Prof. Dr. Reiner Lauterbach Wintersemester 2014/2015

Analysis 1
Übungen – Blatt 1

Multiple Choice 1. 1. Ein Beweis mit vollständiger Induktion kann mit jeder nichtnegativen ganzen Zahl als Induktionsanfang beginnen.

2. Ein Beweis mit vollständiger Induktion kann auch mit jeder negativen ganzen Zahl als Induktionsanfang beginnen.

3.
$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.
$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } 2|n \\ \frac{n-1}{2} & \text{falls } 2\not|n \end{cases}$$

Multiple Choice 2. Jeder erfolgreicher Durchgang von Türme von Hanoi erfordert eine ungerade Anzahl von Zügen. Darunter verstehen wir, dass der Turm von einem vorgegebenem Feld auf ein anderes vorgegebenes Feld bewegt wird.

Multiple Choice 3. 1. Es sei $0.\bar{9}$ der Dezimalbruch, der periodisch die Zahl 9 wiederholt, also $0.\bar{9} = 0.99999\ldots$. Gilt $1 > 0.\bar{9}$?

2. Der Mathematiker de Morgan ist im Jahr 1806 geboren und war demzufolge im Jahr 1849 genau 43 Jahre alt. Er hielt sich für besonders ausgezeichnet, weil $1849 = 43^2$ ist. Gibt es Menschen, die im zwanzigsten Jahrhundert geboren wurden, die die gleiche Auszeichnung erlebt haben, oder sich darauf freuen dürfen, diese zu erleben?

3. Es gibt eine kleinste positive reelle Zahl.

4. Es gibt eine kleinste positive rationale Zahl.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** In einer Übungsaufgabe in Forster Analysis I wird behauptet, dass im gregorianischen Kalender (unser Kalender mit der strikten Regelung eines Schalttages in Jahren, deren Jahreszahl durch 4 teilbar ist, der in den vollen Jahrhunderten, deren Jahreszahl nicht durch 400 teilbar sind, ausfällt) der 13. eines Monats langfristig häufiger auf einen Freitag fällt als auf die anderen Wochentage. Kann eine solche Behauptung überhaupt stimmen? Wenn ja, warum? Stimmt sie? (Für die letzte Frage beachte man z. B., dass der 1.1.2008 ein Dienstag war.)

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** In der Volksrepublik China gibt es ein Gesetz, das vorschreibt, dass jede Familie höchstens ein Kind haben darf. Aus traditionellen Gründen wünschen sich die Familien aber mindestens einen Sohn. Viele Familien suchen nach einem Kompromiss zwischen Gesetz und Tradition: erst nach der Geburt eines Sohnes verzichten sie auf weiteren Nachwuchs. Nehmen wir an, eine Gesellschaft würde Ihre Familienplanung konsequent nach diesem Kompromiss ausrichten, und nehmen wir weiter an, dass bei jeder Geburt die Wahrscheinlichkeit eines Mädchens und eines Jungens gleich ist. Führt diese Strategie dann zu überwiegend männlichen oder überwiegend weiblichen Nachkommen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Finden Sie einen Ausdruck für die folgende Summe und beweisen Sie die daraus entstehende Behauptung mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

1. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ Zahlen mit $a_j < b_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist
$$a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n.$$
2. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ Zahlen mit $0 < a_j < b_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist
$$a_1 \cdot \cdots \cdot a_n < b_1 \cdot \cdots \cdot b_n.$$
3. Es sei $p \geq 2$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$p^n > n.$$
4. Es sei $p \geq 3$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$p^n > n^2.$$
5. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ gilt
$$2^n > n^2.$$

Die Aufgaben sind fällig am 20. Oktober 2014.