wir diskutieren diese Möglichkeiten an einem Beispiel. Beispiel: Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{u} = u^2 + t^2 = f(u, t)$, $u(0) = 1$. Durch die Veränderung der rechten Seite f zu $g(u, t) = u^2$ erhält man das Anfangswertproblem $\dot{v} = v^2$ und $v(0) = 1$. Aufgrund des Lemmas ist v eine Unterlösung. Eine einfache Rechnung lehrt, daß $v(t, 0, 1)$ die Form

$$v(t, 0, 1) = \frac{1}{1 - t}.$$

Das maximale Existenzintervall von v ist $(-\infty, 1)$ und daher kann auch die Lösung $u(t,0,1)$ höchstens bis zum Punkt $t = 1$ existieren. Bis dort gilt aber $t \leq 1$, also kann man abschätzen $f(u,t) \leq u^2 + 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{w} = 1 + w^2$, $w(0) = 1$ ist daher eine Oberlösung des Ausgangsproblems. $w(t,0,1)$ hat die Form

$$w(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Also haben wir auf dem Existenzintervall von w und für $t \geq 0$

$$v(t,0,1) < u(t,0,1) < w(t,0,1).$$

Die Lösung w existiert bis $t^* = \frac{\pi}{4}$. Insbesondere ist auch $[0, \frac{\pi}{4})$ im maximalen Existenzintervall von u enthalten. Ein weiteres Beispiel wollen wir in den Übungen untersuchen.

2.2.4 Aufgaben

Aufgabe 2.2.4.1 Man schreibe die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_2 \\ \dot{u}_2 &= u_1 \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten und löse die Gleichung.

Aufgabe 2.2.4.2 Man schreibe ein Programm (in BASIC, PASCAL oder ALGOL) das die Gleichung aus Aufgabe 2.2.4.1 für einen oder mehrere Anfangswerte $u_0 \neq 0$ nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren löst. Man wähle verschiedene Schrittweiten und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 2.2.4.3 Man schreibe ein Programm (in BASIC, PASCAL oder ALGOL) das die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_1 \\ \dot{u}_2 &= -au_2 \end{aligned}$$

für die Werte $a = 1, 10, 100, 1000$ und $h = 10^{-2}$ für Anfangswerte auf der Winkelhalbierenden nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren löst. Wie sehen die exakten Lösungen aus? wie sieht dies beim impliziten Euler Verfahren aus?

Aufgabe 2.2.4.4 Man untersuche die logistische Gleichung mit dem Euler'schen Polygonzugverfahren.

Aufgabe 2.2.4.5 (a) Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossene Untergruppe* von $\mathbb{R}$, wenn G eine abgeschlossene Teilmenge und gleichzeitig, bezüglich der Addition, eine Untergruppe ist. Man beschreibe alle abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{R}$.

(b) Gegeben sei eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Eine Zahl $T \in \mathbb{R}$ heißt Periode von x, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $x(t+T) = x(t)$. Man zeige, die Menge

$$P_x = \{T \in \mathbb{R} \,|\, T \text{ ist Periode von } x\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$.

(c) Man zeige, gibt es für die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ des autonomen Anfangswertproblems

$$\dot{u} = f(u), \ u(t_0) = u_0$$

zwei verschiedene Zeitpunkte t_1, t_2 mit $u(t_1, t_0, u_0) = u(t_2, t_0, u_0)$, so existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist periodisch, d.h. es existiert eine Zahl $T > 0$ mit $u(t + T, t_0, u_0) = u(t, t_0, u_0)$.

2.3 Übertragung auf Mannigfaltigkeiten

2.3.1 Koordinatenwechsel

Anhand einer Übungsaufgabe hatten wir schon eine Koordinatentransformation in dem Spezialfall von Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ gesehen. Wir wollen Koordinatenwechsel, als ersten Schritt um die bisherigen Sätze vom $\mathbb{R}^n$ auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen, etwas genauer untersuchen. Dabei beschränken wir uns auf autonome Gleichungen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung. Mit $u(t, u_0)$ bezeichnen wir die Lösung des Anfanfgswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u) \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Man beachte, daß in diesem Fall die Einschränkung auf die Anfangszeit $t_0 = 0$ keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt, denn im autonomen Fall läßt sich die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ aus $u(t, u_0)$ durch eine Translation gewinnen, d.h. $u(t, t_0, u_0) = u(t - t_0, u_0)$. Man prüfe diese Aussage nach.

Sei $\Psi : U \to W$ ein *Diffeomorphismus*, also eine bijektive, differenzierbare Abbildung, deren Jordan Matrix nirgends singulär ist. (Daher ist auch Ψ^{-1} differenzierbar.) Wir betrachten nun die Komposition

$$v(t, \Psi(u_0)) = \Psi \circ u(t, u_0) \tag{2.31}$$

und fragen uns, ob es ein Anfangswertproblem gibt, so daß v dessen Lösung ist. Sei $D\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ die Ableitung von Ψ. Differenzieren ergibt

$$\dot{v}(t, \Psi(u_0)) = D\Psi(u(t, u_0)) f(u(t, u_0))$$

und natürlich ist $v(0, v_0) = \Psi \circ u(0, u_0) = \Psi(u_0)$und daher $v_0 = \Psi(u_0)$. Zusammengenommen ergibt sich, daß v eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{v} &= D\Psi(\Psi^{-1}v) f(\Psi^{-1}v) \\ v(0) &= \Psi(u_0). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ist an drerseits v eine Lösung von (2.32) und u eine von (2.30), so ist $v = \Psi \circ u$, wegen der Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems. Wir fassen diese Überlegungen als Satz zusammen.

Satz 2.3.1.1 Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, $\Psi : U \to W$ ein Diffeomorphismus. Dann ist v genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (2.32), wenn u eine Lösung des Problems (2.30) ist und $v = \Psi \circ u$ gilt.

Beweis: Siehe oben. □

Für den Spezialfall, daß Ψ eine lineare Abbildung $\Psi(u) = Cu$ ist, ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Cf(C^{-1}v) \\ v_0 &= Cu_0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ist zusätzlich a uch noch f linear, also $f(u) = Au$, so wird aus der Gleichung$\dot{u} = Au$ die Gleichung $\dot{v} = CAC^{-1}v$. Wir werden in Kürze sehen, daß dies eine Diskussion der Lösung von Anfangswertproblemen für lineare Gleichungen sehr erleichtert.

2.3.2 Existenz

Satz 2.3.2.1 Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $v : M \to TM$ ein C^1 Vektorfeld. Dann gibt es zu jedem $m_0 \in M$ ein Intervall $I_\delta = (-\delta, \delta)$ und eine Kurve $\gamma : I_\delta \to M$ mit $\gamma(0) = m_0$ und $\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t))$.

Beweis: Sei $n = \dim M$.Wir betrachten eine Kartenumgebung (τ_{m_0}, U) vom $m_0 \in M$ und eine Kartenumgebung von $m_0, v(m_0)$ im Tangentialbündel TM von M, welche durch $(\tau_{m_0,v}, U \times \mathbb{R}^n)$ gegeben ist. Wir definieren eine Abbildung$\tilde{f} : \tau_{m_0}(U) \to \tau_{m_0}(U) \times \mathbb{R}^n$ durch

$$u \mapsto \tau_{m_0,v}\left(\tau_{m_0}^{-1}(u), v\left(\tau_{m_0}^{-1}(u)\right)\right). \tag{2.34}$$

Da v als eine C^1-Abbildung vorausgesetzt war, ist diese Komposition auch C^1. (Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten sind genau dann glatt, wenn die durch Karten gewonnenen Abbildungen zwischen euklidischen Räumen glatt sind.) Wir betrachten die erste Komponente der durch (2.34) gewonnenen Abbildung. Dies ist die erste Komponente von

$$\tau_{m_0,v}(\tau_{m_0}^{-1}(u), v(\tau_{m_0}^{-1}(u)).$$

Diese ist gegben durch

$$\tau_{m_0}\tau_{m_0}^{-1}(u) = u.$$

Sei $\Pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Pr ojektion auf die zweite Komponente. Dann wird durch

$$f(u) = \Pi_2 \circ \tilde{f}(u)$$

ein C^1-Vektorfeld auf $\tau_{m_0}(U)$ definiert. Dann existiert eine (nach Satz 2.1.1.2) eindeutige Lösung $u(t, u_0)$, $u_0 = \tau_{m_0}(m_0)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = f(u), \; u(0) = \tau_{m_0}(m_0) \tag{2.35}$$

auf einem Intervall der Form $(-\delta, \delta)$ mit e iner positiven Zahl δ. Setzt man $\gamma(t) = \tau_{m_0}^{-1}u(t, u_0)$, so erhält man eine Kurve auf M durch m_0. Wir müssen nun zeigen, daß für $t \in (-\delta, \delta)$ gilt

$$\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t)).$$

Dazu wählen wir ein $t \in (-\delta, \delta)$ aus. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve durch $\gamma(t)$, welche dort den Vektor $v(\gamma(t))$ repräsentiert, also $\varphi : \mathbb{R} \to M$ mit $\varphi(0) = \gamma(t)$ und $v(\gamma(t)) = [\varphi]$. Dann ist zu zeigen, daß $\varphi \sim_0 \gamma(t + .)$, wobei $\gamma(t + .)$ für die Kurve durch $\gamma(t)$ steht, die man durch

Neuparametrisierung von γ enthält. Sei (σ, V) eine Koordinatenumgebung von $\gamma(t)$. Zu zeigen ist also

$$\frac{d}{ds}(\sigma \circ \varphi)(s)_{|s=0} = \frac{d}{ds}(\sigma \circ \gamma)(t+s)_{|s=0}.$$

Nach Konstruktion ist aber $\gamma(t)$ im Durchschnitt von U und V. Es ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\sigma \circ \varphi)(s)_{|s=0} &= \frac{d}{ds}(\sigma \circ \tau^{-1})(\tau \circ \sigma)(s)_{|s=0} \\
&= D_{u_{|\gamma(t)}}(\sigma \circ \tau^{-1})(\tau \circ \varphi)'(s)_{|s=0} \\
&= D_{u_{|\gamma(t)}}(\sigma \circ \tau^{-1}) \\
&= D_{u_{|\gamma(t)}} \Pi_2 \tau_{m_0,v}(\gamma(t), v(\gamma(t))).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Andrerseits gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\sigma \circ \gamma(t+s) &= D_{u|_{\gamma(t)}}(\sigma \circ \tau^{-1})\frac{d}{ds}(\tau \circ \gamma)(t+s) \\
&= D_{u|_{\gamma(t)}}(\sigma \circ \tau^{-1})\frac{d}{ds}u(t+s, u_0) \\
&= D_{u|_{\gamma(t)}}(\sigma \circ \tau^{-1})f(u(\tau \circ \gamma(t))).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Wegen der Konstruktion von f sind die Ausdrücke in (2.36) und (2.37) gleich. □

Definition 2.3.2.2 Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit M und ein Vektorfeld $v : M \to TM$. Die Aufgabe zu einem Punkt $m_0 \in M$ ein Intervall $I_\delta = (-\delta, \delta)$ und eine Kurve $\gamma : I_\delta \to M$ zu finden, welche der Bedingung$\gamma(0) = m_0$ und $\dot\gamma(t) = v(\gamma(t))$ genügt, nennen wir ein Anfangswertproblem auf M. Die Lösung wollen wir mit $\gamma(t, m_0)$ bezeichnen.

Satz 2.3.2.3 Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $v : M \to TM$ ein C^1-Vektorfeld. Dann existiert die Lösung des Anfangswertproblems aus Definition 2.3.2.2 für alle $t \in \mathbb{R}$.

underbarBeweis: Folgt sofort aus dem Beweis des Lemmas 2.1.2.2. □

Satz 2.3.2.4 Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, $k \geq 2$, $v : \mathbb{M} \times \mathbb{R} \to TM$ sei ein zeitabhängiges Vektorfeld der Klasse C^1. Dann existiert zu jedem Paar (m_0, t_0) eine Lösung $\gamma(t, t_0, m_0)$ des Anfangswertproblems $\dot\gamma = v(\gamma, t)$, $\gamma(t_0, t_0, m_0) = m_0$, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

<u>Beweis:</u> Selbst einfügen!

□

2.3.3 Abhängigkeit von Daten

In diesem Abschnitt wollen wir die entprechenden Sätze aus der Theorie im $\mathbb{R}^n$ übertragen. Wiederum streben wir nicht die größtmögliche Allgemeinheit an.

Satz 2.3.3.1 Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit, $k \geq 2$ und $v : M \to TM$ ein C^1-Vektorfeld. Dann ist die Lösung $\gamma(t, m_0)$ des Anfangswertproblems (2.3.2.2) in beiden Variablen stetig.

Beweis: Folgt aus dem entsprechenden Satz im $\mathbb{R}^n$, indem man die Kurve $\gamma(t, m_0)$ durch endlich viele Koordinatenumgebungen überdeckt. In jeder dieser Umgebungen kann man den Satz 2.1.3.3 anwenden. $\square$

Bemerkung: Entsprechend beweist man auch stetige Abhängigkeit von Parametern. Wir formulieren noch den Satz bezüglich der Differenzierbarkeit nach dem Anfangswert.

Satz 2.3.3.2 Sei M wie im Satz 2.3.3.1 und $v : M \to TM$ ein Vektorfeld der Klasse C^2. Dann ist die Lösung $\gamma(t, m_0)$ nach dem Anfangswert differenzierbar.

Beweis: Entsprechend dem Beweis des Satzes 2.1.3.8. $\square$

2.3.4 Aufgaben

Aufgabe 2.3.4.1 Man vervollständige den Beweis von Satz 2.3.2.3

Aufgabe 2.3.4.2 Sei S^n die n-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$. Man zeige, daß für jedes ungerade n Vektorfelder auf S^n existieren, welche keine Nullstellen haben.

Aufgabe 2.3.4.3 Man beweise Satz 2.3.2.4.

Aufgabe 2.3.4.4 (a) Wir betrachten eine Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= f_1(u_1, u_2) \\ \dot{u}_2 &= f_2(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Man gebe eine Bedingung an, wenn man die Spur einer Lösung $(u_1(t), u_2(t))$ als Graph einer Abbildung $u_2 = g(u_1)$ schreiben kann. Ist h Lösung einer Differentialgleichung, wenn ja welcher?
(b) Man untersuche die Spezialfälle $f_i(u_1, u_2) = u_i$, $i = 1, 2$ und $f_1(u_1, u_2) = -u_2, f_1(u_1, u_2) = u_1$.

Aufgabe 2.3.4.5 Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{u} = f(u, t), u(t_0) = u_0$, wobei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der ersten Komponente Lipschitz stetig sei. Wir nehmen an, daß es sowohl eine Unterlösung v und eine Oberlösung w dieses Anfangswertproblems gibt, welche auf ganz $[t_0, \infty)$ definiert sind. Man zeige, daß die Lösung $u(t, t_0$ des Anfangswertproblems auf $[t_0, \infty)$ definiert ist.

Kapitel 3

Anfänge einer geometrischen Theorie

3.1 Lineare Differentialgleichungen

3.1.1 Jordan'sche Normalform

In diesem ku rzen Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe der linearen Algebra. Sei $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix A (diese wird durch die Wahl einer Basis bestimmt). Wir gehen immer von der kanonischen Basis aus und identifizieren auf diese Weise die lineare Abbildung mit der Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $u_c \in \mathbb{C}^n$ gibt mit

$$Au_c = \lambda u_c.$$

Dieser Vektor u_c wird *Eigenvektor* genannt.Natürlich müssen wir auch bei ree llen Matrizen komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren zulassen. Deshalb arbeiten wir zunächst im komplexifizierten Raum. Die Eigenwerte sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0. \tag{3.1}$$

Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es (mit Vielfachheiten gerechnet) genau n Wurzeln dieser Gleichung. Jede Wurzel von (3.1) ist auch Eigenwert, jedoch gibt es im allgemeinen weniger als n Eigenvektoren. Sei λ ein Eigenwert, so ist

$$K_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

ein A-invarianter Unterraum, der *Eigenraum* von A zum Eigen wert λ. Sei m die Dimension von K_λ. K_λ ist enthalten im *verallgemeinerten Eigenraum* , der gegeben ist durch

$$E_\lambda = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k u = 0\}.$$

Der verallgemeinerte Eigenraum E_λ zum Eigenwert λ ist invariant unter der Abbildung A. Eine weitere Zerlegung in invariante Unterräume ist möglich. Dazu betrachtet man den minimalen Wert k_0, so daßker$(A - \lambda \mathbb{1})^{k_0} = E_\lambda$ ist. So eine Zahl existiert immer. In E_λ existiert eine Basis B, welches die Vereinigung von m Mengen $H_1, \dots, H_m$ ist, wobei jedes H_k die Form

$$H_k = \{u_{k,1}, \dots, u_{k,r_k}\}$$

hat mit

$$(A-\lambda\mathbb{1})u_{k,i+1}=u_{k,i},\ i=1,\dots,r_k,\ (A-\lambda\mathbb{1})u_{k,1}=0.$$

Die Einschränkung von A auf E_λ hat in der Basis B dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{B}_m \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

wobei jeder dieser $r_k \times r_k$ Blocks $\mathcal{B}_k$ die einfache Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

hat. Damit haben wir die komplexe Jordan'sche Normalform einer Matrix erhalten. In der reellen Jordan'schen Normalform hat man auch eine Darstellung in Blöcken wie in (3.2), jedoch sehen die i.a. Blocks anders aus. Ist λ reell so bleibt die Form (3.3) erhalten. Für komplexe Eigenwerte $\lambda = e^{i\alpha}$, ergibt sich statt (3.3) die Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

3.1.2 Die Exponentialabbildung

Definition 3.1.2.1 Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\|A\| = \sup\{|Au| \mid u \in \mathbb{R}^n,\ |u| = 1$ *big*$\}$.

Lemma 3.1.2.2 $\|.\|$ ist eine Norm auf dem linearen Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in sich. Außerdem gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Beweis: Einfaches Nachrechnen! □

Definition 3.1.2.3 Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei definiert durch

$$E(A,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \tag{3.5}$$

Wir nennen $E(A,t)$ die *Matrixexponentialfunktion* und schreiben dafür auch manchmal

$$E(A,t) = e^{At}.$$

Lemma 3.1.2.4 Die Funktion $E(A,t)$ ist für jedes $A \in \mathcal{L}(R^n, \mathbb{R}^n)$ und jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ definiert.

<u>Beweis:</u> Übungsaufgabe! $\square$

Satz 3.1.2.5 Die Matrixexponentialfunktion $E(A,t)$ löst das Anfangswertproblem (2.18)

$$\dot{C} = AC,$$

aus Hilfssatz 2.1.3.6.

<u>Beweis:</u> Zunächst betrachten wir eine Teilsumme der Reihe $E(A,t)$

$$E_m(A,t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Ableitung von $E_m(A,t)$ ist natürlich

$$\dot{E}_m(A,t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = AE_{m-1}(A,t).$$

Wegen der gleich mäßigen Konvergenz der rechten Seite (auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$) ist $E(A,t)$ differenzierbar und $\dot{E}(A,t) = AE(A,t)$. Natürlich ist auch $E(A,0) = \mathbb{1}$. $\square$

Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = Au$, $u(0) = u_0$ erhält man also durch $u(t,u_0) = E(A,t)u_0$.

Hilfssatz 3.1.2.6 *Kommutieren* die beiden Matrizen A, B *miteinander*, d.h. ist $AB = BA$, so gilt

$$E(A+B,t) = E(A,t)E(B,t) = E(B,t)E(A,t) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

<u>Beweis:</u> Nachrechnen! $\square$

A kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Jordan'sche Normalform gebracht werden. Sei J die Jordan'sche Normalform von A und C die Transformationsmatrix, also $J = CAC^{-1}$. Aus Abschnitt 2.3.1 folgt, daß die Lösungen von $\dot{u} = Au$ und $\dot{v} = Jv$ durch $v = Cu$ ineinander übergehen. Also können wir die Lösung des Ausgangsproblems gewinnen, indem wir A in die Jordan'sche Normalform überführen, für diese dann die Gleichung lösen und zurücktransformieren. Wir erhalten

$$u(t,u_0) = E(A,t)u_0 = C^{-1}v(t,Cu_0) = C^{-1}E(J,t)Cu_0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt noch

$$E(A,t) = C^{-1}E(CAC^{-1},t)C.$$

Natürlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus der Definition von $E(A,t)$ schließen.Zur allgemeinen Lösung linearer Anfangswertprobleme müssen wir noch $E(J,t)$ ausrechnen. Wir gehen von der Gestalt (3.2) aus. Natürlich gilt für eine Matrix J in Blockdiagonalgestalt

$$J = \operatorname{diag}(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_m)),$$

daß die Matrixexponentialfunktion auch Blockdiagonalgestalt annimmt, al so

$$E(J,t) = \operatorname{diag}(E(\mathcal{B}_1,t),\ldots,E(\mathcal{B}_m,t)).$$

Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge 1, also $\mathcal{B} = (\lambda)$, so ist natürlich $E(\mathcal{B},t) = e^{\lambda t}$.Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge $r > 1$ und der zugehörige Eigenwert λ reell, so ergibt sich die Exponentialreihe aus folgenden Betrachtungen.

Definition 3.1.2.7 Eine Matrix N heißt *nilpotent*, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^r = 0$.

Lemma 3.1.2.8 Ein Block der Gestalt (3.3) ist die Summe einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N.

Beweis: Natürlich ist $D = \operatorname{diag}(\lambda,\ldots,\lambda)$. Übrig bleibt die $r \times r$ Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $N^r = 0$ ist. Damit ist N nilpotent. □

Bemerkung: Genauer gilt, daß jede Matrix A Summe einer diagonalisierbaren und einer nilpotenten Matrix ist. Unser Beweis zeigt dies zumindest für reelle Matrizen mit ausschließlich reellen Eigenwerten.

Lemma 3.1.2.9 Die Matrixexponentialfunktion $E(\mathcal{B},t)$ eines J ordan Blocks der Länge r zum Eigenwert λ hat die Gestalt

$$E(\mathcal{B},t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \lambda & t & t^2/2 & t^3/6 & \ldots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & \lambda & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t^3/6 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & t \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Beweis: Es gilt $DN = ND$ und daher mit dem Hilfssatz

$$E(\mathcal{B}, t) = E(D + N, t) = E(D, t)E(N, t).$$

Nun ergibt $E(D, t) = e^{\lambda t}\mathbb{1}$ und da N nilpotent ist, hat man

$$E(N, t) = \mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

□

Für einen nichtreellen Eigenwert stellt man die gleiche Betrachtung im Komplexen an und schneidet den Lösungsraum mit dem $\mathbb{R}^n$. Wir wollen die entsprechende Formel im Moment nicht angeben.
Den Lösungsraum linearer autonomer Gleichungen kann man einfach charakterisieren. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes, der im weiteren noch verallgemeinert wird.

Satz 3.1.2.10 [Algebraische Struktur des Lösungsraumes I] Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.Wir setzen $U = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au\}$. U ist ein linearer Raum. Die Dimension von U ist n.

Beweis: Offensichtlich ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung. Gleiches gilt für das Produkt ξu mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $u \in U$. Also bleibt zu zeigen, daß $\dim U = n$. Sei $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\mathcal{A}u = u(0)$. Offensichtlich ist A linear und injektiv. Wegen des globalen Existenzsatzes ist $\mathcal{A}$ surjektiv. Also gilt $U \simeq \mathbb{R}^n$. □

Als nächsten Schritt betrachten wir die *inhomogene lineare Gleichung*, gegeben durch

$$\dot{u} = Au + f(t), \tag{3.8}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist. Wir wissen, aufgrund des Existenzsatzes, daß diese Gleichung bei Vorgabe eines Anfangswertes lösbar ist. Die algebraische Struktur ist natürlich etwas anders als vorher. Wie in der linearen Algebra besteht die allgemeine Lösung aus einer speziellen Lösung plus einem beliebigen Element aus U.

Satz 3.1.2.11 [Algebraische Struktur des Lösungsraumes II] Sei

$$U_f = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au + f(t)\}.$$

U_f ist ein n dimensionaler *affiner Unterraum* von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Es existiert also ein $u^0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß

$$U_f = \{u^0 + u \mid u \in U\}.$$

underbar Beweis: Wie schon bemerkt hat die Gleichung (3.8) immer eine Lösung. Sei u^0 eine solche Lösung. Dann ist natürlich für $u \in U$ auch $u^0 + u$ eine Lösung. Wir müssen noch zeigen, daß jede Lösung diese Form hat. Sei u^1 eine weitere Lösung der Gleichung (3.8). Dann ist $u^0 - u^1$ eine Lösung der homogenen linearen Gleichung (einfaches Nachprüfen zeigt dies). Damit ist $u^0 - u^1 \in U$. □

Wir wollen uns noch kurz Gedanken machen, wie man eine spezielle Lösung u^0 findet.

Lemma 3.1.2.12 [Formel der Variation der Konstanten] Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist eine spezielle Lösung der Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ gegeben durch

$$u^0(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \tag{3.9}$$

Beweis: Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + [e^{A(t-s)}f(s)]_{|s=t} + \int_0^t \frac{d}{dt}e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

also

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + f(t) + A\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds = Au + f(t).$$

□

3.1.3 Die nichtautonome lineare Gleichung

In diesem Abschnitt widmen wir uns den Gleichungen

$$\dot{u} = A(t)u \tag{3.10}$$

und

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{3.11}$$

wobei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Natürlich kann man hier nicht erwarten, daß die Konstruktion der Matrixexponentialfunktion zum Ziel führt.

Lemma 3.1.3.1 Das Anfangswertproblem

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \ \Phi(t_0) = \mathbb{1} \tag{3.12}$$

hat für eine stetige Abbildung $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in I$ eine eindeutige Lösung

$$\Phi = \Phi(t, t_0) : I \times I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Beweis: Die Existenz folgt aus den Existenzsätzen (2.1.1.2) und (2.1.2.3). □

Definition 3.1.3.2 Die Abbildung $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : (t, t_0) \mapsto \Phi(t, t_0)$ heißt *Übergangsmatrix.*

Man überlege sich eine anschauliche Begründung für die Terminologie.

Satz 3.1.3.3 [Eigenschaften der Übergangsmatrix] Die Übergangsmatrix $\Phi(t, t_0)$ ist für jedes Paar $(t, t_0) \in I^2$ definiert und hat die Eigenschaften

- $\Phi(t, t) = \mathbb{1}$;
- $\Phi(t, s)\Phi(s, t_0) = \Phi(t, t_0) \ \forall (t, s, t_0) \in I^3$;

- $\Phi(t,t_0)^{-1} = \Phi(t_0,t)$.

Beweis: Die erste Eigenschaft ist nach Definition gegeben. Für die zweite Aussage betrachtet man die matrixwertige Funktion $\Psi(t) = \Phi(t,s)\Phi(s,t_0)$. Sie genügt der Differentialgleichung

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t)$$

mit dem Anfangswert $\Psi(s) = \mathbb{1}\Phi(s,t_0)$. Offenbar ist $\Phi(.,t_0)$ eine Lösung derselben Differentialgleichung und für $t = s$ hat man den Wert $\Phi(s,t_0)$. Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems liefert die Gleichheit der linken und der rechten Seite. Die dritte Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der zweiten. □

Wie zuvor sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Wir setzen für eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$

$$U_f = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = A(t)u + f\}.$$

Sei $U = U_0$. Wir notieren einige einfache Aussagen.

Lemma 3.1.3.4
1. $u_1 \in U_f,\ u_2 \in U_g \Rightarrow u_1 + u_2 \in U_{f+g}$ [Superpositionsprinzip];
2. $\dim U_0 = n$;
3. Sei $u_0 \in U_f$ fest. Dann ist $U_f = \{u_0 + u | u \in U\}$. [Algebraische Struktur des Lösungsraumes III];
4. Jedes $u \in U$ hat die Darstellung $u(t,t_0,u_0) = \Phi(t,t_0)u_0$.

Beweis: Die erste und die dritte Aussage sind trivial. Für die zweite fixieren wir einen Zeitpunkt $t_0 \in I$ und zeigen wie zuvor, daß die Abbildung $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n : u \mapsto u(t_0)$ ein Isomorphismus ist. Die letze Aussage folgt wieder aus der Eindeutigkeit: sei u Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = Au,\ \ u(t_0,t_0,u_0) = u_0.$$

Dann ergibt sich für $v(t) = \Phi(t,t_0)u_0$

$$\dot{v} = \dot{\Phi}(t,t_0)u_0 = A\Phi(t,t_0)u_0 = Av,\ \ v(t_0) = \Phi(t_0,t_0)u_0 = u_0.$$

Also ist $u = v$. □

Wie zuvor erhält man aus der Formel der Variation der Konstanten die Darstellung der Lösung der inhomogenen Gleichung.

Satz 3.1.3.5 [Variation der Konstanten] Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ seien stetig, $t_0 \in I$. Sei $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die zugehörige Übergangsmatrix. Dann hat die Lösung $u(t,t_0,u_0)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u + f(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

die Lösung

$$u(t,t_0,u_0) = \Phi(t,t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)f(s)ds.$$

Beweis: Sei

$$v(t) = \Phi(t,t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)f(s)ds.$$

Dann ist $v(t_0) = \mathbb{1}u_0 = u_0$ und

$$\dot{v} = A(t)\Phi(t,t_0)u_0 + f(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\Phi(t,s)f(s)ds = Av + f.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung bringt das gewünschte Resultat.

3.1.4 Ebene lineare Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir ebene, lineare und autonome S ysteme charakterisieren. Wir betrachten also eine Gleichung der Form

$$\dot{u} = Au, \tag{3.14}$$

wobei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ eine lineare Abbildung ist. Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Wir unterscheiden:

1. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0;$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0;$
3. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 > 0;$
4. $\lambda_1 > \lambda_2 = 0;$
5. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0;$
6. $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = 0,\ \lambda_i \neq 0;$
7. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2;$
8. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0;$
9. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0;$
10. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 < 0;$
11. $\lambda_1 < \lambda_2 = 0.$

1. Fall: Dabei hat die Jordan Normalform die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Seien e_1, e_2 die Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2}$. Dann konvergieren alle Lösungen für $t \to -\infty$ gegen null, für $t \to \infty$ verlassen alle Lösungen (außer einer!) jedes Kompaktum. Sie schmiegen sich (für $t \to -\infty$) an die e_2-Achse an.

2. Fall: Wir unterscheiden zwei mögliche Formen des Jordan Blocks (Eigenwerte sind geometrisch einfach oder nicht). Zunächst der Fall der geometrisch einfachen Eigenwerte. Hier hat der entsprechende Jordanblock die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Alle Lösungen haben dieselben Konvergenzeigenschaften wie zuvor. Nur ist die Bewegung längs gerader Linien.
Ist der Eigenwert nicht geometrisch einfach, so hat der Jordanblock die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Auch hier hat man die Konvergenzeigenschaften wie im ersten Fall, jedoch schaut das Bild wiederum anders aus.
3. Fall: Wieder ergibt sich die gleiche Konvergenz, jedoch erhält man einen Strudel. Sei $\lambda_1 = |\lambda| e^{i\theta}|$. Dann ist $\lambda_2 = |\lambda| e^{-i\theta}$ und die reelle Normalform hat die Form

$$J = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

4. Fall: Für die Jordan Form ergibt sich

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Längs der e_2 Achse hat man konstante Lösungen (*Ruhelagen*). Alle anderen Lösungen konvergieren für $t \to -\infty$ gegen 0 und verlassen in positiver Zeitrichtung jedes Kompaktum.
5. Fall: In diesem Fall hat die Jordan Form das Aussehen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

der erste dieser beiden Fälle liefert ausschließlich konstante Lösungen. Im zweiten hat man eine Bewegung auf Parallelen zur e_1 Achse gegen unendlich.
6. Fall: Unsere Abbildung erhält die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Wir erhalten Lösungen, die sich auf Kreislinien um den Ursprung bewegen.
7. Fall: Ein qualitativ neues Bild ergibt sich hier. Auf der einen Achse bewegt man sich für $t \to \infty$ gegen unendlich und für $t \to -\infty$ gegen null, auf der anderen Achse hat man das gegenteilige Verhalten. Dazwischen sind Lösungen, die für beide Zeitrichtungen jedes Kompaktum verlassen und sich für $t \to \pm\infty$ an die jeweilige Eigenwertachse anschmiegen. (Dies ist die Motivation für

den Begriff *hyperbolisch* den wir noch einführen werden.)
In den anderen Fällen ergeben sich ganz ähnliche Bilder wie bisher, nur die Zeitrichtungen sind anders. wir geben nur die Normalformen und die Bilder, keine weiteren Kommentare.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

8. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

9. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

10. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

11. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

3.1.5 Eigenwerte und Langzeitverhalten

Die Betrachtungen im vorstehenden Abschnitt legen es nahe zu vermuten, daß die Eigenwerte und das Langzeitverhalten für lineare, autonome Systeme eng gekoppelt sind. Wir wollen dieses bestätigen.

Satz 3.1.5.1 [Spektrum und Stabilität I] Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au.$$

Mit $\sigma(A)$ bezeichnen wir das Spektrum von A, d.h. $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A. Dann hat man folgendes Verhalten.
Haben alle Eigenwerte negativen Realteil, so ist 0 die einzige beschränkte Lösung und alle anderen konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0. Für $t \to -\infty$ hat man Konvergenz gegen unendlich.
Gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil, so gibt es eine Lösung, die für $t \to -\infty$ gegen 0 konvergiert, und für $t \to \infty$ jedes Kompaktum verläßt.
Gibt es einen Eigenwert mit Realteil 0, so existiert zumindest eine Lösung $u(t, u_0)$, $u_0 \neq 0$, welche für alle Zeiten beschränkt ist.

Beweis: Angenommen u_0 ist Anfangswert einer beschränkten Lösung $u(t,u_0)$. Jede Lösung der linearen Gleichung hat wegen der Bemerkung nach Satz 3.1.2.5 die Darstellung $u(t,u_0) = E(A,t)u_0$. Sei C die Matrix, die A in die komplexe Jordan Normalform J transformiert, $v_0 = Cu_0$ ist dann der Anfangswert für eine beschränkte Lösung $v(t) = E(J,t)v_0$. Sei $v_0 = (v_0^1, \ldots, v_0^n)$. Ist $u_0 \neq 0$, so ist $v_0 \neq 0$ und es gibt ein $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ mit $v_0^\mu \neq 0$ und für $m \in \{\mu+1, \ldots, n\}$ ist $v_0^m = 0$. Sei λ der Eigenwert zum μ-ten Eigenvektor in der Basis zur Jordan Form. So ist die μ-te Komponente von $E(J,t)v_0$ gegeben durch $e^{\lambda t}v_0^\mu$. Dann ist $|e^{\lambda t}v_0| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|v_0^\mu|$. Für $t \to -\infty$ ist dies unbeschränkt. Um die Konvergenz zu zeigen, betrachten wir $\nu = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) | \ \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\nu < 0$ und $E(J,t) = e^{\nu/2\, t}F(t)$. Dabei ist F eine matrixwertige Funktion. Jedes $F(t)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, mit Einträgen $e^{\rho t}p(t)$, wobei p ein Polynom ist und $\mathrm{Re}(\rho) < 0$. Dann ist $\|F(t)\|$ beschränkt und $\|E(J,t)\| \to 0$ für $t \to \infty$. Damit konvergiert auch

$$\|E(A,t)\| = \|C^{-1}E(J,t)C\| \leq \|C\|\|E(J,t)\|\|C\|$$

für $t \to \infty$ gegen null.
Die zweite Aussage beweist man ebenso wie Unbeschränktheit für $u(t,u_0)$ für $t \to -\infty$ im ersten Fall. Man betrachtet hier einfach einen Anfangswert im verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert mit positivem Realteil.
Die dritte Aussage, erhält man, indem man einen Eigenvektor als Anfangswert im Eigenraum des Eigenwertes λ mit verschwindendem Realteil betrachtet. Hier unterscheidet man zwei Fälle,
(a) $\lambda = 0$
(b) $\lambda \neq 0$.
Der erste dieser Fälle ist einfach. Ist u_0 im Kern von A, so ist natürlich $E(A,t)u_0 = u_0$ für alle t und damit ist die Lösung $u(t,u_0) = u_0$ eine konstante, und damit beschränkte Lösung.
Im zweiten Fall hat man im Komplexen einen Anfangswert u_0^c, so daß $E(A,t)u_0^c = e^{\lambda t}u_0^c$ ist, also gilt $|E(A,t)u_0^c| = |e^{\lambda t}||u_0^c| = |u_0^c|$. Wir setzen $u_0 = u_0^c + \overline{u_0^c}$. Dies ist ein reeller Vektor. Es gilt $E(A,t)u_0 = e^{\lambda t}u_0^c + e^{-\lambda t}\overline{u_0^c}$. Da $\overline{\lambda} = -\lambda$ ist dies immer reell. Da beide Summanden in der Norm beschränkt sind, folgt dies auch für $E(A,t)u_0$. □

3.1.6 Aufgaben

Aufgabe 3.1.6.1 Wir bezeichnen mit A^T die transponierte einer reellen Matrix A und mit $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A. Man zeige:
(a) $\det E(A,t) = e^{\mathrm{tr}(A)t}$
(b) $E(A^T,t) = (E(A,t))^T$
(c) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A + A^T = 0$, so ist $E(A,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal. (Eine Matrix B heißt orthogonal, wenn $B^TB = BB^T = \mathbb{1}$ ist.)

Aufgabe 3.1.6.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. A habe keinen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\ \lambda\ ) = 0$.
(a) Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ besitzt eine beschränkte Lösung.
(b) Ist diese Lösung eindeutig?
(c) Ist f periodisch mit Periode $T > 0$, so ist auch die in (a) gefundene Lösung T-periodisch.

Aufgabe 3.1.6.3 Man finde $E(A,t)$ für folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht $E(A,t)u_0$ für verschiedene $u_0 \neq 0$ aus.

Aufgabe 3.1.6.4 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \dots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.
(a) Man zeige: gibt es ein $\tau \in I$, so daß die Vektoren $u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \dots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix*.
(b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A. Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \operatorname{tr}(A)w$.

Aufgabe 3.1.6.5 Sei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nichtleere Teilmenge und $t_0 \in I$ sei fest gewählt. Setze

$$U(t) = \{u(t, t_0, u_0) \mid u_0 \in U\},$$

wobei $u(t, t_0, u_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = A(t)u,\ u(t, t_0, u_0) = u_0$ bezeichnet. Mit μ bezeichnen wir das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$. Man gebe eine hinreichende Bedingung an A dafür, daß $\mu(U(t)) = \mu(U)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3.1.6.6 Man löse die Differentialgleichungen

$$(a) \quad \dot{u} + u\sin(t) = (\sin(t))^3 \qquad (b) \quad (1+t^2)\dot{u} + tu = t.$$

3.2 Autonome Systeme

3.2.1 Grundbegriffe

Jetzt wollen wir beginnen geometrische Begriffe für die Lösung und das Langzeitverhalten einzuführen. Wir beginnen mit der Gleichung

$$\dot{u} = f(u), \tag{3.29}$$

wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetige Funktion sei. Wir wollen voraussetzen, daß die Lösungen $u(t, u_0)$ für $u_0 \in U$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert seien.

Definition 3.2.1.1 Eine Abbildung $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U$ heißt *Fluß* oder *Phasenfluß* von (3.29), falls für jedes $u_0 \in U$ gilt

$$\Phi(u_0, t) = u(t, u_0).$$

Lemma 3.2.1.2 [Eigenschaften eines Flusses] Ist f in (3.29) differenzierbar und ist Φ der zur Gleichung (3.29) gehörende Fluß, so gilt

1. $\Phi(., t) : U \to U$ ist ein Homöomorphismus, ist f differenzierbar, so ist Φ ein Diffeomorphismus.

2. $\Phi(u, t+s) = \Phi(\Phi(u, s), t)$.

3. $\Phi(u,0) = u \; \forall u \in U$.

Notation: Für $\Phi(.,t)$ schreiben wir auch $\Phi_t(.) : U \to U$.

Beweis: Die erste Aussage folgt, da $u(t,u_0)$ stetig vom Anfangswert abhängt. Ist f differenzierbar, so ist die Lösung nach dem Anfangswert differenzierbar. Die zweite Aussage ist eine direkte Konsequenz des Eindeutigkeitssatzes. Als direkte Folgerung aus der Definition erhalten wir auch die letzte Aussage. □

Definition 3.2.1.3 Sei $u(t,t_0,u_0)$ die Lösung der Differentialgleichung (2.1), d.h. $\dot{u} = f(u,t)$ mit maximalem Existenzintervall I. Dann nennt man die Menge $T = \{(u(t,t_0,u_0),t) \,|\, t \in I\}$ die *Trajektorie* der Lösung $u(t,t_0,u_0)$. Ein *Pfad* oder auch *Orbit* ist die Projektion einer Trajektorie auf die erste Komponente.

Offensichtlich, ist für eine autonome Differentialgleichung der Unterschied zwischen dem Pfad oder Orbit auf der einen Seite und der Trajektorie nicht besonders wichtig.

Lemma 3.2.1.4 [Trajektorien im erweiterten Phasenraum] Jeder Punkt (u_0,t_0) liegt auf genau einer Trajektorie.

Beweis: Folgt sofort aus den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen. □

Bemerkung: Daraus wird klar, daß der erweiterte Phasenraum eine disjunkte Vereinigung von Trajektorien ist. Ebenso folgt, daß der Phasenraum einer autonomen Gleichung eine disjunkte Vereinigung von Orbits ist. Man überlege sich dies!

Definition 3.2.1.5 Besteht ein Orbit einer Differentialgleichung aus einem einzigen Punkt u_0, so nennt man u_0 eine *Ruhelage* von (2.1), bzw. ein *Equilibrium* oder auch eine *Gleichgewichtslage*. Eine Gleichgewichtslage einer autonomen Differentialgleichung nennt man auch einen *kritischen Punkt*, alle anderen Punkte werden als *reguläre Punkte* bezeichnet.

Definition 3.2.1.6 Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Weg* (im $\mathbb{R}^n$). Dann nennt man $\gamma(a)$ den *Anfangspunkt* und $\gamma(b)$ den *Endpunkt*. Die Menge $\{\gamma(t) \,|\, t \in [a,b]\}$ heißt *Kurve* im $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.2.1.7 Ist γ ein Homöomorphismus auf dem Intervall (a,b) oder $[a,b]$ so bezeichnet man das Bild $\{\gamma(t) \,|\, t \in (a,b)\}$ oder $\{\gamma(t) \,|\, t \in [a,b]\}$ als Bogen.

Definition 3.2.1.8 Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Ist $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so wollen wir das Bild von γ als *Jordan Bogen* bezeichnen. Ist ein Orbit $\mathcal{O}$ einer autonomen Gleichung ein Jordan Bogen so nennt man $\mathcal{O}$ auch einen *geschlossenen Orbit.*

Lemma 3.2.1.9 Ein Orbit $\mathcal{O}$ ist genau dann geschlossen, wenn er der Orbit einer nichtkonstanten periodischen Lösung ist.

Beweis: Zunächst nehmen wir, daß $\mathcal{O}$ geschlossen ist. Sei $u_0 \in \mathcal{O}$ ein Punkt auf diesem Orbit. Dann gibt es aber ein $T > 0$ mit $u(T, u_0) = u(0, u_0) = u_0$. Die Lösung $u(t, u_0)$ ist dann periodisch mit Periode T. Für die Umkehrung nehmen wir an, daß $u(t, u_0)$ eine periodische Lösung mit (minimaler) Periode T sei. Dann ist $\{u(t, u_0) \mid t \in [0, T)\}$ ein Bogen im $\mathbb{R}^n$. Identifiziert man im Intervall $[0, T]$ Anfangs- und Endpunkt, so ist dies homöomorph zu S^1. □

Definition 3.2.1.10 Sei $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung, mit $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist. Eine Teilmenge $W \subset U$ heißt *invariant*, wenn

$$u_0 \in W \Longrightarrow u(t, u_0) \in W \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.30}$$

oder anders ausgedrückt

$$\Phi_t W \subset W \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Entsprechend heißt die Menge W *positiv invariant* wenn die Bedingung (3.30), oder (3.31) für alle $u_0 \in W$ und für alle $t > 0$ erfüllt ist. Gleichermaßen nennen wir W *negativ invariant* wenn eine der Bedingungen (3.30 oder (3.31) für alle $t < 0$ erfüllt sind.

Beispiele invarianter Mengen sind Orbits (von Lösungen, die für alle Zeiten definiert sind). Natürlich sind auch beliebige Vereinigungen von Orbits invariante Mengen. Alle invarianten Mengen sind von dieser Gestalt. Trotzdem ist es interessant spezielle invariante Mengen zu studieren. Wir beginnen mit folgender Definition.

Definition 3.2.1.11 Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung. Mit $\mathcal{O}^+_{u_0}$ bezeichnen wir den *positiven Halborbit* durch $u_0 \in \mathcal{O}$, der für $u_0 \in \mathcal{O}$ definiert ist durch

$$\mathcal{O}^+_{u_0} = \{u(t, u_0) \mid t \geq 0\}.$$

Entsprechend ist der *negative Halborbit* durch die Gleichung

$$\mathcal{O}^-_{u_0} = \{u(t, u_0) \mid t \leq 0\}.$$

definiert.

Definition 3.2.1.12 Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung und $u(t)$ eine zugehörige Lösung. Mit $\omega(\mathcal{O})$ bezeichnen wir die ω-Limesmenge von $\mathcal{O}$. Diese wird definiert als die Menge der Punkte $v \in \mathbb{R}^n$, zu denen eine Folge $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_\nu \to \infty$ existiert mit $u(t_n) \to v$. Entsprechend definiert man die α-Limesmenge $\alpha(\mathcal{O})$ als die Menge der Punkte $w \in \mathbb{R}^n$ zu denen eine Folge $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_\nu \to -\infty$ existiert mit $u(t_\nu) \to w$. Als Synonym für Limesmenge gebrauchen wir oft den Begriff *Grenzmenge.*

Lemma 3.2.1.13 Die vorstehenden Definitionen hängen nicht von der Wahl der Lösung im Orbit $\mathcal{O}$ ab.

Beweis: Zwei Lösungen im selben Orbit gehen durch eine Verschiebung auseinander hervor. Gibt es zu $v \in \mathbb{R}^n$ eine Zeitfolge, so daß $u(t_\nu)$ gegen v konvergiert, so konvergiert eine Lösung $\tilde{u}$ die durch eine Zeitverschiebung aus u hervorgeht, d.h. $\tilde{u}(t) = u(t - \tau)$ für die um τ verschobene Zeitfolge gegen v. □

Lemma 3.2.1.14 [Alternative Charakterisierung der Limesmengen] Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung. Dann ist

$$\omega(\mathcal{O}) = \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}_u^+}$$

und

$$\alpha(\mathcal{O}) = \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}_u^-}$$

Beweis: Einfach nachzuprüfen! □

Definition 3.2.1.15 Für $u_0 \in U$ sei $\omega(u_0)$ die ω-Limesmenge des eindeutig bestimmten Orbits auf dem u_0 liegt. Entsprechend ist $\alpha(u_0)$ die α-Limesmenge des eindeutig bestimmten Orbits von u_0.

Satz 3.2.1.16 Die α- bzw. ω-Limesmengen eines Orbits sind beide abgeschlossen und invariant. Ist der Halborbit $\mathcal{O}_u^+$ (oder $\mathcal{O}_u^-$) beschränkt, so gilt: Die ω-Limesmenge (bzw. die α-Limesmenge) ist

1. nichtleer,
2. kompakt und
3. zusammenhängend.

Außerdem wird dann der Abstand einer Lösung im Orbit zur Grenzmenge beliebig klein

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(u(t, u_0), \omega(u_0)) = 0$$

bzw.

$$\lim_{t \to -\infty} \operatorname{dist}(u(t, u_0), \alpha(u_0)) = 0.$$

Beweis: Wegen der alternativen Charakterisierung der Grenzmengen im Lemma 3.2.1.14 ist eine Limesmenge ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen und somit abgeschlossen. Die Invarianz läßt sich für beide Grenzmengen in ganz ähnlicher Weise zeigen, deshalb beschränken wir uns auf die ω-Limesmenge. Sei $v \in \omega(\mathcal{O})$. Sei weiterhin u eine Lösung im Orbit $\mathcal{O}$. Wie üblich schreiben wir $u(t, v)$ für die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = f(u), u(0) = v$. Nun gibt es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $\lim_{k \to \infty} u(t_k) = v$ ist. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Wir behaupten, daß die Folge $u(t + t_k)$ für $k \to \infty$ gegen $u(t, v)$ konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert (nach Satz 2.1.3.3) ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß $|v - u_0| < \delta \Rightarrow |u(t, v) - u(t, u_0)| \leq \varepsilon$. Weiter gibt es zu $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $k > N \Rightarrow |u(t_k) - v)| < \delta$. Dann ist aber für $k > N$ wegen $u(t, u(t_k)) = u(t + t_k)$ auch $|u(t + t_k) - u(t, v)| < \varepsilon$. Insbesondere ist $u(t, u_0)$ der Grenzwert der $u(t + t_k)$ und deshalb in $\omega(\mathcal{O})$.
Für die zweite Behauptung beschränken wir uns wieder auf den positiven Halborbit, für den negativen Halborbit geht der Beweis ganz genauso. Sei also $u \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_u^+$ beschränkt. Dann schließt man zunächst, daß für $u \in \mathcal{O}$ der Abschluß des positiven $\overline{\mathcal{O}_u^+}$ nichtleer und kompakt ist.

Da offensichtlich je endlich viele der $\overline{\mathcal{O}_u^+}$ nichtleeren Durchschnitt haben, also je endlich viele $\overline{\mathcal{O}_{u_j}^+}$, $u_j \in \mathcal{O}$ nichtleeren Schnitt haben, ist auch der Schnitt

$$\cap_{u\in\mathcal{O}}\overline{\mathcal{O}_u^+}$$

nichtleer und natürlich kompakt. Der Zusammenhang der Limesmenge folgt unmittelbar (wie?) aus der Konvergenzeigenschaft, die wir zunächst beweisen. Angenommen wir hätten eine Folge $t_k \to \infty$ mit $\mathrm{dist}(u(t_k, u_0), \omega(u_0))$ konvergiert nicht gegen null. Durch Auswahl einer Teilfolge, die wieder mit t_k bezeichnet wird, kann man davon ausgehen, daß

$$\mathrm{dist}(u(t_k, u_0), \omega(u_0)) > \eta \ \forall k \in \mathbb{N}$$

für eine Zahl $\eta > 0$. Wegen der Beschränktheit des Semiorbits enthält man eine konvergente Teilfolge, deren Grenzelement natürlich in der Grenzmenge $\omega(u_0)$ enthalten ist. Damit haben wir einen Widerspruch. □

Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Lösungen in der Nähe eines regulären Punktes.

Satz 3.2.1.17 [Begradigungssatz] Sei u_0 ein regulärer Punkt der autonomen Differentialgleichung (3.29), wobei f als Lipschitz stetig vorausgesetzt wird. Dann gibt es Umgebungen W von u_0 und V von 0 im $\mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $\Psi : W \to V$ welcher die Orbits der Gleichung (3.29) auf die Orbits der Gleichung

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

im folgenden Sinne abbildet: sei $u(t, w_0)$ eine Lösung in W, so ist

$$v(t, \Psi(w_0)) = \Psi(u(t, w_0))$$

Lösung des Anfangswertproblems (3.32) und $v(0, \Psi(w_0)) = \Psi(w_0)$. Dabei kann V in der Form $(-a, a) \times B_\delta^{n-1}(0)$, für ein $a > 0$ und

$$B_\delta^{n-1} = \{(x_2, \ldots, x_n) \,\|\, |(x_2, \ldots, x_n)| < \delta\}$$

gewählt werden. Ist f differenzierbar, so kann Ψ als Diffeomorphismus gewählt werden.

Die Abbildung 3.1 zeigt das begradigte Vektorfeld und den begradigenden Homöomorphismus.
Beweis: Übungsaufgabe! □

Bemerkung: Dies ist der erste Satz der sozusagen eine Normalform einer Differentialgleichung angibt. Eine allgemeine Normalform in der Nähe singulärer Punkte gibt es nicht. Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann man solche Normalformen angeben. Dabei untersucht man das Spektrum der Linearisierung des Vektorfeldes in der Ruhelage. Das Auffinden von Normalformen in der Nähe der kritischer Punkte von autonomen Differentialgleichungen ist heute eine wichtige Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen. Solche (einfachen) Gleichungen die das Verhalten in der Nähe solcher Punkte dann beschreiben sind unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bekannt.

Abbildung 3.1: Begradigung des Vektorfeldes

Definition 3.2.1.18 Das Urbild $\Psi^{-1}(0 \times B_\delta^{n-1})$ heißt Transversale zu f im Punkt u_0.

Definition 3.2.1.19 Eine Teilmenge M von U heißt minimal, wenn sie nichtleer, kompakt und invariant ist und keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften enthält.

Satz 3.2.1.20 [Existenz minimaler Mengen] Jede nichtleere, kompakte und invariante Menge M enthält eine minimale Menge.

Beweis: Sei F die Familie der nichtleeren, kompakten und invarianten Teilmengen von M. Da $M \in F$ ist $F \neq \emptyset$. Wir definieren eine Ordnung auf F, indem wir setzen $M_1 > M_2$ genau dann wenn $M_1 \subset M_2$. Hat man nun eine vollständig geordnete Kette K bezüglich dieser Ordnung, so gilt für jede endliche Auswahl $M_1, \dots, M_n$, daß $\cap_{j=1}^n M_j \neq \emptyset$. Also ist $M_K = \cap_{M \in K} M$ nichtleer, kompakt und invariant. Also existiert eine obere Schranke in F. Das Zorn'sche Lemma garantiert nun die Existenz eines maximalen Elementes. Dies hat alle gewünschten Eigenschaften. $\square$

Definition 3.2.1.21 Eine nichtleere, kompakte und invariante Menge $K \subset U$ heißt *stabil*, wenn es zu jeder Umgebung W von K mit $K \subset W \subset U$ eine weitere Umgebung V von K, $V \subset W$ gibt, so daß

$$u_0 \in V \Longrightarrow u(t, u_0) \in W \ \forall t \geq 0.$$

Definition 3.2.1.22 Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset U$ wird *Attraktor* genannt, wenn $\mathcal{A}$ stabil ist und es eine Umgebung S von $\mathcal{A}$ gibt, so daß

$$u_0 \in S \Longrightarrow \operatorname{dist}(u(t, u_0), \mathcal{A}) \to_{t \to \infty} 0.$$

Eine wichtige Aufgabe der qualitativen Theorie von Differentialgleichungen besteht darin die Attraktoren zu finden und die Feinstruktur des Phasenflusses auf den Attraktoren. Erst in den letzten Jahren haben seltsame Attraktoren (Lorentz Attraktor) und chaotische Systeme viel Aufmerksamkeit auf sich gelenkt. Auch in der Theorie unendlich dimensionaler dynamischer Systeme spielen *globale Attraktoren* eine wichtige Rolle. Unter sehr allgemeinen Umständen sind diese endlich dimensional und das Verhalten auf dem Attraktor und nahe bei dem Attraktor kann wieder durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden.

3.2.2 Der Satz von Poincaré-Bendixson

Im vorigen Abschnitt haben wir Existenz und einige Eigenschaften von Limesmengen kennengelernt. Hier wollen wir einen Satz vorstellen, der zu Beginn unseres Jahrhunderts bewiesen wurde, und nach dem schwedischen Mathematiker Ivar Otto Bendixson (1.8.1861-29.11.1935) und dem französischen Mathematiker Jules Henri Poincaré (29.4.1854-17.7.1912) benannt wird. Poincaré, ein Zeitgenosse Hilberts, gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit und und auch dieses Jahrhunderts. Er führte topologische Methoden bei der Untersuchung analytischer Probleme ein und wurde damit auch zu einem der Mitbegründer der algebraischen Topologie. Der Satz mit dem wir uns nun beschäftigen wollen wurde vor kurzem wiederbelebt, indem eine Verallgemeinerung für bestimmte partielle Differentialgleichungen entdeckt wurde. Zuerst noch ein wichtiges Hilfsmittel, der sogenannte Jordan'sche Kurvensatz.

Satz 3.2.2.1 [*Jordan*] Jeder Jordan Bogen zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten von denen eine beschränkt ist.

Beweis: s. Deimling [6]. □

Satz 3.2.2.2 [Poincaré-Bendixson] Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz stetig, $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$ und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung. Sei $u_0 \in \{u(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ist

1. $\mathcal{O}^+_{u_0}$ beschränkt, so enthält $\omega(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit,
2. $\mathcal{O}^-_{u_0}$ beschränkt, so enthält $\alpha(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.
3. Sind sowohl $\mathcal{O}^+_{u_0}$, wie auch $\mathcal{O}^-_{u_0}$ beschränkt, so enthalten beide Grenzmengen jeweils entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.

Beweis: Die Beweise sind für die beiden Grenzmengen identisch, wir führen deshalb nur den Beweis für die ω-Limesmenge aus. Sei $\mathbf{U}_0 \in \omega(u_0)$ ein regulärer Punkt. Wegen der Invarianz von Grenzmengen ist auch der Orbit durch $\mathbf{U}_0$ wieder in $\omega(u_0)$ und natürlich dann auch dessen Grenzmenge. Dies sieht man ein, indem man annimmt, daß $\mathbf{U}_1$ ein Punkt in der Grenzmenge $\omega(\mathbf{U}_0)$ ist. Dann gibt es eine Folge $t_n \to \infty$, so daß $u(t_n, \mathbf{U}_0)$ gegen $\mathbf{U}_1$ konvergiert. Für jedes n existiert eine Folge $t_{n_k} \to \infty$ für $k \to \infty$ mit $u(t_{n_k}, u_0) \to u(t_n, \mathbf{U}_0)$ für $k \to \infty$. Dann gibt es eine Folge, $t_{n_{k_j}}$, so daß $u(t_{n_{k_j}}, u_0)$ gegen $\mathbf{U}_1$ konvergiert. Man führe das Argument aus. Wir wollen zeigen, daß entweder der Orbit $\mathcal{O}$ durch $\mathbf{U}_0$ geschlossen ist, oder die Grenzmenge von $\mathcal{O}$ aus Ruhelagen besteht. Die weiteren Schritte des Beweises wollen wir in einige Lemmata aufgliedern. Der Beweis beruht auf dem Existenzsatz für invariante Mengen und ist demzufolge nicht konstruktiv.

Lemma 3.2.2.3 Sei w_0 ein regulärer Punkt und L eine geschlossene Transversale zu f in w_0. D.h. L ist eine Transversale, die durch eine Abbildung γ beschrieben wird, deren Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ ist. Sei $L_0 = \gamma(\text{int }(I))$. Sei $V \subset L_0$ definiert durch

$$V = \{w \in L_0 \mid \exists t_w > 0 : \; u(t_w, w) \in L_0 \text{ and } u(t, w) \notin L \; \forall t \in (0, t_w)\}.$$

Sei $W = \gamma^{-1}(V) \subset I$ und $g : W \to I$ definiert durch

$$g(y) = \gamma^{-1} u(t_{\gamma(y)}, \gamma(y)).$$

Dann ist

Abbildung 3.2: Transversale und Jordan Bogen

1. W offen;
2. g stetig;
3. $g^k(w)$ ist monoton, wobei $g^k(w) = g(g^{k-1}(w))$, solange es definiert ist.

Beweis: Wegen der stetigen Abhängigkeit und der Tatsache, daß L Transversale ist, folgt, daß W offen ist. Ebenso erhält man die Stetigkeit von g. Nun betrachten wir den Jordan Bogen, der für einen Punkt $w \in V$ aus $\{u(t,w) \mid t \in [0,t_w]\}$ und dem Abschnitt in L_0 zwischen w und $u(t_w,w)$ besteht. Ist $w = u(t_w,w)$, so ist diese Lösung periodich und damit ist für $y \in \gamma^{-1}(w)$ $g^k(y) = y$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Angenommen $g^k(y) > g^{k-1}(y)$ und $g^k(y) \in W$. Dieser Jordan Bogen zerlegt die Ebene in ein beschränktes Gebiet G_b und ein unbeschränktes Gebiet G_u. Da L Transversale ist, können Lösungen diese nur in eine Richtung überqueren. Betrachte $\gamma([g^k(y),b])$. Dieses Stück der Transversale liegt entweder in G_b oder in G_u. Sonst müßte ein Orbit den Abschnitt zwischen w und $u(t_w,w)$ in anderer Richtung queren, als der Orbit durch $\gamma^{-1}(g^k(w))$. Demzufolge liegt, falls $g^{k+1}(w)$ definiert ist, dieses auch in $[g^k(w),1]$. Damit ist per Induktion dieses Lemma gezeigt. $\square$

Korollar 3.2.2.4 Die ω-Limesmenge eines Orbits kann L_0 (das Innere einer Transversale) in höchstens einem Punkt schneiden. Ist $w_0 \in \omega(\mathcal{O}) \cap L_0$, so ist entweder $\omega(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, also $\mathcal{O}$ geschlossen, oder zu einer Lösung $u(t)$ in $\mathcal{O}$ existiert eine Zeitfolge $t_n \to \infty$ mit $u(t_n) \in L_0$ und $u(t_n) \to w_0$ (monoton, wie zuvor).

Beweis: Seien W, V, Ψ wie im Begradigungssatz 3.2.1.17. Da w_0 Limes einer Folge $u(t_n,u_0)$ ist, gibt es zu jeder Umgebung von w_0 unendlich viele der Punkte $u(t_n,u_0)$. Sei $B_\varepsilon(w_0)$ eine Kugel um w_0, die vollständig in der Umgebung W enthalten ist. Da jede Lösung mit Anfangswert in $B_\varepsilon(w_0)$ sowohl die Umgebung W verläßt, wie auch die Transversale schneiden muß, hat man unendlich viele Schnittpunkte mit L_0, falls $\mathcal{O}_{u_0} \cap \mathcal{O}_{w_0} = \emptyset$. Seien nun $u(t^n,u_0)$ die Schnittpunkte der Lösung u mit L_0. Wegen des vorhergehenden Lemmas hat man die monotone Konvergenz. Daraus folgt auch die Eindeutigkeit. $\square$

Korollar 3.2.2.5 Falls der positive Halborbit $\mathcal{O}_u^+$ und $\omega(\mathcal{O}_u^+)$ einen gemeinsamen Punkt haben, dann ist $\mathcal{O}$ geschlossen.

Beweis: Ist $u_0 \in \mathcal{O}_u^+ \cap \omega(\mathcal{O}_u^+)$, so existiert eine Transversale zu f durch u_0. Wäre $\omega(\mathcal{O}_u^+) \neq \mathcal{O}$, so gäbe es eine Folge $t_k \to_{k\to\infty} \infty$ mit $u(t_k) \in L_0$ und $u(t_k) \to u_0$ (monoton). Da u_0 in $\mathcal{O}_u^+$ liegt widerspricht dies der monotonen Konvergenz. Damit folgt der Satz aus Korollar 3.2.2.4. $\square$

Lemma 3.2.2.6 Ist M eine beschränkte minimale Menge, so ist M entweder eine periodische Lösung oder eine Ruhelage.

Beweis: Jeder Orbit in M hat nichtleere Grenzmengen (wegen der Beschränktheit von M). Diese sind kompakt und invariant. Da M minimal ist, fallen sie mit dem Orbit zusammen. Entweder M enthält einen regulären Punkt, dann ist der zugehörige Orbit periodisch. Im andern Fall besteht M aus einer einzigen Ruhelage. □

Nun folgt der Satz von Poincaré-Bendixson unmittelbar. Die ω-Limesmenge ist nichtleer, kompakt und invariant und enthält demzufolge eine minimale Menge. Diese hat die gewünschte Gestalt. Wir wollen noch etwas mehr zeigen, nämlich daß die Limesmenge einer Lösung im Orbit selbst schon (fast) minimal ist. Dies ergibt einen zweiten Beweis, der nicht auf dem Zorn'schen Lemma beruht.

Lemma 3.2.2.7 Sei $\mathcal{O}_{\mathbf{U}_0}$ ein Orbit in der Grenzmenge $\omega(u_0)$. Ist w_0 ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{\mathbf{U}_0}$, so hat man folgende Alternative

1. $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}_1$. Dann ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{w_0}$.

2. $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält keinen regulären Punkt.

Beweis: Angenommen v_0 ist ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{w_0}$. Wir müssen zeigen, daß erstens der Orbit $\mathcal{O}_{v_0}$ geschlossen ist und zweitens mit dem Orbit $\mathcal{O}_{w_0}$ zusammenfällt. Sei L eine abgeschlossene Transversale zu f in v_0 mit Innerem L_0. Dann kann $u(t, w_0)$ die Transverale L_0 wegen Korollar 3.2.2.4 in höchstens einem Punkt schneiden. Andererseits gibt es eine Folge $t_k \to_{k\to\infty} \infty$, so daß $u(t_k) \to w_0$ konvergiert. Wegen des Begradigungssatzes schneidet jede Lösung, die dem Punkt v_0 nahe kommt auch die Transversale in einem Punkt nahe v_0. Also gibt es ein k_0, so daß aus $k > k_0$ folgt $u(t_k) = v_0$. Damit ist $u(t)$ periodisch und es folgt die erste Aussage. □

Wir bemerken, daß die zweite Möglichkeit noch genauer formuliert werden kann, entweder $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ besteht aus einer Ruhelage oder unendlich vielen. Dies folgt u.a. aus dem nächsten Korollar, mit dem man genauere Aussagen über die Struktur der Grenzmengen macht. wir fassen diese in der folgenden Aussage zusammen.

Korollar 3.2.2.8 [Struktur der Grenzmengen] Sei f wie im Satz, und habe in U nur endlich viele kritische Punkte. Es sei u eine halbseitig beschränkte Lösung. Dann besteht die entsprechende Limesmenge entweder aus

1. einer endlichen Anzahl von Ruhelagen $\mathbf{U}_\ell,\ \ell = 1, \ldots, m$ und m Lösungen $u_\ell\ \ell = 1, \ldots, m$ mit $u_\ell(t) \to_{t\to-\infty} \mathbf{U}_\ell$ und $u_\ell(t) \to_{t\to\infty} \mathbf{U}_{\ell+1(\mathrm{mod} m)}$ und einer nicht bestimmten Zahl von Lösungen $u_{k,\ell}(t, u_0)$ mit $\omega(u_0) = \alpha(u_0) = \mathbf{U}_\ell$ oder

2. einem periodischen Orbit.

Beweis: Dies folgt aus dem Beweis des Satzes 3.2.2.2. Angenommen $\mathcal{O}$ ist ein Orbit in $\omega(u_0)$, $u_0 = u(0)$. Entweder dieser korrespondiert zu einer Ruhelage oder einer periodischen Lösung oder er enthält einen regulären Punkt und ist nicht geschlossen. Im zweiten Fall ist der geschlossene Orbit die gesamte Grenzmenge, nach Lemma 3.2.2.7. Im dritten Fall enthält die Grenzmenge keinen regulären Punkt. Also ist die Grenzmenge in der diskreten Menge der Ruhelagen enthalten und besteht wegen des Zusammenhangs von Grenzmengen aus einer einzigen Ruhelage. Auf diese Weise kann man jedem Orbit mit regulären Punkten genau eine Ruhelage in der ω- und eine in der α-Limesmenge zuordnen. Der Satz ist gezeigt, wenn diese Zuordnung injektiv auf einer Teilmenge ist, d.h. eine Teilmenge der Orbits mit regulären Punkten existiert, so daß je zwei verschiedene Orbits verschiedene Grenzmengen haben. Dies folgt durch die Betrachtung von Transversalen in verschiedenen regulären Punkten. □

Korollar 3.2.2.9 Ist $\mathcal{O}^+$ ein beschränkter Halborbit und enthält $\omega(\mathcal{O}^+)$ mindestens einen regulären Punkt und genau eine Ruhelage U_0, so besteht $\omega(\mathcal{O}^+)$ aus zwei Orbits, nämlich $\{\mathbf{U}_0\}$ und $\mathcal{O}_0$ mit

$$\alpha(\mathcal{O}_0) = \omega(\mathcal{O}_0) = \{\mathbf{U}_0\}.$$

Definition 3.2.2.10 (a) Sind $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ Ruhelagen und ist $u(t, u_0)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ mit $\omega(u_0) = \mathbf{U}_2$ und $\alpha(u_0) = \mathbf{U}_1$, so nennt man den zugehörigen Orbit einen *heteroklinen Orbit*. Man spricht auch von einem *verbindenden Orbit* (engl. *connecting orbit*).
(b) Sind in der Definition des Teils (a) die Punkte $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ gleich, so wird der in (a) beschriebene Orbit als *homokliner Orbit* bezeichnet.

<u>Bemerkung:</u> Mit dieser Terminologie besteht die ω-Limesmenge einer beschränkten Lösung eines zweidimensionalen autonomen Systems entweder aus einem periodischen Orbit oder entweder aus einer Ruhelage und homoklinen Orbits oder aus endlich vielen Ruhelagen und einer gleichen Anzahl von heteroklinen Orbits und einer unbestimmten Zahl von homoklinen Orbits (falls nur endlich viele kritische Punkte vorhanden sind).

Definition 3.2.2.11 Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt einfach zusammenhängend, wenn sie homöomorph zur offenen Einheitskugel ist.

Für den Beweis des nächsten Satzes möchte ich ein Ergebnis zitieren, dessen Beweis z.B. in [2] zu finden ist.

Satz 3.2.2.12 Jede stetige Abbildung des abgeschlossenen Einheitskreises in sich hat einen Fixpunkt.

Satz 3.2.2.13 Gegeben sei eine Differentialgleichung wie im Satz 3.2.2.2. Die Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ sei einfach zusammenhängend. Dann umschließt jeder periodische Orbit eine Ruhelage.

<u>Bemerkung:</u> Eine periodische Lösung entspricht einem geschlossenen Orbit, dieser wiederum ist eine Jordankurve. Nach dem Jordan'schen Satz zerlegt der Orbit den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten, von denen eine beschränkt ist. Die Aussage des Satzes ist, daß die beschränkte Komponente einen stationären Punkt enthält. Da U einfach zusammenhängend ist, ist auch die beschränkte Komponente einfach zusammenhängend und damit homöomorph zum offenen Einheitskreis. Diese an sich recht anschauliche Behauptung wird in der Funktionentheorie bewiesen.
<u>Beweis:</u> Sei G_b die beschränkte Komponente, die von dem geschlossenen Orbit nach dem Jordan'schen Kurvensatz definiert wird. Weiter sei H deren Abschluß. Zu jedem $\tau > 0$ betrachten wir die Abbildung $\Phi_\tau : H \to H$. Es ist klar, daß wegen des Eindeutigkeitssatzes, die Menge H

invariant ist. Da H homöomorph zum abgeschlossenen Einheitskreis ist, hat jede Abbildung Φ_τ einen Fixpunkt u_τ. Ist nun τ_m eine gegen Null konvergierende Folge, und u_m eine Folge von Fixpunkten von Φ_{τ_m}, so kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß die Menge u_m gegen u^*konvergiert (nach Übergang zu einer Teilfolge). Zu jedem $t > 0$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $k_m(t)$ mit der Eigenschaft $k_m(t)\tau_m \leq t < (k_m(t)+1)\tau_m$. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} |\Phi_t(u^*) - u^*| &\leq |\Phi_t(u^*) - \Phi_t(u_m)| + |\Phi_t(u_m) - u_m| + |u_m - u^*| \\ &= |\Phi_t(u^*) - \Phi_t(u_m)| + |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - u_m| + |u_m - u^*| \end{aligned}$$

□

3.2.3 Das Wazewski Prinzip

Der Satz von Poincaré-Bendixson gibt eine Art von topologischem Prinzip um Lösungen betimmter Art zu garantieren. Wir wollen hier ein weiteres solches Prinzip kennenlernen. Es gehört eigentlich nicht unter die Überschrift Áutonome Gleichungen', denn wir können hier auch nichtautonome Gleichungen zulassen. Die Anwendungen betreffen jedoch zumeist autonome Probleme und deshalb ist es vielleicht gerechtfertigt, dieses Prinzip hier im Anschluß an den Satz von Poincaré-Bendixson zu präsentieren. Wir beginnen mit einem Spezialfall einer Definition aus der Topologie.

Definition 3.2.3.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Menge $V \subset U$ heißt *Retrakt* von U, falls es eine stetige Abbildung $\pi : U \to V$ gibt mit den Eigenschaften $\pi_{|V} : V \to V = \mathbb{1}_{|V}$. Die Abbildung π wird *Retraktion* genannt.

<u>Beispiele:</u> Jede nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Retrakt. Es reicht den Fall zu betrachten, daß $\mathbb{R}^n$ der lineare Span von Punkten in V ist. Man wählt einen Punkt x_0 in V und definiert die Abbildung $\pi(x) = x$, falls $x \in V$ und $\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ für x außerhalb V. Ein ganz ähnliches Argument zeigt, daß keine nichtleere offene Menge V Retrakt des $\mathbb{R}^n$ ist.
Der Rand des Einheitskreises ist kein Retrakt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Gleiches gilt in höheren Dimensionen. Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem Brouwer'schen Fixpunktsatz.
Eine nichtzusammenhängende Menge ist kein Retrakt einer zusammenhängenden Menge. Auch dies sollte man sich zur Übung überlegen.

Definition 3.2.3.2 Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f : W \to \mathbb{R}^n$ in der ersten Komponente Lipschitz stetig. Weiter sei W^0 eine offene Teilmenge von W, ∂W^0 der Rand von W^0 und $\overline{W^0}$ der Abschluß von W^0. Ein *Austrittspunkt* von W^0 für die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u,t)$ ist ein Paar $(u_0, t_0) \in \partial W^0$, so daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $(u(t,t_0,u_0),t)$ für $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ in W^0 enthalten ist. Ein Austrittspunkt wird *echter Austrittspunkt* genannt, falls es ein Intervall $(t_0, t_0 + \delta)$ gibt, so daß für $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ die Lösung $(u(t,t_0,u_0),t)$ außerhalb von $\overline{W^0}$ ist. Mit W_a^0 bezeichnen wir die Menge der Austrittspunkte, mit W_{sa}^0 die Menge der echten (strikten) Austrittspunkte.

Satz 3.2.3.3 Sei $f : W \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich der ersten Komponente Lipschitz stetig. Jeder Austrittspunkt einer offenen Teilmenge W^0 von W sei echter Austrittspunkt, d.h. $W_a^0 = W_{sa}^0$. Sei $S \subset W^0 \cup W_a^0$ nichtleer. Angenommen $S \cap W_a^0$ ist kein Retrakt von S aber ein Retrakt von W_a^0. Dann gibt es einen Anfangswert $(t_0, u_0) \in S$, so daß $(u(t,t_0,u_0),t)$ auf dem maximalen (rechtsseitigen) Existenzintervall in W^0 enthalten ist.

u_2

S

t

u_1

Abbildung 3.3: Wazewski Prinzip: erstes Beispiel

Beweis: Wir beweisen den Satz durch Widerspruch. Unter der Annahme, daß der Satz falsch ist, konstruieren wir eine Retraktion, d.h. eine Abbildung mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften von S auf $S \cap W_a^0$. Zu jedem Paar $(t_0, u_0) \in S$ existiert ein $t_1 > t_0$, so daß für $t \in (t_0, t_1)$ die Lösung$(t, u(t, t_0, u_0) \in W^0$ ist, und für t_1 gilt $(t_1, u(t_1, t_0, u_0) \in \partial W^0$. Insbesondere ist $(t_1, u(t_1, t_0, u_0)) \in W_a^0$. Wir definieren eine Abbildung $\pi : S \to W_a^0$ durch $\pi(t_0, u_0) = (t_1, u(t_1, t_0, u_0))$ falls $(t_0, u_0) \notin W_a^0$ und $\pi(t_0, u_0) = (t_0, u_0)$ falls $(t_0, u_0) \in W_a^0$. Dann gilt π ist stetig. Dies folgt, da jeder Austrittspunkt echter Austrittspunkt ist. Sei nun $\tau : W_a^0 \to S \cap W_a^0$ eine Retraktion. Dann ist $\tau \circ \pi$ eine Retraktion von S auf $S \cap W_a^0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Beispiele: 1.) Wir betrachten zunächst ein nichtautonomes Beispiel. Gegeben sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in der ersten Komponente Lipschitz stetig sei. Wir nehmen an, daß es zwei Zahlen $u_1 < u_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(u_1, t) < 0 \text{ und } f(u_2, t) > 0.$$

Dann gibt es eine Lösung $u(t)$ von $\dot{u} = f(u, t)$ mit $u_1 < u(t) < u_2\ \forall t \in \mathbb{R}$, siehe Abbildung 3.3. Sei

$$W^0 = \{(u, t) \mid u_1 < u < u_2\}.$$

Alle Punkte auf den Geraden $u = u_1$, bzw. $u = u_2$ sind Austrittspunkte, sogar echte Austrittspunkte. Sei

$$S = \{(u, 0) \mid u \in [u_1, u_2]\}.$$

Dann ist die Menge $S \cap W_a^0 = \{(u_1, 0), (u_2, 0)\}$. Dies ist kein Retrakt von S, aber ein Retrakt von W_a^0. Damit existiert eine Lösung $u(t, u_0)$, mit $u_0 \in (u_1, u_2)$, die für alle positiven Zeiten in W^0 bleibt. Da W^0 negativ invariant ist, bleibt diese Lösung für alle Zeiten in W^0. Ein ähnliches Argument funktioniert, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt. Auch dort ist der Rand einer Kugel nicht Retrakt der Kugel, aber Retrakt des entsprechenden Zylinders, vgl. Abbildung 3.4.
Man kann dies auf die Problemstellung von Aufgbabe 3.1.6.2 anwenden. Wir schauen uns nur die eindimensionale Situation an (in höheren Dimensionen hat man das gleiche Argument). Sei $\dot{u} = \lambda u + f(t)$, $\lambda \neq 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existieren Zahlen $u_1 < 0 < u_2$ mit $\lambda u_1 + f(t) < 0 < \lambda u_2 + f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das vorstehende Argument ist anwendbar und man erhält eine beschränkte Lösung. Eine Eindeutigkeitsaussage kann man von einem solchen Prinzip nicht erwarten.

$\mathbb{R}^n$

S

t

Abbildung 3.4: Das erste Beispiel in höherer Dimension

Abbildung 3.5: Wazewski-Prinzip: zweites Beispiel

2.) Wir betrachten die Abbildung 3.5. Hier schließt man auf die Existenz einer Lösung, die für positive Zeiten in W^0 bleibt. In der angedeuteten zweidimensionalen Situation kann man dann mit dem Satz von Poincaré-Bendixson schließen, daß W^0 sogar eine Ruhelage oder einen geschlossenen Orbit enthält.

3.2.4 Aufgaben

Aufgabe 3.2.4.1 (a) Was ist der Phasenraum, bzw. der erweiterte Phasenraum für die Gleichungen $\dot{u} = u$, bzw. $\dot{u} = u(1-u)$ in $\mathbb{R}$. Was sind die Trajektorien, bzw. die Orbits?
(b) Man beantworte die gleichen Fragen für die Gleichung im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_2 + u_1(1-r^2) \\ \dot{u}_2 &= u_1 + u_2(1-r^2), \end{aligned}$$

wobei $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ist.

Aufgabe 3.2.4.2 Man zeige den Begradigungssatz 3.2.1.17

Aufgabe 3.2.4.3 Man überlege sich, ob der Satz von Poincaré-Bendixson für Differentialgleichungen auf der zweidimensionalen Sphäre, bzw. dem zweidimensionalen Torus richtig ist.

Aufgabe 3.2.4.4 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so daß $\operatorname{div}(f)$ ein konstantes Vorzeichen auf G hat, so gibt es keinen geschlossenen Orbit in G.

Aufgabe 3.2.4.5 Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und G sei die Stammfunktion definiert durch $G(y) = \int_0^y g(s)ds$.
(a) Man schreibe die Gleichung $\ddot{u} + g(u)\dot{u} + u = 0$ um in ein zweidimensionales autonomes System.
(b) G sei ungerade in y, es gelte $G(y) \to \infty$ für $|y| \to \infty$. Weiterhin nehmen wir an, daß es positive Zahlen $0 < \alpha < \beta$ gibt mit $G(y) < 0$ auf $(0, \alpha)$, $G(\alpha) = 0$ und auf dem Intervall $[\beta, \infty)$ ist $G(y) > 0$ und monoton steigend. Man zeige, daß das in (a) erhaltene System eine periodische Lösung besitzt.

3.3 Stabilität

3.3.1 Die Stabilität einer Ruhelage

In diesem Abschnitt sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung. Wir betrachten die Differentialgleichung (3.29) $\dot{u} = f(u)$.

Definition 3.3.1.1 Eine Ruhelage u_0 der Gleichung (3.29) heißt *stabil*, wenn die Menge $\{u_0\}$ im Sinne der Definition 3.2.1.21 stabil ist. Die Ruhelage wird *asymptotisch stabil* genannt, wenn sie stabil ist und zusätzlich die Menge $\{u_0\}$ ein Attraktor im Sinne der Definition 3.2.1.22 ist. Ist u_0 nicht stabil, so nennen wir u_0 *instabil*.

Ein hinreichendes Stabilitätskriterium geht auf den russischen Mathematiker Aleksandr Michailowitsch Ljapunov (6.6.1857-3.11.1918) zurück, das er in seiner Habilitationsschrift im Jahre 1892 bewies. Zwei Hilfssätze wollen wir vorab bereitstellen.

Hilfssatz 3.3.1.2 (a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\alpha > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $M_\alpha \geq 1$, so daß für alle $t \geq 0$ gilt

$$\|E(A,t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t}.$$

(b) Entsprechend gibt es zu jedem $\beta < \min\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $N_\beta \geq 1$ mit

$$\|E(A,t)\| \leq N_\beta e^{\beta t} \; \forall t \leq 0.$$

Beweis: Es reicht (a) zu beweisen. Die Aussage (b) folgt dann in gleicher Weise. Folgt im wesentlichen aus dem Beweis des Satzes über Spektrum und Stabilität I, d.h. Satz 3.1.5.1. Sei α wie im Hilfssatz angegeben. Wir schreiben $A = A - \alpha\mathbb{1} + \alpha\mathbb{1}$. Da $\mathbb{1}$ mit jeder anderen Matrix kommutiert erhält man

$$\|E(A,t)\| \leq e^{\alpha t}\|E(A - \alpha\mathbb{1}, t)\|.$$

Da alle Eigenwerte von $A - \alpha\mathbb{1}$ in der linken Halbebene sind, ist nach dem Beweis von Satz 3.1.5.1 $E(A - \alpha\mathbb{1}, t)$ für $t \geq 0$ beschränkt. Das heißt also, es gibt eine Konstante $M_\alpha > \|E(A - \alpha\mathbb{1}, t)\|$ und damit $\|E(A,t)\| < M_\alpha e^{\alpha t}$, wie behauptet. □

Hilfssatz 3.3.1.3 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null, $g : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Dann existiert zu jedem $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ mit

$$|u_1| < \eta, \; |u_2| < \eta \Rightarrow |g(u_1) - g(u_2)| < L|u_1 - u_2|.$$

Beweis: Da die Ableitung $Dg(u)$ stetig in U ist, läßt sich zu jeder Konstante $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ finden, so daß $\|Dg(u)\| < L$ für $|u| < \eta$ ist. Wegen des Mittelwertsatzes läßt sich die Lipschitz Konstante auf einer Umgebung durch die maximale Norm der Ableitung abschätzen. □

Satz 3.3.1.4 [*Ljapunov*] [Spektrum und Stabilität II] Gegeben sei eine autonome Differentialgleichung (3.29) mit einer Ruhelage w_0. Die Abbildung f sei in einer Umgebung von w_0 stetig differenzierbar und $A = Df(u_0)$ sei die Linearisierung (Ableitung) von f im Punkt w_0. Dann gilt

1. Haben alle Eigenwerte von A negative Realteile, so ist w_0 asymptotisch stabil.
2. Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist, so ist w_0 instabil.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. O.B.d.A. dürfen wir davon ausgehen, daß $w_0 = 0$ ist. Zur Erleichterung der Schreibweise wollen wir dies auch tun. Da $A = Df(0)$ ist, kann man die Abbildung f in der Form $f(u) = Au + g(u)$ schreiben, wobei g bei 0 stetig differenzierbar ist, und $Dg(0) = 0$ ist. Also hat die zu betrachtende Gleichung die Form

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{3.33}$$

Wir müssen die Stabilität und die Attraktivität von $w_0 = 0$ zeigen. Die Stabilität kann man auch so formulieren: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$|u_0| < \delta \Longrightarrow |u(t, u_0)| < \varepsilon \ \forall t \geq 0.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $u_0 \in U$ mit $|u_0| < \delta$. Die Lösung $u(t, u_0)$ von (3.33) genügt der Integralgleichung

$$u(t) = E(A, t)u_0 + \int_0^t E(A, t-s)g(u(s))ds,$$

da natürlich nach Einsetzen der Lösung $u(t, u_0)$ in die Gleichung (3.33) daraus mit $h(t) = g(u(t, u_0))$ die äquivalente Gleichung

$$\dot{u} = Au + h(t)$$

entsteht. Sei $\mu = \max\{\text{Re }(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\mu < 0$ und die Norm von $E(A, t)$ kann für jedes $\alpha \in (\mu, 0)$ abgeschätzt werden durch

$$\|E(A, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t},$$

wobei M_α die reelle Konstante ist, deren Existenz der Hilfssatz 3.3.1.2 gewährleistet. Wir finden auch eine positive Konstante $L > 0$ mit

$$M_\alpha L < \frac{1}{2}\min\{-\alpha, 1\}.$$

Nach Hilfssatz 3.3.1.3 gibt es ein $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$, so daß auf $B_\eta(0)$ g die Lipschitz Konstante L hat. Sei $\delta = \frac{1}{2}\frac{\eta}{M_\alpha}$. Nun hat man für $|u_0| < \delta$ die Abschätzung

$$|u(t, u_0)| \leq \|E(A, t)\| \, |u_0| + \int_0^t \|E(A, t-s)\| \, |f(u(s, u_0))|ds. \tag{3.34}$$

Einsetzen ergibt (jedenfalls solange $|u(s, u_0)| < \eta$ ist)

$$\begin{aligned} |u(t, u_0)| &\leq M_\alpha e^{\alpha t}\delta + M_\alpha L\eta \int_0^t e^{\alpha(t-s)}ds \\ &< \frac{1}{2}\eta + M_\alpha L\eta \frac{1}{|\alpha|}(1 - e^{\alpha t}) \\ &< \frac{1}{2}\eta + M_\alpha L\eta \frac{1}{|\alpha|} \\ &< \eta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit hat man die Stabilität, denn angenommen es gäbe eine Zahl $t^* > 0$ mit $|u(t^*, u_0)| = \eta$, dann kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß t^* minimal gewählt wurde. Dann ist für $t \in (0, t^*)$ $|u(t, u_0)| < \eta$. Unsere Abschätzung garantiert, daß auch noch für $t = t^*$ die Lösung $u(t, u_0)$ in $B_\eta(0)$ enthalten ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch. Um die asymptotische Stabilität zu zeigen, nutzen wir die Formel (3.34) und schätzen etwas anders ab:

$$|u(t, u_0)| \leq M_\alpha e^{\alpha t}\delta + M_\alpha L \int_0^t e^{\alpha(t-s)}|u(s, u_0)|ds. \tag{3.35}$$

Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$ liefert für die Funktion $v(t) = e^{-\alpha t}|u(t, u_0)|$ die Abschätzung

$$v(t) \leq M_\alpha \delta + M_\alpha L \int_0^t v(s) ds.$$

Hier verwenden wir das Lemma von Gronwall[1] und erhalten

$$v(t) \leq M_\alpha \delta e^{M_\alpha L t}.$$

Damit ergibt sich für $u(t, u_0)$ die Abschätzung

$$|u(t, u_0)| \leq M_\alpha \delta e^{(M_\alpha L + \alpha)t}.$$

Da $M_\alpha L + \alpha < 0$ ist, konvergiert dies gegen Null. Damit ist die asymptotische Stabilität gezeigt. Wir nehmen nun an, daß die Linearisierung einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt. Wir zeigen, daß es eine nichttriviale Lösung $u(t)$ gibt mit $u(t) \to w_0$ für $t \to -\infty$. Daraus folgt dann die Behauptung. Zunächst wollen wir uns überlegen, wie die Aussage des Satzes aus dieser Tatsache folgt. Dann werden wir dies als eigenes Lemma formulieren. Sei $u(t)$ eine Lösung mit $u(t) \to w_0 = 0$ für $t \to -\infty$. Sei $\varepsilon = |u(0)| > 0$. (Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß 0 im maximalen Existenzintervall enthalten ist.) Angenommen es existierte ein $\delta > 0$, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgen würde $|u(t, u_0)| < \varepsilon$, so würde $|u(t)| > \delta \ \forall t \leq 0$ folgen. Dies ist ein Widerspruch. Wie angekündigt wollen wir die Existenz von $u(t)$ getrennt zeigen. $\square$

Definition 3.3.1.5 Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann bezeichnen wir mit E^+ die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit positivem Realteil, entsprechend mit E^- die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit negativem Realteil, und E^0 entsprechend mit Realteil 0. P^+, P^-, P^0 schreiben wir für die orthogonalen Projektoren auf diese Räume. Weiter seien $Q^+ = I - P^+$, $Q^- = I - P^-$ die entsprechenden komplementären Operatoren. Weiterhin wollen wir vereinbaren, daß $\sigma^+(A)$ für $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ steht und ganz entsprechend $\sigma^0(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$, bzw. $\sigma^-(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$ definiert sind.

Lemma 3.3.1.6 Die Räume E^+, E^- und E^0 sind invariante Unterräume für A, d.h. $AE^+ \subset E^+$, $AE^- \subset E^-$ und schließlich $AE^0 \subset E^0$.

<u>Beweis:</u> Folgt sofort aus der Definition der Räume. $\square$

Definition 3.3.1.7 Die Einschränkungen von A auf die verschiedenen Unterräume wollen wir folgendermaßen bezeichnen:

$$\begin{aligned} A_u &= A_{|E^+} \\ A_s &= A_{|E^-} \\ A_c &= A_{|E^0} \\ A_{cu} &= A_{|E^0 \oplus E^+} \\ A_{cs} &= A_{|E^0 \oplus E^-} \end{aligned}$$

[1] Thomas Hakon Gronwall, (16.1.1877-9.5.1932), geboren in Schweden, Mathematiker und Ingenieur, Studium in Uppsala und Berlin, ab 1913 in Princeton Professor für Mathematik, ab 1922 in New York

Lemma 3.3.1.8 (a) Die jeweiligen Spektren dieser lineare Abbildungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\sigma(A_u) &= \sigma^+(A)\\ \sigma(A_s) &= \sigma^-(A)\\ \sigma(A_c) &= \sigma^0(A)\\ \sigma(A_{cu}) &= \sigma^0(A)\cup\sigma^+(A)\\ \sigma(A_{cs}) &= \sigma^0(A)\cup\sigma^-(A).\end{aligned}$$

(b) Die Matrixexponentialfunktionen der Einschränkungen $A_u,\ A_{cs}$ genügen den Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\forall\beta<\frac{1}{3}\min\{\mathrm{Re}(\lambda)\mid\lambda\in\sigma^+(A)\}\quad \exists N_{3\beta}\geq 1\quad \|E(A_u,t)\|\leq N_{3\beta}e^{3\beta t}\ \forall t\leq 0\\ \forall\alpha>0\quad \exists M_\alpha\geq 1\quad \|E(A_{cs},t)\|\leq M_\alpha e^{\alpha t}\ \forall t>0.\end{aligned}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 3.3.1.2. □

Bemerkung: Ähnliche Abschätzungen gelten natürlich auch für die anderen Teile von A. Außerdem kann man eine solche Dreiteilung auch an anderen Achsen als der imaginären Achse vornehmen.

Satz 3.3.1.9 Sei $\dot{u}=Au+g(u)$ eine autonome Differentialgleichung mit stetig differenzierbarem $g:U\to\mathbb{R}^n$ und $g(0)=0$, $Dg(0)=0$. Hat A Eigenwerte mit positivem Realteil, so existiert eine Umgebung $B_\delta(0)$, so daß zu jedem $u_0\in B_\delta(0)\cap E^+$ eine Lösung $u(t)$ existiert mit

1. $P^+u(0)=u_0$
2. $u(t)\to 0$ für $t\to-\infty$.

Beweis: Wähle ein

$$\alpha\in(0,\frac{1}{3}\min\{\mathrm{Re}(\lambda)\mid\lambda\in\sigma^+(A)\}).$$

Dann gibt es nach dem oben angegebenen Lemma 3.3.1.8 Zahlen M_α und $N_{3\alpha}$ mit den entsprechenden Abschätzungen $\|E(A_{cs},t)\|\leq M_\alpha e^\alpha t$ für positive t und

$$\|E(A_u,t)\|\leq N_{3\alpha}e^{3\alpha t}$$

füer nichtpositive t. Setze

$$M=\max\{M_\alpha,N_{3\alpha}\}.$$

Damit gilt $\|E(P^+A,t)P^+\|\leq Me^{3\alpha t}$ für $t\leq 0$ und $\|E(Q^+A,t)Q^+\|\leq Me^{\alpha t}$ für $t>0$. Wir wählen $\eta>0$ so klein, daß

$$\frac{ML(\eta)}{\alpha}<\frac{1}{2}$$

ist, wobei $L(\eta)$ die Lipschitz Konstante von g auf $B_\eta(0)$ ist. Wir betrachten den Raum der Funktionen

$$C^\alpha(u_0)=\{u:(-\infty,0]\to U\mid u\text{ ist stetig, }|u(t)|<\eta e^{2\alpha t}<\infty,\ P^+u(0)=u_0\}.$$

Auf $C^\alpha(u_0)$ definieren wir eine Metrik d^α durch

$$d^\alpha(u,v) = \eta \sup \{|u(t) - v(t)| e^{2\alpha t} \mid t \leq 0\}.$$

Wir setzen für $t \leq 0$

$$Tu(t) = e^{P^+ A t} u_0 - \int_0^t e^{P^+ A(t-s)} P^+ g(u(s)) ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+ A(t-s)} Q^+ g(u(s)) ds. \tag{3.36}$$

Wir müssen für ein genügend kleines $\delta > 0$ drei Dinge beweisen:

1. T bildet für $|u_0| < \delta$ $C^\alpha(u_0)$ in sich ab.
2. T ist eine starke Kontraktion.
3. Der Fixpunkt u hat die gewünschten Eigenschaften.

1.) T bildet den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab. Die Stetigkeit von Tu ist klar, sofern die Integrale existieren. Auch die letzte Eigenschaft ist offensichtlich

$$P^+ Tu(0) = P^+ E(P^+ A, 0) u_0 + P^+ \int_{-\infty}^0 E(Q^+ A, -s) Q^+ g(u(s)) ds.$$

Dies ist gleich $P^+ u_0$. Bleibt die Beschränktheit von Tu zu zeigen. Dazu schätzen wir ab:

$$|Tu(t)| \leq \|e^{P^+ A t}\| \, |u_0| + \int_t^0 \|e^{P^+ A(t-s)}\| \|P^+\| L(\eta) |u(s)| ds + \int_{-\infty}^t \|e^{Q^+ A(t-s)}\| \|Q^+\| L(\eta) |u(s)| ds.$$

Einsetzen ergibt (Dabei beachte man, daß im zweiten Integral die Zeitdifferenz positiv, im dritten negativ ist. Außerdem gilt $\|P^+\| = \|Q^+\| = 1$, solange nicht einer der Spektralanteile leer ist, doch dann verschwindet das entsprechende (dritte) Integral ganz.)

$$|Tu(t)| \leq M e^{\alpha t} |u_0| + M L(\eta) \left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} |u(s)| ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} |u(s)| ds \right).$$

Wegen der Wachstumsbeschränkung in C^α kann man weiter abschätzen

$$|Tu(t)| \leq M e^{3\alpha t} |u_0| + M L(\eta) \eta \left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} e^{2\alpha s} ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} e^{2\alpha s} ds \right).$$

Wir betrachten zunächst das zweite Integral, es liefert folgenden Beitrag:

$$e^{3\alpha t} \int_t^0 e^{-3\alpha s} e^{2\alpha s} ds = e^{3\alpha t} \frac{1}{-\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Dies ergibt als obere Abschätzung für das erste Integral

$$\frac{1}{\alpha} (e^{2\alpha t} - e^{3\alpha t}).$$

Für das zweite Integral erhält man

$$e^{\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} ds \leq \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha t}.$$

Zusammen ergibt sich die endgültige Abschätzung

$$\|Tu(t)\| \leq Me^{3\alpha t}|u_0| + ML(\eta)\eta\frac{1}{\alpha}e^{2\alpha t} - \frac{ML(\eta)\eta}{\alpha}e^{3\alpha t}.$$

Mit $\delta < \frac{L(\eta)\eta}{\alpha}$ und der Wahl von η erhält man

$$|Tu(t)| \leq \eta e^{2\alpha t}.$$

Damit haben wir den ersten Schritt abgeschlossen.
2.) Seien $u_1,\ u_2 \in C^\alpha(u_0)$. Wir müssen den Abstand $d^\alpha(Tu_1, Tu_2)$ kontrollieren. Also

$$d^\alpha(Tu, Tv) = \eta \sup\{|Tu(t) - Tv(t)|e^{2\alpha t} \mid t \leq 0\}.$$

Die Differenz $Tu(t) - Tv(t)$ hat die Form

$$Tu(t) - Tv(t) = -\int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+(g(u(s)) - g(v(s)))ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+(g(u(s)) - g(v(s)))ds.$$

Übergang zu den Normen und die grundlegenden Abschätzungen ergeben

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq ML(\eta)\left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}|u(s) - v(s)|ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}|u(s) - v(s)|ds\right).$$

Wir betrachten wieder die beiden Integrale getrennt und multiplizieren zunächst mit $\eta e^{2\alpha t}$. Für das erste Integral erhalten wir

$$e^{2\alpha t}\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{-2\alpha s}e^{2\alpha s}|u(s) - v(s)|ds \leq e^{5\alpha t}\int_t^0 e^{-5\alpha s}ds\, d^\alpha(u, v).$$

Damit ergibt sich für das erste Integral die Abschätzung

$$e^{2\alpha t}\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{-2\alpha s}e^{2\alpha s}|u(s) - v(s)|ds \leq \frac{1}{5\alpha}d^\alpha(u, v).$$

Für das zweite erhalten wir

$$e^{2\alpha t}\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}|u(s) - v(s)|ds.$$

Wie oben ergibt sich dafür

$$\int_{-\infty}^t e^{2\alpha(t-s)}d^\alpha(u, v) \leq \frac{1}{2\alpha}d^\alpha(u, v).$$

Insgesamt haben wir

$$d^\alpha(Tu, Tv) \leq ML(\eta)\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{5\alpha}\right)d^\alpha(u, v) < \frac{ML(\eta)}{\alpha}d^\alpha(u, v).$$

Nach der Wahl von $L(\eta)$ ist damit

$$d^\alpha(Tu, Tv) \leq \frac{1}{2}d^\alpha(u, v)$$

und T ist eine starke Kontraktion.
3.) Sei $Tu = u$. Wir müssen zeigen, daß u die Differentialgleichung löst, und das richtige Verhalten für $t \to -\infty$ zeigt. Letzteres ist aufgrund der Definition von C^α klar. Daß u die Differentialgleichung löst folgt aus der Invarianz der Unterräume und der Tatsache, daß man die Differentialgleichung in ein gekoppeltes System auf den Unterräumen äquivalent umschreiben kann. □

Bemerkung: Die dritte Aussage, die wir im ersten Satz über Spektrum und Stabilität (im linearen Fall) gemacht haben, hat keine Übertragung auf die gegenwärtige Situation. Hat A Eigenwerte auf der imaginären Achse, so kann u_0 asymptotisch stabil, stabil aber nicht asymptotisch stabil oder auch instabil sein. Drei triviale Fälle die dies erläutern sind $\dot{u} = -u^3$, $\dot{u} = 0$ und schließlich $\dot{u} = u^2$. Im ersten Fall ist $u_0 = 0$ asymptotisch stabil, im zweiten stabil aber nicht asymptotisch stabil und im dritten Fall instabil.

Definition 3.3.1.10 Sei $\dot{u} = f(u)$ wie im Satz und w_0 eine Ruhelage, so daß $A = Df(w_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, so nennt man die Ruhelage *hyperbolisch*.

Beispiel: [Lorenz Gleichungen] Wir betrachten das dreidimensionale System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Dabei seien b, r, σ drei positive reelle Zahlen. Für Ruhelagen erhält man aus der ersten Gleichung $x = y$. Damit ergibt die zweite Gleichung $(r - 1 - z)x = 0$. Die Lösungen dieser Gleichungen sind $x = 0$ oder $z = 1 - r$. Mit der dritten Gleichung erhält man schließlich $x^2 = bz$. Damit ergibt sich als Lösung $x = y = z = 0$ oder

$$x = y, \; z = 1 - r, \; x = \pm\sqrt{b(r-1)}.$$

Damit erkennt man, daß die nichttriviale Lösung nur für $r > 1$ existiert. Für $r < 1$ hat man also nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$ und für $r > 1$ hat man neben dieser trivialen Lösung noch zwei weitere Lösungen. Wir werden die Stabilität der trivialen Lösung ausrechnen. Als Linearisierung bei $x = y = z = 0$ ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Das Spektrum kann man leicht ausrechnen: man hat einen Eigenwert $-b < 0$. Um die Vorzeichen der anderen beiden zu diskutieren betrachten wir $\det A = \sigma(1 - r)$ und $\mathrm{tr} A = -1 - \sigma < 0$. Also ist für $r < 1$ die triviale Ruhelage asymptotisch stabil. Bei $r = 1$, dort wo weitere Lösungen entstehen, verliert diese Lösung die Stabilität, sie wird instabil. Um die Stabilität der neuen Ruhelagen zu bekommen geben wir zunächst die Linearisierung A von f in einem Punkt (x_0, y_0, z_0)

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Die charakteristische Gleichung für diese Eigenwerte lautet

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Man rechnet nach, daß für

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

alle Realteile für die nichttriviale Lösung negativ sind. Für $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ hat man die Stabilität für $1 < r < \frac{470}{19}$. Dort werden auch die nichttrivialen Lösungen instabil. Weitere interessante Phänomene treten auf.

3.3.2 Die Stabilität einer periodischen Lösung

Sei wieder $\dot{u} = f(u)$ die autonome Differentialgleichung (3.29). In diesem Abschnitt betrachten wir einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}$ für (3.29)und eine Lösung $u(t)$ in diesem Orbit. Wie im vorigen Abschnitt für eine Ruhelage wollen wir auch hier den Begriff der Stabilität definieren und Kriterien für verschiedene Formen der Stabilität angeben. Hier ist die Situation naturgemäß etwas komplizierter als im Fall einer Ruhelage.

Definition 3.3.2.1 Der geschlossene Orbit $\mathcal{O}$ heißt *orbital stabil*, wenn $\mathcal{O}$ als Menge stabil im Sinne der Definition 3.2.1.21 ist. Er wird als *orbital asymptotisch stabil* bezeichnet, wenn er stabil und attraktiv im Sinne der Definition 3.2.1.22 ist. Man nennt u it orbital asymptotisch stabil mit asymptotischer Phase, wenn $\mathcal{O}$ asymptotisch stabil ist und es eine Umgebung U von $\mathcal{O}$ gibt, so daß zu jedem Anfangswert $u_0 \in U$ eine Zahl $T(u_0)$ gibt, so daß

$$\lim_{t\to\infty} |u(t - T(u_0) - u(t, t_0)| = 0$$

ist.

Ein geometrischer Zugang zur Stabilitätstheorie periodischer Lösungen geht auf Poincaré zurück. Zunächst konstruiert man sich den sogenannten Poincaré Schnitt und die Poincaré Abbildung. Dabei geht man von der Boebachtung aus, daß jeder Punkt auf einem geschlossenem Orbit regulärer Punkt ist und somit eine Transversale existiert.

Lemma 3.3.2.2 Sei L eine Transversale zum Lipschitz stetigen Vektorfeld f in einem Punkt u_0 auf einem geschlossenem Orbit $\mathcal{O}$. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von u_0, so daß zu jedem Punkt $w \in U_0 \cap L$ ein $t_w > 0$ existiert, so daß $u(t_w, w) \in L$ ist, aber für $t \in (0, t_w)$ die Lösung $u(t) \notin L$ ist.

Beweis: Folgt sofort aus dem Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten. □

Definition 3.3.2.3 Eine Transversale L, wie sie im vorherigen Lemma angegeben war heißt *Poincaré Schnitt.*Die Poincaré-Abbildung $\Pi : L \cap U_0 \to L : w \mapsto u(t_w, w)$ *Poincaré Abbildung* oder auch *Wiederkehrabbildung,* engl. *return map*

Die Poincaré Abbildung gibt uns ein einfaches geometrisches Kriterium, das auch für theoretische Untersuchungen von Bedeutung ist, für die Stabilität einer periodischen Lösung.

Satz 3.3.2.4 Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$, u_0 ein (regulärer) Punkt auf $\mathcal{O}$. Sei L ein Poincaré Schnitt mit Poincaré Abbildung Π. Dann gilt

1. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $w \in L$ und $|w - u_0| < \delta$ implizieren, so daß die Iterierten $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind und gilt $|\Pi^n(w) - u_0| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathcal{O}$ orbital stabil.

2. Ist $calO$ orbital stabil und gibt es eine Umgebung U_1 von u_0, so daß aus $w \in U_1$ folgt, daß $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist und für $n \to \infty$ gegen u_0 konvergiert, so ist $\mathcal{O}$ orbital asymptotisch stabil.

3. Gibt es ein w, so daß $\Pi^{-n}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren und gegen u_0 für $n \to -\infty$ konvergieren so ist $\mathcal{O}$ instabil.

Beweis: Folgt offensichtlich aus der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten! □

Um ein eher algebraisches Kriterium zu erhalten müssen wir uns noch einmal Gedanken über Übergangsmatrizen machen.

Definition 3.3.2.5 Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ stetig, in der ersten Komponente Lipschitz stetig mit $ft, 0) = 0$. Die Ruhelage $u = 0$ der Gleichung (2.1) nennt man *stabil*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgt, daß $|u(t, t_0, u_0)| < \varepsilon$ für alle $t > t_0$. Kann δ unabhängig von t_0 gewählt werden so spricht man von *gleichmäßiger Stabilität*. Entsprechend definiert man *asymptotisch stabil* wenn es ein $\delta_1(t_0) > 0$ gibt, so daß aus $|u_0| < \delta_1(t_0)$ folgt $u(t, t_0, u_0) \to 0$. Man nennt u_0 *instabil*, wenn es nicht stabil ist. Bei der Definition gleichmäßiger asymptotischer Stabilität verlangt man, daß 0 stabil und asymptotisch stabil ist, und die Zahl $\delta_1 = \delta_1(t_0)$, unabhängig von t_0 gewählt werden kann und schließlich zu jeder positiven Zahl $\eta > 0$ eine Zeit $T(\eta)$ gefunden weren kann , so daß $|u(t + T(\eta), t_0, u_0)| < \eta$ ist, solange nur $|u_0| < \delta_1$ ist. Man überträgt diese Begriffe auf beliebige Lösungen indem man für eine Lösung $u(t)$ das System $\dot{y} = f(u(t) + y, t))f(u(t), t)$ betrachtet.

Lemma 3.3.2.6 Jede Lösung von $\dot{u} = A(t)u$ hat die gleichen Stabilitätseigenschaften.

Beweis: Folgt aus der Linearität. □

Bemerkung: Aus diesem Grunde sagt man auch das System (3.12) $\dot{u} = A(t)u$ ist stabil, asymptotisch stabil oder instabil.

Satz 3.3.2.7 Sei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig. Sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix für $\dot{u} = A(t)u$ und β sei eine beliebige reelle Zahl. Dann ist das System $\dot{u} = A(t)u$

1. stabil, wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Konstante $K(t_0)$ gibt mit $\|\Phi(t)\| \leq K(t_0)$ für alle $t \geq t_0$.

2. gleichmäßig stabil für $t_0 \geq \beta$, wenn es eine Konstante $K(\beta)$ gibt, so daß für $t_0 \geq \beta$ und $t_0 \leq s \leq t$ gilt
$$\|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq K(\beta).$$

3. asymptotisch stabil für $t_0 \in (-\infty, \infty)$, genau dann wenn
$$\|\Phi(t)\| \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

4. gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ genau dann wenn es Konstanten $K = K(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ gibt mit
$$\|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq Ke^{-alpha(t-s)}, \text{ für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Beweis: 1.) Die Rückrichtung folgt einfach aus der Darstellung der Lösung: sei $u(t)$ eine Lösung, so ist $u(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u(t_0)$. Sei $M = |\Phi(t_0)^{-1}|$. Dann ist $|u(t)| \leq K(t_0)M|\ |u(t_0)|$. Wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{K(t_0)L}$ so hat man die Stabilitätsbedingung erfüllt. Die Hinrichtung ist auch nahezu offensichtlich. Stabilität besagt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $|u_0| < \delta$ die Norm $|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u_0| < \varepsilon$ beschränkt bleibt. Angenommen es gäbe eine Folge u_ν, t_ν, so daß
$$\Phi(t_\nu)u_\nu \to_{\nu\to\infty} \infty$$
konvergiert. Dann hat $\tilde{u_\nu} = \frac{1}{2}\delta\frac{u_\nu}{\Phi}(t_0)|u_\nu|$ die Norm $\frac{\delta}{2}$ und $|\Phi(t_\nu)\Phi(t_0)^{-1}\tilde{u_\nu}| \geq \varepsilon$ für genügend großes ν.
2.) Beide Richtungen können wie im ersten Teil durchgeführt werden, hier hängt für $t_0 \geq \beta$ δ nicht von t_0 ab.
3.) Als erstes folgt aus der Abklingbedingung die Beschränktheit von $\|\Phi(t)\|$ und damit die Stabilität. Die Asymptotik erhält man wie im ersten Beweisschritt. Die Umkehrung folgt auch wie oben.
4.) Ist die angegebene Bedingung erfüllt, so konvergiert $\|\Phi(t)\| \to 0$ für $t \to \infty$ und aus 2.) folgt die Stabilität. Aus dem dritten Schritt erhält man die asymptotische Stabilität. Sei $|u(t_0) \leq 1$ und $\eta \in (0, K)$. Setze
$$T = -\frac{\log(\eta/K)}{\alpha}.$$
Dann ist für $t \geq t_0 + T$
$$|u(t)| = |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|u(t_0)| < \eta.$$

Hier ist die Umkehrung schwieriger. Wir nehmen also an, daß die Nulllösung gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ ist. Insbesondere existiert ein $b > 0$, so daß zu jedem $\eta < b$ ein $T = T(\eta)$ existiert mit
$$|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq \eta, t \geq t_0 + T,\ t_0 > \beta,\ |u(t_0)| < b.$$
Daher ist
$$\|\Phi(t+T)\Phi(t_0)^{-1}\| < \frac{\eta}{b} < 1 \quad \text{für } t \geq \beta.$$
Aufgrund der gleichmäßigen Stabilität existiert ein $M = M(\beta)$ mit
$$\|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq M, \text{ für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$
Setze
$$\alpha = -T^{-1}\log(\frac{\eta}{b})$$

und

$$K = Me^{\alpha T}.$$

Dann gibt es zu jedem $t \geq t_0$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $kT \leq t - t_0 < (k+1)T$. Daher gilt dann

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\| &= \|\Phi(t)\Phi(t_0+kT)^{-1}\Phi(t_0+kT)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq \|\Phi(t)\Phi(t_0+kT)^{-1}\| \, \|\Phi(t_0+kT)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M \, \|\Phi(t_0+Tk)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M \, \|\Phi(t_0+Tk)\Phi(t_0+(k-1)T)^{-1}\Phi(t_0+(k-1)T)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M \, \frac{\eta}{b}\|\Phi(t_0+(k-1)T)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\vdots \quad \vdots \\
&\leq M(\frac{\eta}{b})^k \\
&\leq Me^{-\alpha kT} \\
&= Ke^{-\alpha(k+1)T} \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}
\end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. □

Wir betrachten nun die homogene, lineare Gleichung

$$\dot{u} = A(t)u, \tag{3.40}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\exists T > 0 \;\text{ mit } A(t+T) = A(t) \;\forall t \in \mathbb{R},$$

wobei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oder $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ eine stetige Abbildung ist. Der Zusammenhang mit periodischen Lösungen wird in kürze klar werden.

Lemma 3.3.2.8 Zu jeder komplexen $n \times n$ Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $\det A \neq 0$ gibt es eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $e^B = E(B,1) = A$.

<u>Beweis:</u> Ist $e^B = A$, so gilt für jede nichtsinguläre Matrix C

$$e^{C^{-1}BC} = C^{-1}AC.$$

Daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit wenn wir annehmen, daß A in Jordan'scher Normalform gegeben ist. Also hat A die Gestalt (3.2) mit Jordan Blöcken der Form (3.3). Jeden Block der Form (3.3) schreiben wir in der Gestalt

$$\mathcal{B}_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k,$$

wobei N_k der nilpotente Anteil ist. Aufgrund der Annahme, daß die Determinante von A von Null verschieden ist, ist auch $\lambda_k \neq 0$. Wir geben nun eine Matrix B_k an, so daß $e^{B_k} = \mathcal{B}_k$ ist. Wir schreiben $\mathcal{B}_k$ in der Form $\mathcal{B}_k = \lambda_k(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda_k}N_k$. Dann ist $B_k = (\log \lambda_k)\mathbb{1} + S_k$ mit

$$S_k = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j\lambda^j}.$$

Einsetzen in die Potenzreihe gibt das gewünschte Resultat. □

Satz 3.3.2.9 [*Floquet*] Sei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig und T-periodisch. Jede Fundamentalmatrix der Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ hat die Form

$$\Phi(t) = P(t)E(B, t),$$

wobei B eine konstante und P eine T-periodische Matrix ist.

Beweis: Ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist $\Phi(t + T)$ auch eine Fundamentalmatrix. Daher gibt es eine nichtsinguläre Matrix C mit

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C.$$

Nach Lemma 3.3.2.8 gibt es eine Matrix B mit $e^B = C$. Setze

$$P(t) = \Phi(t)E(B, -t).$$

Dann hat man

$$P(t + T) = \Phi(t + T)E(B, -(t + T)) = \Phi(t)E(B, T)E(B, -(t + T)) = P(t).$$

$\square$

Korollar 3.3.2.10 [Transformation zu konstanten Koeffizienten] Zu T-periodischem $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt es eine nichtsinguläre periodische Koordinatentransformation $P : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ welche die Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten überführt.

Beweis: Seien P, B wie im Satz 3.3.2.9. Wir setzen $w = P(t)u$. Die Differentialgleichung für w ist dann

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - \dot{P}(t))w.$$

Da $P(t) = X(t)E(B, -t)$ ist, hat man $\dot{P} = A(t)P(t) - P(t)B)$. Einsetzen gibt

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - A(t)P(t) + P(t)B) = Bw.$$

Die rechte Seite hängt nicht von t ab. $\square$

Definition 3.3.2.11 Gegeben sei das homogene, lineare System (3.12) $\dot{u} = A(t)u$ mit T-periodischem $A : \mathbb{R} \to calL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt eine Matrix C, die für eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ des angegebenen Systems der Beziehung

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C$$

genügt eine *Monodromiematrix* von (3.12). Die Eigenwerte ρ_j einer Monodromiematrix heißen *charakteristische Multiplikatoren* von (3.12). Ist ρ ein charakteristischer Multiplikator und $\rho = e^{\lambda T}$, so wird λ als *charakteristischer Exponent* bezeichnet.

Bemerkung: Die charakteristischen Exponenten sind nicht eindeutig bestimmt, die Multiplikatoren jedoch schon. Die charakteristischen Multiplikatoren hngen nicht von der gewhlten Fundamentalmatrix ab.

Lemma 3.3.2.12 Eine komplexe Zahl λ ist charakteristischer Exponent der Gleichung (3.12) mit einer T-periodischen rechten Seite A, falls das System (3.12) eine nichttiviale Lsung $p(t)e^{\lambda t}$ besitzt, wobei p periodisch mit Periode T ist. Speziell gibt es genau dann eine nichttriviale Lsung $u(t)$ mit Periode T (bzw. $2T$) wenn es den Multiplikator 1 (bzw. -1) gibt.

Beweis: Sei $e^{\lambda t}p(t)$ eine solche Lsung. Dann gibt es einu_0 und eine Fundamentalmatrix $X(t)$ mit $e^{\lambda t}p(t) = X(t)u_0$. Nach dem Satz von Floquet 3.3.2.9 kann $X(t)$ in der Form $P(t)E(B,t)$ geschrieben werden. Also ist $e^{\lambda t}p(t) = P(t)E(B,t)u_0$.Da $P(t+T() = P(t)$ und $p(t+T) = p(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ hat man

$$e^{\lambda(t+T)}p(t+T) = P(t+T)E(B,t+T)u_0$$

und daher ist

$$e^{\lambda t}e^{\lambda T}p(t) = P(t)E(B,t)E(B,T)u_0.$$

Also gilt

$$e^{\lambda t}e^{\lambda T}P(t)E(B,t)u_0 = P(t)E(B,t)E(B,T).$$

Zzusammen genommen ist

$$P(t)E(B,t)\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)u_0 = 0.$$

Daher ist $\det\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\mathbb{1}\right) = 0$. Für die Umkehrung beachtet man einfach, daß aus dem Verschwinden von $\det\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)$ die Existenz eines Vektors U_0 folgt mit $\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)u_0 = 0$. Man kann sogar λ und u_0 so wählen, daß λ Eigenwert von B ist. Dann ist

$$E(B,t)u_0 = e^{\lambda t}u_0$$

und $P(t)E(B,t)u_0$ ist die gewünschte Lösung. □

Lemma 3.3.2.13 Seien $\rho_j = e^{\lambda_j T}$ die charakteristischen Multiplikatoren. Dann ist

$$\Pi_{j=1}^{n}\rho_j = \int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} = \frac{1}{T}\int_{=}^{T} \operatorname{tr} A(s)ds \bmod \left(\frac{2\pi i}{T}\right).$$

Beweis: Sei $X(t)$ die Fundamentalmatrix mit Anfangswert $X(0) = \mathbb{1}$. Dann ist

$$\det C = \det X(T) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds\right).$$

Daraus folgt alles weitere. □

Als Hauptsatz über lineare periodische Systeme ergibt sich

Satz 3.3.2.14 (a) Das lineare, homogene periodische System $\dot{u} = A(t)u$ ist genau dann stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren betragsmäßig kleiner oder gleich eins sind und die die dem Betrage nach eins sind gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.
(b) Das System ist genau dann gleichmässig asymptotisch stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner eins sind. In diesem Fall kann man eine Fundamentalmatrix abschätzen:

$$\exists K > 0, \alpha < 0 \text{ mit } t - s \geq 0 \Longrightarrow \|X(t)X(s)^{-1}\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}.$$

Beweis: Benutzt im wesentlichen die Ideen wie im autonomen Fall. □

Als Stabilitätskriterium für geschlossene Orbits erhält man schließlich den

Satz 3.3.2.15 Sei $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der autonomen Gleichung $\dot{u} = f(u)$, wobei die rechte Seite als genügend glatt vorausgesetzt werde. Dann hat $\mathcal{O}$ genau die Stabilitätseigenschaften des linearen homogenen periodischen Systems

$$\dot{y} = Df(u(t))y,$$

wobei $u(t)$ eine Lösung om Orbit $\mathcal{O}$ ist.

3.3.3 Aufgaben

Aufgabe 3.3.3.1 Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Matrix, deren Eigenwerte alle nicht positiven Realteil besitzen. Man betrachte die homogene, lineare Gleichung $\dot{u} = Au$ und zeige, daß die Ruhelage $u = 0$ genau dann stabil ist, wenn alle Eigenwerte auf der imaginären Achse gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.

Aufgabe 3.3.3.2 Man zeige, daß eine Ruhelage w_0 einer autonomen Gleichung genau dann instabil ist, wenn es eine nichtkonstante Lösung $u(t, u_0)$ gibt mit $w_0 \in \alpha(u_0)$.

Aufgabe 3.3.3.3 *Man zeige, daß im Korollar 3.3.2.10 die Matrix B reell gewählt werden kann, wenn A eine reelle Matrix ist. In diesem Fall muß man zulassen, daß P die doppelte Periode wie A hat.*

Literaturverzeichnis

[1] Arnol'd, V.I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1979)

[2] Bröcker, T., Jänich, K.: Differentialtopologie, Heidelberger Taschenbücher, Springer Verlag (19)

[3] Chillingworth, D.R.J.: Differential Topology

[4] Dym, McKean, Trigonometric Series and Integrals,

[5] Heuser, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. G. Teubner, Stuttgart (1979)

[6] Deimling, K., Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1974)