Analysis I

Vorlesung

Reiner Lauterbach

$$\boxed{e^{\mathtt{i}\pi} + 1 = 0}$$

Universität Hamburg, 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Vorlesung Analysis I legen wir, zusammen mit dem Kollegen in der Linearen Algebra I die Grundlagen Ihrer mathematischen Ausbildung. Sie werden die Mathematik als strenge Wissenschaft kennenlernen, die Ihnen manches abverlangen wird. Die Strenge rührt von einem logischen Aufbau, der Neues nur zulässt wenn es nach den Regeln der Logik aus dem bisher erkannten abgeleitet werden kann. Dabei haben sich im Laufe der letzten Jahrhunderte einige Techniken entwickelt, die dem Eingeweihten fast als banal vorkommen, dem Neuling jedoch als sehr schwer verständlich erscheinen. Natürlich ist es wichtig, dass Sie die Techniken, die logischen Regeln und die Formalitäten beherrschen lernen, denn dies ist das Handwerkszeug, man braucht es immer wieder. Dabei sollten Sie nie vergessen, dass Mathematik auch einen Inhalt hat, der schön bzw. ästhetisch ist, der spannend sein kann und der enorm hilft unsere Umwelt zu verstehen, denn viele Phänomene und Probleme aus unserer Umgebung lassen sich in der Sprache der Mathematik formulieren, in der Schule haben Sie dies vielleicht am Beispiel der Physik erleben können. Dies trifft aber ebenso auf andere Wissenschaften zu: Biologie, Chemie, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Informatik, ja sogar sogar mit Einschränkungen auf die Sprachwissenschaften und die Linguistik. Aus meiner eigenen Ausbildung heraus bin ich geneigt Anwendungsbeispiele aus der Physik aufzugreifen, ich werde mich bemühen Ihnen auch Beispiele speziell aus den Wirtschaftswissenschaften zu zeigen und damit will ich versuchen, Sie alle davon zu überzeugen, dass Mathematik spannend und anwendbar ist. Wir wollen nicht vergessen, dass die Mathematik in Griechenland nur der Ästhetik halber betrieben wurde. Beide Komponenten, Anwendung und kulturhistorische Bedeutung, sollen zu ihrem Recht kommen. In der Vorlesung werden wir über weite Strecken dem Buch von Otto Forster, Analysis I [6]. Darüber hinaus gibt es eine ganze Reihe hervorragender Bücher zum Thema Analysis, ich möchte nur wenige nennen: [1, 2, 5, 10, 13, 8, 15]. Nicht direkt als Begleitlektüre, jedoch als Nachschlagewerke für später bzw. als weiterführende Bücher zur Analysis möchte ich erwähnen, jedoch explizit nicht dazu ermuntern jetzt schon einen Blick hineinzuwerfen: [3, 7, 11]. Für sehr engagierte Studierende eignet sich vielleicht jetzt schon das schöne Werk von Rudin[14].

Ein sehr schönes Buch zur Einführung in die Logik und Mengenlehre stammt von David Johnson [12].

Sie werden vielleicht am Anfang etwas über unser Vorgehen erstaunt sein: Wir werden viele Dinge, die Sie bereits kennen nochmals betrachten allerdings wollen wir uns eine minimale Menge von Axiomen vorgeben aus denen wir dann alle Aussagen ableiten. Warum sollte man so vorgehen? Eine Frage ist die der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems. Je mehr Axiome man hat, desto schwieriger ist ein solcher Beweis. Allerdings, und dies wissen wir seit dem Wirken von Kurt Gödel (28.4.1906–14.1.1978) [9], kann bei einem hinreichend komplexen Axiomensystem Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen werden und es gibt in jedem solchen System unentscheidbare Aussagen. Für eine Wissenschaft, die ihre Erkenntnisse nicht in der Natur nachprüfen kann, sondern deren Objekte nur in unserer Vorstellung existieren, ist dies essentiell.

Kapitel 1

Natürliche Zahlen und Induktion

Die Analysis beschäftigt sich mit Funktionen und ihren Eigenschaften, sie stellt Beziehungen her zwischen verschiedenen Funktionen und löst daraus resultierende Gleichungen. Eine entscheidende Beobachtung ist die, dass die Definitionenbereiche typischerweise nicht endliche Mengen sind. Also müssen Aussagen über unendliche Mengen gemacht werden. Wie aber kann man Aussagen über unendliche Mengen beweisen. Ein elementares Handwerkszeug auf diesem Weg ist die sogenannte vollständige Induktion. Mit ihr macht man Aussagen über abzählbar unendliche Mengen, das sind solche Mengen, die man eineindeutig auf die natürlichen Zahlen abbilden kann. In diesem ersten Abschnitt wollen wir die natürlichen Zahlen axiomatisch einführen. Zuvor aber ein einfaches Beispiel zur Erklärung der vollständigen Induktion.

Inhalt

1.1 Die Türme von Hanoi

Kennen Sie die Türme von Hanoi? Es geht dabei um die Aufgabe einen Turm von einem Spielfeld auf ein anderes zu versetzen. Ein Turm besteht dabei aus einer bestimmten Zahl von Elementen, die der Größe nach geordnet aufeinandersitzen. Jedes Element ist kleiner als das unter ihm befindliche. Das Spielfeld besteht aus drei Positionen, wobei der Turm zu Beginn des Spiels auf einer der Positionen steht. Die Aufgabe besteht darin, ihn in einzelnen Zügen, wobei pro Zug jeweils nur ein Element bewegt wird, auf eine der beiden anderen Positionen zu verschieben. Dabei dürfen immer nur kleinere Elemente auf größere gestellt werden.

Frage: Geht das Umsetzen immer, kann man die Zielposition beliebig vorschreiben und wie viele Züge $B(n)$, wobei n die Anzahl der Elemente ist, braucht man mindestens?

Wir beginnen mit einem Turm der Höhe 1. Man kann ihn beliebig umsetzen und man braucht dazu einen Zug. Hat man einen Turm mit $n+1$ Elementen und wüsste man, dass man einen n-elementigen Turm in $B(n)$ Zügen beliebig umsetzen kann, so folgt durch Bewegen der oberen n Elemente, gefolgt von einem Zug des untersten Elementes und dann wieder $B(n)$ Züge der oberen n Elemente, dass man den Turm in $B(n+1) = 2 \cdot B(n) + 1$ Zügen beliebig umsetzen kann.

Damit wissen wir $B(2) = 2 \cdot B(1) + 1 = 3$ und 2-elementige Türme sind beliebig versetzbar. Daraus folgt nun mit dem selben Mechanismus $B(3) = 7$ und beliebige Versetzbarkeit von 3-elementigen Türmen. Da dieser Vorgang beliebig oft wiederholt werden kann, erhält man eine beliebige Versetzbarkeit des n-elementigen Turmes und die Tafel

n	B(n)
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255

Man sieht unschwer die Vermutung $B(n) = 2^n - 1$ und die oben angegebene *Rekursionsformel*

$$B(n+1) = 2 \cdot B(n) + 1$$

hilft uns beim Beweis: $B(1) = 1$, angenommen $B(n) = 2^n - 1$, dann ist

$$B(n+1) = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Der letzte Ausdruck ist aber die Formel die die Auswertung von $B(j) = 2^j - 1$ für $j = n+1$ ergibt. Damit haben wir mit dem *Prinzip der vollständigen Induktion* alle Antworten auf die Fragen zum Spiel die Türme von Hanoi gefunden. Nun, von einem strengen Standpunkt aus sind noch ein paar Fragen offen. Um diese Lücke zu füllen, und dies ist vielleicht die erste Begegnung mit dem strengen wissenschaftlichen Vorgehen der Mathematik, wollen wir uns noch ein wenig mit den Grundlagen der natürlichen Zahlen beschäftigen.

1.2 Die natürlichen Zahlen

In dieser Vorlesung setzen wir den *Zahlbegriff* als bekannt voraus, d. h. ich erwarte, dass Ihnen die Zahlbereiche

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{Z} &= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \left\{-n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \\
\mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}\right\} \\
\mathbb{R} &= \,?
\end{aligned}$$

vertraut sind. Ich möchte trotzdem mit einigen grundlegenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen beginnen, denn diese sind Grundlage des *Induktionsbegriffes* und damit Grundlage dieser **fundamentalen Beweistechnik**. Oft vermeidet man in der Mathematik die Definition von Objekten (Gerade, Ebene, Zahl) sondern beschreibt die Menge der Objekte und ihrer Beziehungen axiomatisch. Oft beweist man danach, dass es ein System von Objekten gibt, das dieser axiomatischen Beschreibung entspricht und vielleicht sogar, dass es im wesentlichen (was auch immer dies heißen mag) nur ein solches System gibt. Diese Vorgehensweise ist gewöhnungsbedürftig, aber so erfolgreich, dass man nicht umhin kommt, sich daran zu gewöhnen. Die natürlichen Zahlen werden durch die Axiome von Peano[1] beschrieben, eine Formulierung ist die folgende

Abbildung 1.1: Guiseppe Peano (27.8.1858–20.4.1932)

(P 1) 1 ist eine natürliche Zahl.

(P 2) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen Nachfolger, wir bezeichnen ihn mit n'.

(P 3) Ist $n' = m'$, so ist $n = m$.

[1]Guiseppe Peano (27.8.1858–20.4.1932) war ein berühmter Analytiker, der zunächst durch die Publikation der Vorlesung seines akademischen Lehrers Genocchi auffiel. Das Besondere an der Ausarbeitung sind eine ganze Reihe eigener Erkenntnisse, die darin einfließen und den Grundstein für die Bekanntheit von Guiseppe Peano gelegt haben. Wir werden in dieser Vorlesungsreihe noch öfters auf seinen Namen stoßen.

(P 4) Es gibt keine natürliche Zahl deren Nachfolger 1 ist.

(P 5) Ist $A \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge, so folgt aus

1. $1 \in A$
2. $n \in A$ impliziert $n' \in A$,

dass $A = \mathbb{N}$ ist.

Wir schreiben $1' = 2$, $2' = 3$ usw. Vielleicht empfinden Sie die Aussagen (**P 1**)–(**P 5**) banal, vielleicht sehen Sie keinen Bedarf für eine solche Beschreibung der natürlichen Zahlen. Wir wollen uns darauf verständigen, dass bei Beweisen nur diese Eigenschaften der natürlichen Zahlen verwendet werden dürfen oder Eigenschaften, die wir bereits daraus abgeleitet haben. Dies führt zu größtmöglicher Klarheit in unseren Schlüssen. Jetzt am Anfang erscheint dies vielleicht als übertrieben, wir werden aber bald sehen, dass diese Klarheit nützlich ist, ja sich sogar als hilfreich erweist.

Hier noch ein paar Beispiele von einfachen Induktionsbeweisen.

Satz 1.2.1 (Summation der ersten n Zahlen)

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang: $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Induktionsannahme: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ die Behauptung

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsschluss: Wir schreiben $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Dann gilt aufgrund der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= S(n+1). \end{aligned}$$

Damit folgt aus der Gültigkeit der Behauptung für n auch die für den Nachfolger und damit für alle n. □

Wir werden oft Summen für eine unbestimmte Anzahl von Summanden behandeln müssen. Wir führen dafür eine kompakte Schreibweise ein, die uns von nun ständig begleiten wird.

Definition 1.2.2 (Summenzeichen, rekursive Definition)
Sei eine Folge von Zahlen a_n gegeben, wir schreiben dafür $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Setze

$$\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}.$$

Damit ist für $n \geq 0$ rekursiv die Folge

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

definiert. Man hätte etwas weniger präzise auch schreiben können

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Oft will man auch andere Objekte oder nicht notwendig beginnend mit dem Index 1 summieren. Dann definiert man das Symbol entsprechend, wir wollen dies nicht explizit tun.

Satz 1.2.3 (Summation ungerader Zahlen)

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2.$$

Beweis. Für $n = 1$ erhalten wir die richtige Gleichung $1 = 1$. Wir nehmen nun an, wir hätten die Gleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Sie werden sehen, dass wir auch eine relativ genaue, jedoch abstrakte Beschreibung der reellen Zahlen vornehmen werden. Wir werden zuvor jedoch, um einige Beispiele für abstrakte Konzepte aus dem Ihnen bisher bekannten Umfeld angeben zu können, schon einige (vertraute) Eigenschaften benutzen, die wir erst später vollständig beweisen werden.

1.3 Mengen und Relationen

Wir gehen von einem sogenannten naiven Mengenbegriff aus, eine *Menge* ist eine Ansammlung von unterscheidbaren Objekten, die wir als *Elemente* der Menge bezeichnen. Ist M die in Frage stehende Menge, x ein Objekt, so schreiben für die Beziehung x ist Element von M das Symbol $x \in M$.

Ist x nicht in M, schreiben wir dafür $x \notin M$.

Insbesondere muss für jedes Objekt entscheidbar sein, ob es Element der Menge ist oder auch nicht. Wir wollen gleich Konstruktionen wie die Menge aller Mengen verbieten. Wir erinnern uns an das berühmte Paradoxon, das auf den Logiker und Mathematiker Bertrand Russell[2] zurückgeht. Er beschrieb den Barbier, der alle Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Nehmen wir an, dass er sich selbst nicht rasiert, dann muss er sich nach Definition seiner Kundschaft selbst rasieren, rasiert er sich aber selbst, so darf er sich eben nicht rasieren. Entsprechendes gilt auch für die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Auch davon könnten wir eben nicht entscheiden, ob sie sich als Element enthält oder nicht: Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, ist dann nämlich

$$M \in M, \text{ dann ist nach Definition } M \notin M,$$

und ist $M \notin M$, so folgt $M \in M$. Also führen beide Annahmen $M \in M$ und $M \notin M$ zu einem Widerspruch.

Wir gehen davon aus, dass Mengen intuitiv bekannt sind.

Für die Liste der Elemente einer Menge schreiben wir

$$M = \{a, b, c, \dots\}.$$

Eine alternative Beschreibung erhalten wir durch eine Angabe von Eigenschaften, z. B. beschreibt

$$M = \Big\{ n \in \mathbb{N}, n > 1 \;\Big|\; \mathbb{Z} \ni m \text{ teilt } n \text{ impliziert } m = 1 \text{ oder } m = n \Big\}$$

die Menge der Primzahlen.

[2]Bertrand Arthur William Russell (18.5.1872–2.2.1970) studierte Mathematik und Sozialwissenschaften und wurde Professor an der Universität Cambridge. Im Jahre 1950 erhielt er den Literaturnobelpreis.

Definition 1.3.1 (Teilmenge)

1. *Ist M eine Menge, so heißt eine Menge N* Teilmenge *von M, wenn aus $a \in N$ folgt $a \in M$. Ist N eine Teilmenge von M, so schreiben wir $N \subset M$. Anders ausgedrückt besagt dies, dass jedes Element in N auch in M ist.*

2. *Ist $N \subset M$, so bezeichnen wir mit N^c das Komplement von N in M (falls M von vorneherein klar ist) und definieren dies durch*

$$N^c = \left\{ m \in M \;\middle|\; n \notin N \right\}.$$

Dafür schreiben wir auch $M \setminus N$ (M ohne N).

Anders ausgedrückt besagt dies, dass jedes der Elemente in N auch ein Element von M ist.

Definition 1.3.2 (Leere Menge)
Enthält eine Menge keine Elemente, so sprechen wir von der leeren Menge und schreiben dafür $\emptyset$.

Ein wichtiges logisches Prinzip kommt in der nächsten Aussage zum Tragen.

Lemma 1.3.3 (Leere Menge als Teilmenge)
Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Beweis. Das wichtige logische Prinzip lautet: Ist die Prämisse einer Aussage nicht wahr, so ist die Aussage wahr. Sei M eine beliebige Menge. Wir wollen zeigen $\emptyset \subset M$. Unsere Aussage lautet

$$a \in \emptyset \Rightarrow a \in M.$$

Da die Prämisse $a \in \emptyset$ nicht wahr ist, ist die Implikation wahr. □

Definition 1.3.4 (Schnitt)
Der Schnitt *$M_1 \cap M_2$ zweier Mengen M_1, M_2 ist die Gesamtheit der Elemente, die in beiden Mengen liegen, also*

$$M_1 \cap M_2 = \left\{ x \;\middle|\; x \in M_1 \text{ und } x \in M_2 \right\}.$$

Definition 1.3.5 (Vereinigung)
Entsprechend ist die Vereinigung *$M_1 \cup M_2$ zweier Mengen M_1, M_2 die Gesamtheit der Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen liegen, also*

$$M_1 \cup M_2 = \left\{ x \;\middle|\; x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2 \right\}.$$

Definition 1.3.6 (disjunkte Mengen)
Zwei Mengen M_1, M_2 nennt man disjunkt, wenn $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ist.

Natürlich kann man ganz entsprechend Vereinigung und Schnitte von mehreren, ja sogar von unendlich vielen Mengen definieren, wie könnte eine solche Definition aussehen?

Entsprechend der Einführung in die Logik, wie sie in der Vorlesung Lineare Algebra gegeben wurde, werden wir im folgenden auch die Symbole

$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert
$\neg$	Negation

verwenden.

Man beachte dabei, dass die Verknüpfung zweier Aussagen mit $\wedge$ genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind, während das mathematische oder $\vee$ genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Die Quantoren $\forall$, $\exists$ werden benötigt, wenn man Aussagen macht, die von einem Parameter abhängen: Man muss dazu sagen, ob diese für alle Parameter wahr sind oder ob (mindestens) ein Element existiert, wofür die Aussage wahr ist. Die formale Negierung einer Aussage ist eine wichtige Übung, die in der Vorlesung Lineare Algebra eingeübt wird, für uns aber ebenso wichtig ist wie dort.

Auch die Rechenregeln, die die Vereinigung bzw. die Schnitte von Mengen betreffen, werden in der Vorlesung Lineare Algebra ausführlich besprochen und im Weiteren auch in dieser Vorlesung ohne weitere Bemerkung verwendet.

Definition 1.3.7 (Kartesisches Produkt)
Es seien M_1, M_2 zwei Mengen, das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$, in Zeichen

$$M_1 \times M_2 = \{(a, b) \mid a \in M_1, b \in M_2\}.$$

Geordnet bedeutet dabei, dass die Reihenfolge beachtet werden muss, $(a, b) \neq (b, a)$, falls $a \neq b$.

Wir wollen nun Abbildungen zwischen Mengen definieren. Um zu vermeiden einen unbekannten Ausdruck durch einen anderen unbekannten Ausdruck zu definieren (eine Abbildung ist eine Zuordnung ...), wollen wir einen Weg gehen, der zunächst seltsam anmutet, dafür aber logisch klar ist. Den Begriff, der dazu eingeführt wird, ist über diese logische Notwendigkeit hinaus von fundamentaler Bedeutung.

Definition 1.3.8 (Relation)
Eine Teilmenge $R \subset X \times Y$ heißt Relation. *Die Menge*

$$\left\{x \in X \;\middle|\; \exists y \in Y \text{ mit } (x,y) \in R\right\}$$

wird als Definitionsbereich $D(R)$ der Relation bezeichnet,

$$\left\{y \in Y \;\middle|\; \text{ es gibt ein } x \in X \text{ mit } (x,y) \in R\right\}$$

als Bildbereich $B(R)$. Ist $(x,y) \in R$, so sagen wir, x,y stehen in Relation (bezüglich R) zueinander, wir schreiben dafür $x \sim_R y$. Die inverse Relation, in Zeichen $R^{-1} \subset Y \times X$ ist die Menge

$$R^{-1} = \left\{(y,x) \in Y \times X \;\middle|\; (x,y) \in R\right\}.$$

Spezielle zusätzliche Eigenschaften einer Relation $R \subset X \times X$ sind z. B. Symmetrie, Transitivität und Reflexivität: Eine Relation heißt symmetrisch, *falls aus $(x,y) \in R$ folgt $(y,x) \in R$. Sie heißt transitiv, falls aus $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ folgt $(x,z) \in R$. Man nennt eine Relation* reflexiv, *wenn für jedes $x \in X$ das Element $(x,x) \in R$ liegt. Das Gegenteil der Symmetrie ist die Asymmetrie. Eine Relation wird als* antisymmetrisch *bezeichnet, falls aus $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ folgt $x = y$.*

Beispiel 1.3.9 (Relationen)

1. Sei $a \in \mathbb{N}$, so ist $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\middle|\; y = a\,x\right\}$ eine Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. $R = \{(1,2)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist eine Relation.
3. $\emptyset \subset X \times X$ ist für jede Menge X eine Relation.
4. Im Vorgriff auf spätere Definitionen wollen wir uns noch ein Beispiel ansehen, das vielleicht den Zusammenhang mit bisher bekanntem herstellt: wir betrachten in der Ebene, die wir als Paare reeller Zahlen auffassen wollen, die Menge $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$. Dies ist eine Relation!

Weitere Anwendungen des Begriffes der Relation sind spezielle Relationen, die eine wichtige Rolle spielen. Mit dem Begriff der Relation definieren wir einerseits Ordnungen ($\leq$) und andererseits Äquivalenzen, Letzteres ist der Inbegriff der mathematischen Abstraktion. Wir werden dies immer wieder sehen. Beide Begriffe sind sehr sehr wichtig.

Definition 1.3.10 (Ordnungsrelation)
Eine Relation $R \subset X \times X$ heißt Ordnungsrelation *(auf X), falls R reflexiv, transitiv und* antisymmetrisch *ist. Ist R eine Ordnungsrelation, so schreiben wir für $(x, y) \in X \times X$ oft $x \leq y$ statt $x \sim_R y$. Wir nennen dann das Paar $(X, \leq)$ eine geordnete Menge.*

Bemerkung 1.3.11 (Ordnungsrelation im Beispiel)
In einer geordneten Menge ist nicht notwendig jedes Element mit jedem anderen vergleichbar, in dem Sinne, dass nicht für je zwei Elemente gilt entweder ist $x \leq y$, oder $y \leq x$. Ein Beispiel für eine solche Situation ist die folgende Ordnungrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gegeben durch

$$m \leq n \iff m|n \ (m \text{ teilt } n).$$

Wir prüfen kurz nach, dass es sich tatsächlich um eine Ordnungsrelation handelt:

1. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt $n|n$ und daher ist $n \leq n$. (Reflexivität)
2. Teilt die Zahl m die Zahl n und $p|m$, so gilt auch $p|n$, in unserer Terminologie haben wir $p \leq m, m \leq n \Rightarrow p \leq n$. (Transitivität)
3. Hat man $m|n$ und $n|m$, so ist $m = n$, also $n \leq m, m \leq n \Rightarrow m = n$. (Antisymmetrie)

Wir haben behauptet, dass es für diese Ordnungsrelation Paare gibt, so dass weder $m \leq n$ noch $n \leq m$. Wir wählen z. B. $m = 3, n = 5$.

Beispiel 1.3.12 (Geordnete Mengen)
Weitere Beispiele geordneter Mengen sind $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit der jeweils üblichen Ordnung, die Menge aller Worte eines Alphabets mit der lexikographischen Ordnung. Um den Zusammenhang zwischen dem üblichen $\leq$ auf $\mathbb{R}$ und der jetzigen Definition zu sehen, betrachten wir die Teilmenge $P = \left\{x^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$ und definieren die Menge $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x - y \in P\right\}.$$

Diese Relation ist reflexiv, denn $0 = 0^2 \in P$ und damit ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ $(x, x) \in R$. Ist $x - y = a^2, y - z = b^2$, so ist $x - z = x - y + y - z = a^2 + b^2 \in P$ (wir werden dies später noch beweisen, im Moment nehmen wir dies einfach als gegeben an). Ist $x - y = a^2$ und $y - x = b^2$, so ist $0 = x - y + (y - x) = a^2 + b^2$, also $a = b = 0$ und damit $x = y$. (Ist dies ein vollständiger Beweis??)

Aufgabe 1.3.13 (Alphabet und lexikographische Ordnung)
Man definiere die Begriffe Alphabet, Wort und lexikographische Ordnung und zeige, dass dies wirklich eine (im Sinne der obigen Definition) geordnete Menge ist.

Definition 1.3.14 (Äquivalenzrelation)
Wir betrachten eine Menge X. Eine Äquivalenzrelation *auf X ist eine Relation auf $X \times X$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Beispiel 1.3.15 (Diagonale)
Die Relation $D \subset X \times X, D = \left\{(x,x) \;\middle|\; x \in X\right\}$ ist eine Äquivalenzrelation. x ist genau dann in Relation zu y, also $x \sim_D y$ falls $x = y$.

Beispiel 1.3.16 (Restklassenbildung)
Ist $r \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{N}$, so betrachten wir die Menge

$$R = \left\{(z,z') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\middle|\; a|(z - z')\right\}.$$

Dann ist $x \sim_R y$ dann und nur dann, wenn $(x,y) \in R$ oder anders ausgedrückt, wenn $a|(x-y)$. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Zu prüfen sind Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Zunächst teilt a Null und damit ist $(x,x) \in R$. Zweitens, falls a die Zahl $x - y$ teilt, so teilt es auch das negative davon, also $y - x$. Damit ist mit $(x,y) \in R$ auch $(y,x) \in R$. Für die dritte Eigenschaft beobachten wir, dass $a|(x-y)$ und $a|(y-z)$ impliziert, dass $a|(x-y+y-z) = (x-z)$. Also folgt aus $x \sim_R y$ und $y \sim_R z$, dass auch $x \sim_R z$.

Äquivalenzrelationen haben eine wichtige Eigenschaft: Sie zerlegen die zugrundeliegende Menge in Teilmengen, von denen je zwei disjunkt sind und jede genau aus allen zueinander in Relation stehenden Elementen besteht. Wir wollen dies als Satz formulieren und diesen dann beweisen.

Satz 1.3.17 (Zerlegung in Klassen äquivalenter Elemente)
Ist M eine Menge mit einer Äquivalenzrelation $\sim_R$, so gibt es ein System S von Teilmengen von M, so dass gilt

1. $\bigcup_{C \in S} C = M$,
2. $C_1, C_2 \in S \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$ *oder* $C_1 = C_2$,
3. *für* $C \in S$ *und* $x, y \in C$ *folgt* $x \sim_R y$,
4. *sind* $C_1, C_2 \in S$ *und existieren* $x \in C_1, y \in C_2$ *mit* $x \sim_R y$, *so gilt* $C_1 = C_2$.

Beweis. Zu $x \in M$ wählen wir

$$C_x = \{w \in M \mid w \sim_R x\}.$$

Seien nun C_x, C_y gegeben und $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, so gibt es ein $z \in C_x \cap C_y$ und $z \sim_R x, z \sim_R y$. Wegen der Transitivität und der Symmetrie ist dann $x \sim_R y$, damit wieder mit der Transitivität für $u \in C_y$ auch $u \in C_x$. Die restlichen Aussagen werden entsprechend bewiesen. □

Definition 1.3.18 (Äquivalenzklassen)
Die Elemente C_x aus dem Mengensystem S werden jeweils als Äquivalenzklasse bezeichnet.

Die Bildung von Äquivalenzklassen ist ein fundamentales Werkzeug der mathematischen Abstraktion. Es erlaubt aus Objekten, die sich bezüglich einer wesentlichen Eigenschaft nicht unterscheiden neue Objekte zu bilden, die sich dann in gerade bezüglich dieser Eigenschaft unterscheiden. Diese etwas undurchsichtige Beschreibung wird vielleicht durch die Fortsetzung unseres Beispiels in das rechte Licht gerückt. Wir setzen das obere Beispiel noch etwas fort und betrachten die Äquivalenzklassenbildung bezüglich der Relation in Beispiel 1.3.15 (2).

Beispiel 1.3.19 (Restklassen als Äquivalenzklassen)
Sei nun $a \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < a$. Setze $C_r = \left\{ z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a|(z-r) \right\}$. Dann erhalten wir eine Zerlegung in paarweise disjunkte Teilmengen C_r. C_r besteht gerade aus denjenigen Zahlen, die bei Teilung durch a den Rest r ergeben. Wir bezeichnen C_r als *Restklasse* (modulo a).

In der Vorlesung Lineare Algebra werden Sie lernen mit Restklassen zu rechnen, d. h. Bildungen $C_x + C_y$ bzw. $C_x \cdot C_y$ zu definieren.

Definition 1.3.20 (Eineindeutige Relationen)
Eine Relation $R \subset X \times Y$ wird als

1. *eindeutig bezeichnet, wenn zu jedem $x \in X$ höchstens ein Element $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in R$ und*

2. *eins-zu-eins bezeichnet, wenn R und R^{-1} eindeutig sind.*

Definition 1.3.21 (Funktion)
Eindeutige Relationen werden als Funktionen[3] *bezeichnet. Oft verwendet man dafür die Buchstaben f, g etc. Hat man eine Funktion $f \subset X \times Y$, so schreibt man für das eindeutige Element y mit $(x, y) \in f$ das Symbol $f(x)$, d. h. $(x, f(x)) \in f$. Wir nennen $f(x)$ den* Wert *der Funktion f an der Stelle x. Man sagt auch, der Stelle x werde der Wert $f(x)$ zugeordnet. Wir benutzen für eine Funktion $f \subset X \times Y$ auch die Symbole $f : X \to Y$ und $x \mapsto f(x)$.*

Funktionen sind das zentrale Objekt der Analysis. Erst die Einführung dieses Begriffes ermöglicht es, auch Gleichungen für Funktionen aufzuschreiben. Dies wird uns später noch ausführlich beschäftigen.

Definition 1.3.22 (Injektiv, Surjektiv und Bijektiv)

1. *Eine Funktion* $f \subset X \times Y$ *oder auch* $f : X \to Y$ *heißt* injektiv, *wenn aus* $f(x_1) = f(x_2)$ *folgt,* $x_1 = x_2$.
2. *Eine Funktion* $f : X \to Y$ *heißt* surjektiv, *wenn* $B(f) = Y$.
3. *Ist eine Funktion sowohl injektiv wie auch surjektiv, so sagen wir, die Funktion ist* bijektiv *oder auch* eineindeutig.

Definition 1.3.23 (Identität)
Ist X *eine Menge,* $D \subset X$ *eine Teilmenge, so nennen wir die Funktion* $f \subset X \times X$ *mit* $D(f) = D$ *die identische Abbildung oder auch* Identität, *falls*

$$f = \left\{ (x, x) \;\middle|\; x \in D \right\}$$

ist oder anders ausgedrückt, wenn $f(x) = x$ *für alle* $x \in D$ *ist. Wir schreiben dafür auch* $\mathbb{1}_D$.

Definition 1.3.24 (Hintereinanderausführung)
Sind $f \subset X \times Y$, $g \subset Y \times Z$ *Funktionen. Dann ist die* Hintereinanderausführung $g \circ f$ *definiert als*

$$g \circ f = \left\{ (x, z) \;\middle|\; \text{ es existiert ein } y \in Y \text{ mit } \left((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \right) \right\}.$$

Wir schreiben dafür auch in vertrauterer Schreibweise $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

[3] Der Funktionsbegriff taucht historisch zum ersten Mal bei Johann I Bernoulli (6.8.1667–1.1.1748) auf, der schreibt: „Man nennt Funktion einer veränderlichen Größe eine Größe, die auf irgendeine Weise aus eben dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.“

Bemerkung 1.3.25 (Hintereinanderausführung von Funkionen)
Die Hintereinanderausführung zweier Funktionen ist eine Funktion, denn zu jedem x existiert höchstens ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. Zu diesem eindeutigen Element gibt es dann höchstens ein $z \in Z$ mit $(y, z) \in g$. Wir können dies auch so schreiben

$$D(g \circ f) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \exists y \in Y : ((x, y) \in f \wedge \exists z \in Z : (y, z) \in g) \right\}.$$

Ist $B(f) \subset D(g)$, so ist $D(g \circ f) = D(f)$.

Lemma 1.3.26 (Existenz der Inversen)
Ist eine Funktion $f \subset X \times Y$ injektiv, so existiert eine Funktion $g : B(f) \to D(f)$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \mathbb{1}_{D(f)}$ und $f \circ g = \mathbb{1}_{B(f)}$.

Beweis. Wir definieren $g = \left\{ (y, x) \,\middle|\, (x, y) \in f \right\}$. Dann ist für $x \in D(f)$ die Hintereinanderausführung

$$g \circ f = \left\{ (x, x') \,\middle|\, \exists y : ((x, y) \in f \wedge (x', y) \in f) \right\}.$$

Wegen der Injektivität von f ist dann aber $x = x'$ und $g \circ f = \left\{ (x, x) \,\middle|\, x \in D \right\}$. Die andere Beziehung erhält man ganz entsprechend. □

Definition 1.3.27 (Umkehrfunktion)
Die Funktion g, deren Existenz wir eben bewiesen haben, heißt Umkehrfunktion *von f. Dies ist ein Spezialfall der inversen Relation.*

Beispiel 1.3.28 (Beispiele injektiv, surjektiv)
Wir wollen nun eine Reihe von Funktionen, die Sie aus der Schule kennen und die wir später neu definieren werden, hernehmen, um die Begriffe zu erläutern. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils eine Funktion mit $D(f) = \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.
2. $f(x) = x^3$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.
3. $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist injektiv, jedoch nicht surjektiv.
4. $f(x) = \sin(x)\mathrm{e}^x$ ist nicht injektiv, jedoch surjektiv.

Die Aussagen sind, wenn wir Ihr Schulwissen zugrundelegen, relativ einsichtig. Jedoch werden wir im Rahmen der Entwicklung der Analysis die auftretenden Funktionen neu definieren und dann diese Aussagen auch beweisen.

Definition 1.3.29 (Mächtigkeit)

1. *Gibt es eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen X, Y, so sagt man, die beiden Mengen haben gleiche Mächtigkeit.*
2. *Jeder Menge M wird ein Symbol $\#(M)$, genannt die Mächtigkeit, zugeordnet.*
3. *Wir setzen $\#(\emptyset) = 0$, $\#(\{1, 2, \ldots, n\}) = n$, $\#(\mathbb{N}) = \aleph_0$ und $\#(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.*

Aufgabe 1.3.30
$\#(\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{Q}) = \aleph_0$.

Definition 1.3.31 (Potenzmenge)
Sei M eine Menge, die Menge der Teilmengen von M wird als Potenzmenge *bezeichnet und mit dem Symbol $\mathcal{P}(M)$ belegt.*

Satz 1.3.32 (Potenzmenge ist nicht gleichmächtig)
Es sei M eine Menge, dann gibt es keine Bijektion $M \to \mathcal{P}(M)$.

Beweis. Siehe Übungen. □

Bemerkung 1.3.33 (Potenzmenge)
Natürlich gibt es eine injektive Abbildung $M \to \mathcal{P}(M)$. Daraus möchte man gerne folgern, dass die Potenzmenge mächtiger als diese Menge ist. Eine solche Folgerung ist wahr, wir haben aber weder den Begriff mächtiger definiert, noch die Werkzeuge um dies zu beweisen. Wer sich dafür interessiert sei auf das Buch von Johnson [12] verwiesen. Natürlich können wir für endliche Mengen sofort feststellen, dass die Potenzmenge endlich ist und mehr Elemente enthält als M.

1.4 Binomialkoeffizienten

In diesem Abschnitt wollen wir einige elementare, aber wichtige Formeln kennenlernen und gleichzeitig die Technik des Induktionsbeweises noch etwas vertiefen. Rekursiv definieren wir für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Zahl $n!$ durch

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1)n! \end{aligned}$$

oder wie schon zuvor etwas weniger präzise $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Entsprechend der Summenbildung wollen wir auch ein Symbol für allgemeine Produktbildung induktiv vereinbaren:

$$\prod_{j=1}^{0} a_j = 1 \quad \text{(leeres Produkt)}$$

und

$$\prod_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} \prod_{j=1}^{n} a_j.$$

Nun betrachten wir alle bijektiven Abbildungen einer n-elementigen Menge in sich. Eine solche Abbildung wird als *Permutation* von n-Elementen bezeichnet.

Satz 1.4.1 (Anzahl der Anordnungen)

1. *Die Anzahl aller Anordnungen von n Elementen ist $n!$.*
2. *Die Anzahl der bijektiven Abbildungen einer Menge mit n Elementen in sich ist $n!$.*

Beweis. Den ersten Teil beweisen wir durch Induktion. Für $n = 1$ gibt es (offenkundig) nur eine Anordnung.

Nehmen wir an, wir hätten die Behauptung für n-Elemente gezeigt und fragen uns nun nach der Anzahl der Anordnungen von $n + 1$-Elementen. Wir haben $n + 1$ Möglichkeiten das $n + 1$-ste Element auf die $n + 1$ Plätze zu verteilen und dann nach Annahme jeweils $n!$ Möglichkeiten die restlichen n Elemente auf die verbleibenden n Plätze zu verteilen. Dabei kommt keine Anordnung zweimal vor und wir erhalten $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ Anordnungen.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, überlegen wir uns, dass es eine eineindeutige Abbildung von der Menge der Anordnung einer n-elementigen Menge in die Menge der Permutationen dieser Menge gibt. Wenn dies gezeigt ist, sind beide Mengen gleichmächtig und damit ist dann die Anzahl der Permutationen ebenfalls $n!$.

Wir beginnen mit einer Anordnung, und nummerieren Plätze und Elemente, d. h. wir arbeiten mit der Menge der Zahlen $1, \ldots, n$. Wir bilden nun Paare (i, j) wobei i die Nummer des Platzes und j die Nummer des Elementes ist. Da auf jedem Platz nur ein Element untergebracht ist, ist dies eine Funktion und wir schreiben $f(i) = j$. f ist injektiv, da jedes Element nur an einem Platz untergebracht wird und da jedes Element auch wirklich an einem Platz sitzt ist f surjektiv und damit bijektiv.

Die Umkehrung wird entsprechend vorgenommen, das Element $f(i)$ wird an die i-te Stelle gebracht. Dies führt auf eine Anordnung. □

Wir kommen nun zur Frage, wie viele Möglichkeiten gibt es eine k-elementige Menge aus einer n-elementigen Menge auszuwählen. Die Antwort beruht auf einem gewissen Abzählschema und man kann sie wieder durch einen Induktionsbeweis begründen.

Satz 1.4.2 (**k aus n**)
Es gibt für $k > 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

viele Möglichkeiten eine k-elementige Menge aus einer n-elementigen Menge auszuwählen. Für $k = 0$ erhält man eine einzige Möglichkeit, wir setzen also

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Beweis. Sei $0 < k \leq n$. Bei der Auswahl des ersten Elementes hat man n Möglichkeiten der Wahl, bei der des k-ten Elementes $n - k + 1$. Damit haben wir insgesamt

$$\prod_{j=1}^{k} n - j + 1$$

Möglichkeiten. Da aber die Reihenfolge der Auswahl der Elemente keine Rolle spielt, es aber $k!$ viele Reihenfolgen für die Auswahl der k Elemente gibt, erhalten wir insgesamt

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{n - j + 1}{j}$$

viele Auswahlen und dies ist, wie man sofort sieht, das gleiche wie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Da man die leere Menge nur einmal auswählen kann, ergibt sich im Falle $k = 0$, dass die nullelementige Menge nur auf eine Weise auswählbar ist. Der Konsistenz halber setzen wir also

$$\binom{n}{0} = 1.$$

□

Definition 1.4.3 (Binomische Koeffizienten)
Die Zahlen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$$

heißen binomische Koeffizienten.

Bemerkung 1.4.4 (Ganzzahligkeit der binomischen Koeffizienten)
Die binomischen Koeffizienten sind für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ ganze Zahlen. Dies ist zwar aus der Definition nicht unmittelbar einsichtig, folgt aber sofort aus ihrer Bedeutung für die Auswahl k-elementiger Teilmengen, vgl. Satz 1.4.2.

Beispiel 1.4.5 (Lotto)
Beim *Lotto* 6 aus 49 gibt es 13983816 verschiedene 6-elementige Teilmengen der Zahlen $1, \ldots, 49$.

Wir kommen zu einem zentralen Satz.

Satz 1.4.6 (Binomische Formel)
Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis. Den Koeffizienten bei $x^{n-k}y^k$ erhält man indem man aus den n Faktoren k auswählt, in denen y am Produkt beiträgt und dann muss natürlich x aus den verbleibenden $n-k$ Faktoren ausgewählt werden. Da es nun $\binom{n}{k}$ solche Auswahlen gibt, und die Koeffizienten bei x, bzw. y jeweils 1 sind ergibt sich insgesamt der Koeffizient $\binom{n}{k}$. □

Ein alternativer Beweis nutzt wieder die vollständige Induktion. Die Behauptung ist richtig für $n = 1$, denn dann steht links und rechts jeweils $x + y$. Angenommen, die Behauptung sei gezeigt für $n - 1$, dann gilt

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k.$$

Das Resultat für $(x+y)^n$ ergibt sich nun durch Multiplikation mit $x+y$, auf der rechten Seite ergibt sich der Koeffizient von $x^{n-k}y^k$ als Summe der Koeffizienten von $x^{n-k-1}y^k$ und $x^{n-k}y^{k-1}$. Diese sind nach Induktionsannahme gleich $\binom{n-1}{k}$ bzw. $\binom{n-1}{k-1}$, also betrachten wir

$$\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

□

Korollar 1.4.7 (Summe der Binomialkoeffizienten)

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Beweis. Setze im Satz 1.4.6 über die binomische Formel $x = 1, y = 1$. $\square$

Kapitel 2

Reelle und komplexe Zahlen

In diesem Kapitel wollen wir die für die Analysis wesentlichen Zahlbereiche $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ systematisch beschreiben. Wir unterscheiden dabei zwischen arithmetischen, Ordnungs- und metrischen Eigenschaften. Im ersten Abschnitt beschreiben wir abstrakte arithmetische Eigenschaften, dann gehen wir darauf ein, in welchem Sinne die Menge der reellen Zahlen eine geordnete Menge ist, und schließlich sprechen wir über Abstand und Metrik und über die zentrale Vollständigkeitsaussage.

Inhalt

2.1 Körperaxiome

Wir kommen nun zu einer zentralen algebraischen Struktur. Dies ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen, für die wir die vertrauten Symbole $+$, $\cdot$ schreiben.

Definition 2.1.1 (Körper)
Wir betrachten eine Menge $\mathbb{K}$ *und zwei Abbildungen* $\sigma, \mu : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. *Wir wollen zwei spezielle Zeichen für diese Abbildungen einführen,*

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \\ \mu(x_1, x_2) &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

falls die
Axiome der Addition

(Add 1) $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ *für alle* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. *(*Assoziativgesetz *der Addition)*

(Add 2) *Es existiert ein Element* $0 \in \mathbb{K}$ *mit* $0 + x = x + 0 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{K}$. *(Existenz des additiv neutralen Elementes)*

(Add 3) *Zu jedem* $x \in \mathbb{K}$ *gibt es ein inverses Element, d. h. ein Element* $x' \in \mathbb{K}$ *mit* $x + x' = 0$. *(Existenz des additiv inversen Elementes)*

(Add 4) $x + x' = x' + x$ *für alle* $x, x' \in \mathbb{K}$. *(*Kommutativgesetz der Addition*)*

und die
Axiome der Multiplikation

(Mul 1) $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$ *für alle* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. *(*Assoziativgesetz der Multiplikation*)*

(Mul 2) *Es existiert ein Element* $1 \in \mathbb{K}, 1 \neq 0$ *mit* $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ *für alle* $x \in \mathbb{K}$. *(Existenz des multiplikativ neutralen Elementes)*

(Mul 3) *Zu jedem* $x \in \mathbb{K}, x \neq 0$ *gibt es ein inverses Element, d. h. ein Element* $x' \in \mathbb{K}$ *mit* $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$. *(Existenz des multiplikativ inversen Elementes)*

(Mul 4) $x \cdot x' = x' \cdot x$ *für alle* $x, x' \in \mathbb{K}$. *(*Kommutativgesetz *der Multiplikation)*

(Dis) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

erfüllt sind. In diesem Fall nennen wir $\mathbb{K}$ *einen* Körper.

Schreiben Sie diese Formeln mittels der Funktionen σ, μ.
Wir wollen sofort einige einfache Schlussfolgerungen aus den Axiomen ziehen.

Lemma 2.1.2 (Einfache Eigenschaften von Körpern)

1. *Das additive neutrale Element ist eindeutig.*

2. *Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein additiv inverses Element.*

3. *Das multiplikativ neutrale Element ist eindeutig.*

4. *Zu jedem $0 \neq x \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein multiplikativ inverses Element.*

Beweis.

1. Seien $0, 0'$ zwei additiv neutrale Elemente, so gilt
$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

2. Angenommen $x + x' = x + x'' = 0$, so hat man
$$x' = x' + 0 = x' + x + x'' = 0 + x'' = x''.$$

Die verbleibenden beiden Behauptungen beweist man ganz analog. In der Tat hätte man durch eine kleine weitere Abstraktion beide Fälle in einem beweisen können. □

Wir führen folgende Schreibweisen ein: Das additiv Inverse eines Elementes $x \in \mathbb{K}$ wird mit $-x$ bezeichnet, das multiplikativ Inverse mit x^{-1}. Für $x^{-1} \cdot y$ $(x \neq 0)$ schreiben wir auch
$$x^{-1} \cdot y = \frac{y}{x}\ .$$

Lemma 2.1.3 (Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen)
In einem Körper hat die Gleichung
$$a + x = b$$
für gegebene a, b höchstens eine Lösung x, die Gleichung
$$a \cdot x = b$$
für $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ höchstens eine Lösung. Im erstgenannten Fall ist die Gleichung immer lösbar mit $x = (-a) + b$. Im zweiten Fall existiert eine Lösung für alle b genau dann wenn $a \neq 0$. In diesem Fall ist die Lösung $x = a^{-1}b = \frac{b}{a}$.

Beweis. Wir führen zunächst den ersten Fall aus. Wir sehen sofort
$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Angenommen $a + x_1 = a + x_2$, dann ist

$$x_2 = 0 + x_2 = (-a+a) + x_2 = -a + (a + x_2) = -a + (a + x_1) = (-a+a) + x_1 = x_1.$$

Daraus folgt dann, wegen $x_1 = x_2$ die Eindeutigkeit. Im zweiten Fall kann man für $a \neq 0$ schreiben $a(a^{-1}b) = (aa^{-1}) = b$. Ist $a \neq 0$ und $ax_1 = ax_2$, so ist

$$x_1 = 1x_1 = (a^{-1}a)x_1 = a^{-1}(ax_1) = a^{-1}(ax_1) = a^{-1}(ax_2) = (a^{-1}a)x_2 = x_2. \qquad \square$$

Im folgenden Lemma sammeln wir eine Reihe weiterer wichtiger arithmetischer Eigenschaften der reellen Zahlen.

Lemma 2.1.4 (Arithmetik in Körpern)

1. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $0 \cdot x = 0$.*
2. *Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt*
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$
3. *Ist für $x, y \in \mathbb{K}$ $x \cdot y = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$.*
4. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot (-1) = -x$.*
5. *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt*
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$
6. *Für alle $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.*
7. *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.*

Beweis.

1. Wegen $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ und der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $x \cdot 0 + y = x \cdot 0$ folgt $x \cdot 0 = 0$.
2. Dies folgt unmittelbar aus dem Kommutativgesetz (**Mul 4**) und dem Distributivgesetz (**Dis**).
3. Ist $x \neq 0$ und $xy = 0$, so ist $y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x \cdot 0 = 0$.
4. Da $0 = x \cdot 0 = x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 1 + x \cdot (-1) = x + x \cdot (-1)$ ist, folgt $x \cdot (-1) = -x$.
5. Folgt aus den bisher bewiesenen Aussagen.
6. Da $(x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} = 1$ und $xx^{-1} = 1$ folgt $(x^{-1})^{-1} = x$.
7. Da $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = x1x^{-1} = xx^{-1} = 1$ folgt die Behauptung aus Lemma 2.1.3 über die eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen.

$\square$

Die bisher erzielten Schlussfolgerungen gelten für jeden Körper, nicht nur für die reellen Zahlen. Diese zeichnen sich durch zusätzliche Strukturen aus.

2.2 Angeordnete Körper

Eine wichtiges Kennzeichen eines Körpers ist die kleinste natürliche Zahl n (falls sie existiert), für die gilt

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} = 0.$$

Diese Zahl heißt *Charakteristik* des Körpers. Existiert keine solche Zahl, so sagt man der Körper habe Charakteristik 0. Ein Körper der Charakteristik 0 enthält immer einen Zahlbereich der ein Ebenbild der ganzen Zahlen ist, nämlich alle Vielfachen der 1 und die additiv Inversen dazu. Durch Übergang zu den Quotienten erhält man einen Zahlbereich, der $\mathbb{Q}$ entspricht. Wir wollen nun eine Eigenschaft definieren, die $\mathbb{R}$ schon etwas genauer beschreibt, wenn auch immer noch nicht vollständig. Immerhin wird der nun einzuführende Begriff einer Ordnung keine Körper zulassen, deren Charakteristik ungleich 0 ist.

Definition 2.2.1 (Angeordnete Körper)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Gibt es eine Menge $P \subset \mathbb{K}$ (P wie positiv) mit

(O 1) $\mathbb{K} = P \cup \{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{K} \;\middle|\; -x \in P\right\}$,

(O 2) $P \cap \left(\{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{K} \;\middle|\; -x \in P\right\}\right) = \emptyset$,

(O 3) *$x, y \in P$, so ist $x + y \in P$,*

(O 4) *$x, y \in P$, dann ist auch $x \cdot y \in P$,*

so nennen wir $\mathbb{K}$ einen angeordneten Körper.

Wir wollen diese Forderungen kurz kommentieren. In $\mathbb{R}$ soll P für die Menge der positiven Zahlen stehen. Dann ist klar, dass jede Zahl entweder in P liegt, gleich 0 ist oder in $-P$ liegt. (Hier steht $-P$ für die oben schon benutzte Menge $-P = \left\{x \in \mathbb{K} \;\middle|\; -x \in P\right\}$. Dies ist ein Spezialfall der früher bereits eingeführten Notation $f(P)$ für eine Abbildung f und eine Menge P.) Weiterhin ist es für das so gewählte P klar, dass die Eigenschaften (**O 1**)–(**O 4**) gelten. Es ist auch sofort ersichtlich, dass angeordnete Körper Charakteristik 0 haben. Mittels P definieren wir Ungleichheitsrelationen zwischen reellen Zahlen, da wir dazu wieder nur die Axiome eines angeordneten Körpers nutzen, gelten die Aussagen genauso in jedem angeordneten Körper. Da wir bisher und auch im weiteren Verlauf dieser

Vorlesung nicht allzu viele angeordnete Körper kennenlernen werden (obwohl es natürlich viele gibt und diese auch in bestimmten Bereichen der Mathematik eine große Rolle spielen), wollen wir diese Verallgemeinerung nicht in den Mittelpunkt unserer Überlegungen stellen. Wichtig ist dieser Aspekt nur, weil man daran ein prinzipielles Vorgehen der Mathematik sehen kann: Man formuliert Aussagen sehr allgemein und verwendet nur die abstrakten Prinzipien und erhält dadurch Aussagen, die auch in ganz anderem Zusammenhang wichtig werden können.

Definition 2.2.2 (Ungleichungen)
Wir sagen x ist kleiner *als y, in Zeichen $x < y$, genau dann wenn $y - x \in P$. Entsprechend ist x größer als y, $x > y$, falls $x - y \in P$. Oft will man bei Ungleichungen auch noch Gleichheit zulassen, dazu führen wir ein $x \geq y$, genau dann wenn $x - y \in P \cup \{0\}$ und $x \leq y$ genau dann wenn $y - x \in P \cup \{0\}$.*

Man erhält aus den Axiomen sofort eine Reihe von einfachen Konsequenzen, die wir nun auflisten und beweisen wollen.

Lemma 2.2.3 (Vergleichbarkeit)
Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Für Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Beweis. Aus (**O 1**) folgt, dass mindestens eine der Aussagen gilt, aus (**O 2**), dass höchstens eine der drei Aussagen gilt. □

Definition 2.2.4 (Vollständige Ordnung)
Ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf einer Menge M, so heißt die Ordnung vollständig*, falls für je zwei Elemente $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.*

Lemma 2.2.5 (Vollständigkeit der Ordnung)
Die Relation $\leq$ definiert eine vollständige Ordnung auf $\mathbb{K}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die drei Eigenschaften Reflexivität, Transitivität und die Antisymmetrie. Es sei $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \;\middle|\; y - x \in P \cup \{0\}\right\}$ (Gleichwertig wäre es zu sagen $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \;\middle|\; x \leq y\right\}$). Dann ist für jedes x natürlich $(x, x) \in R$ (Reflexivität), ist $y - x \in P$, so ist natürlich $x - y \in -P$ und damit nicht in P (Antisymmetrie), schließlich folgt aus

$$x - y \in P, \; y - z \in P,$$

dass

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in P$$

wegen (**O 3**). Also folgt die Transitivität. Aus dem Lemma 2.2.3 über die Vergleichbarkeit kann man sofort auf die Vollständigkeit der Ordnung schließen. ∎

Im folgenden Lemma sammeln wir einige weitere wichtige Eigenschaften unserer Ordnungsstruktur.

Lemma 2.2.6 (Ordnung und Arithmetik)

1. *Ist* $a \in \mathbb{K}$ *und* $x < y$ $(x \leq y)$, *so ist* $x + a < y + a$ $(x + a \leq y + a)$.
2. *Ist* $a > 0$ *und* $x < y$ $(x \leq y)$, *so ist* $a \cdot x < a \cdot y$ $(a \cdot x \leq a \cdot y)$.
3. *Ist* $a < 0$ *und* $x < y$ $(x \leq y)$, *so ist* $a \cdot x > a \cdot y$ $(a \cdot x \geq a \cdot y)$.
4. *Für alle* $x \neq 0$ *ist* $x^2 > 0$.
5. $x > 0$ *genau dann wenn* $x^{-1} > 0$.
6. *Aus* $0 < x < y$ *folgt* $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Beweis.

1. Die einfache Rechnung $x + a - (y + a) = x - y < 0$ beweist die erste Behauptung.

2. Sei $a > 0$, d. h. $a \in P$ und $x < y$ bzw. $x \leq y$. Betrachte $a \cdot y - a \cdot x = a \cdot (x - y)$. Nach (**O 4**) ist $a(y - x) \in P$ bzw. $a(y - x) \in P \cup \{0\}$.

3. Ist $a < 0$, so ist $-a \in P$, wir wiederholen die Argumentation, allerdings ist $a(y - x) \in -P$ und daraus folgt die Behauptung.

4. Ist $x \neq 0$, so folgt $x \in P \cup -P$ mit (**O 3**) und $x^2 = (-x)^2$ folgt $x^2 \in P$.

5. Für die Hinrichtung betrachten wir für $x \in P$ den Ausdruck $x^{-1} = (x^{-1})^2 x \in P$, nach (**O 3**) und dem vorigen Beweisschritt. Die Rückrichtung folgt aus der Hinrichtung, indem wir $x = (x^{-1})^{-1}$ beachten.

6. Folgt aus $x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y - x)y^{-1}$.

∎

Mittels der gewonnenen Ordnung wollen wir weitere wichtige Begriffe und Bezeichnungen definieren.

Definition 2.2.7 (Maximum und Betrag)
Für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ setzen wir

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq y \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\min(x,y) = \begin{cases} y & \text{falls} \quad x \geq y \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Betrag *einer Zahl $x \in K$ ist gegeben durch*

$$|x| = \max(x, -x).$$

Ein weiteres Axiom, das wir zur Beschreibung des Körpers der reellen Zahlen heranziehen wollen, wird nach dem großen griechischen Gelehrten Archimedes[1] benannt.

Abbildung 2.1: Archimedes von Syrakus (287vC–212vC)

Wir überlegen uns zunächst, dass jeder angeordnete Körper eine Teilmenge enthält, die den natürlichen Zahlen gleicht: Wir betrachten die kleinste Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathbb{K}$ (den Schnitt all solcher Teilmengen) mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} 1 &\in \mathcal{N} \\ x \in \mathcal{N} &\Rightarrow x + 1 \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Diese Menge erfüllt die Axiome von Peano und ist deshalb im Sinne unserer Axiomatik nicht von $\mathbb{N}$ zu unterscheiden.

Definition 2.2.8 (Archimedische Ordnung)
Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt archimedisch *angeordnet, falls zu jedem $x \in \mathbb{K}$ ein $n \in \mathcal{N}$ existiert mit $n > x$.*

[1] Archimedes von Syrakus (287vC–212vC), bedeutender griechischer Gelehrter, der enge Verbindungen zur mathematischen Schule in Alexandria hatte. Archimedes bedeutendste Leistungen betrafen die Geometrie. Seine Methoden antizipierten die Integralrechnung fast 2000 Jahre vor Newton und Leibniz.

2.3 Konsequenzen einer archimedischen Ordnung

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir einige einfache, jedoch wichtige Konsequenzen der archimedischen Ordnung angeben. Zunächst noch ein Begriff, der eine wichtige Eigenschaft der natürlichen Zahlen beschreibt.

Definition 2.3.1 (Wohlordnung)
Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt wohlgeordnet, *falls jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.*

Satz 2.3.2 (Wohlordnung der natürlichen Zahlen)
Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, in der Tat gilt: Das Induktionsaxiom (P 5) ist für die natürlichen Zahlen äquivalent zur Wohlordnungseigenschaft.

Beweis. Siehe Übungen. □

Satz 2.3.3 (Konsequenzen der archimedischen Ordnung)
Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper mit archimedischer Ordnung. $\mathbb{N}$ bezeichne die im Körper vorhandene Teilmenge, die den Axiomen von Peano genügt.

1. *Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ existiert eine natürliche Zahl n mit $-n < x < n$.*

2. *Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{K}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq x < m + 1$.*

3. *Zu jedem $K > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit*
$$n\varepsilon > K.$$

4. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit*
$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

5. *Zu je zwei verschiedenen reellen Zahlen x, y, $x < y$ gibt es eine rationale Zahl r mit $x < r < y$.*

Beweis.

1. Ist $x \geq 0$, so ist dies die archimedische Eigenschaft, für $x < 0$ wenden wir diese auf $-x$ an.

2. Wir beginnen wieder mit $x \geq 0$. Sei m die kleinste natürliche Zahl mit

$m > x$. Eine solche Zahl existiert, da $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist. Dann ist $m-1 \leq x < m$, da $m-1 < m$.

3. Nach Archimedes gibt es zu $\frac{K}{\varepsilon}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{K}{\varepsilon}$. Dann ist $n\varepsilon > K$.

4. Mit $\varepsilon > 0$ ist auch $\varepsilon^{-1} > 0$ und es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-1}$. Dann ist aber $n^{-1} < \varepsilon$, was zu beweisen war.

5. OBdA gilt $x > 0$. Da $x - y < 0$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{-1} < y - x$. Betrachte die Folge der Zahlen $a_m = \frac{m}{n}$ für $m \in \mathbb{N}$. Nach Archimedes gibt es ein m mit $a_m > x$. Wir wählen das kleinste solche m (wegen der Wohlordnungseigenschaft ist dies möglich). Dann ist

$$\frac{m-1}{n} \leq x, x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y.$$

Also ist die Behauptung mit $r = \frac{m}{n}$ gezeigt.

□

Definition 2.3.4

1. *Die eindeutige Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$ wird mit* $\operatorname{floor}(x)$, *in Zeichen $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet. Oft schreibt man dafür auch $[x]$ und bezeichnet dies als* Gauß-Klammer *von x.*

2. *Die eindeutige Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n-1 < x \leq n$ wird als* $\operatorname{ceil}(x)$ *bezeichnet, wir schreiben dafür auch $\lceil x \rceil$.*

Satz 2.3.5 (Bernoulli[2]sche Ungleichung)
Es sei $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Wir beweisen dies durch Induktion. Für $n = 1$ erhalten wir $1+x = 1+x$ und dies ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ offenbar wahr. Angenommen wir hätten die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Dann hat man (da $1 + x \geq 0$)

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

□

Als Konsequenz hieraus erhalten wir den folgenden Satz:

[2]Jakob I. Bernoulli (27.12.1654–16.8.1705) war der erste große Gelehrte aus der berühmten Familie der Bernoullis. Er beschäftigte sich mit vielen Problemen aus den Bereichen Mathematik und Physik. Teilweise arbeitete er mit seinem jüngeren Bruder Johann I. Bernoulli zusammen.

Satz 2.3.6 ((Un)Beschränktheit der Folge x^n)

1. *Zu gegebenen $x > 1$ und $K \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n > K$.*

2. *Ist $0 < x < 1$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n < \varepsilon$.*

Beweis.

1. Schreibe $x = 1 + y$, $y > 0$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$x^n \geq 1 + ny.$$

Nach Satz 2.3.3 (3) über die Konsequenzen einer archimedischen Ordnung gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ny > K - 1$ und damit ist

$$x^n \geq 1 + ny > K.$$

2. Ist $\varepsilon \geq 1$, ist mit $n = 1$ nichts zu zeigen. Andernfalls ist $y = x^{-1} > 1$ und $\varepsilon^{-1} > 1$. Dann existiert nach der vorherigen Behauptung ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y^n > \varepsilon^{-1}$. Dann ist aber

$$x^n = (y^n)^{-1} < \varepsilon.$$

□

2.4 Metrische Räume

Die bisherigen Axiome beschreiben $\mathbb{R}$ nicht eindeutig, denn auch der Körper $\mathbb{Q}$ ist ein archimedisch geordneter Körper im Sinne unserer Axiome. Was unterscheidet $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$? Zunächst natürlich das Wurzelziehen, d. h. das Lösen der Gleichung $x^2 = a$ für vorgegebenes $a > 0$. Es ist aus der Schule bekannt und wird auch im Satz 2.6.1 nochmals besprochen, dass man innerhalb $\mathbb{Q}$ die Gleichung $x^2 = 2$ nicht lösen kann. Daher werden wir eine weitere Eigenschaft benötigen, die dann die beiden Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ unterscheiden wird. Daher werden wir uns in diesem kurzen Abschnitt Gedanken über Abstandsmessung machen. Und dies, Sie sind sicher nicht überrascht, sieht so aus, dass wir uns einfache Regeln ausdenken, von denen wir erwarten, dass sie die wesentlichen Eigenschaften der Abstandsmessung beinhalten. Abstandsmessung bedeutet, dass man einer Strecke eine Zahl zuordnet und diese Zuordnung muss Regeln entsprechen. In der physikalischen Realität ist die Abstandsmessung von Normen bzw. Traditionen (km, Meile, ...) geprägt. Daher ist die konkrete Zahl sicher nicht das wesentliche sondern die dahinterstehende Methodik.

Definition 2.4.1 (Metrik)
Es sei X eine Menge, eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik *auf X, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind*

(M 1) $d(x, y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$.

(M 2) $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$ *(Symmetrie).*

(M 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X, so nennen wir das Paar (X, d) einen metrischen Raum.

Aufgabe 2.4.2 (Eine Metrik ist nicht negativ)
Man zeige: Ist d eine Metrik auf X, so gilt für je zwei Elemente $x, y \in X$ die Ungleichung $d(x, y) \geq 0$.

Bemerkung 2.4.3 (Entfernungsmessung und Metrik)
Die drei Eigenschaften spiegeln fundamentale Erkenntnisse der Entfernungsmessung wieder:

1. Der Abstand zweier verschiedener Punkt ist positiv (vgl. die vorstehende Aufgabe).

2. Da wir den Abstand zwischen je zwei Punkten definieren wollen, darf die Angabe von $d(x, x)$ nicht fehlen und natürlich sollte hier der Wert 0 stehen.

3. Die Symmetrie in der oben angegebenen Form ist ebenso natürlich, von A nach B ist es genauso weit wie von B nach A.

4. Zu guter Letzt gibt die Dreiecksungleichung die bekannte Tatsache wieder, dass die direkte Entfernung $d(x, z)$ nie größer sein kann als die Summe zweier Entfernungen zu einem dritten Punkt. In der uns gewohnten Euklidischen Geometrie würde man sagen, die Gerade ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten. Betrachtet man allgemeinere Mengen, z. B. Kreise Kugeln, die Punkte auf einem Paraboloid (wie misst man Entfernungen auf einer Satellitenschüssel), so muss man diese Aussage aus der euklidischen Geometrie entsprechend ersetzen und die allgemeinste Version, die Ihnen noch oft im Studium begegnen wird, ist die Dreiecksungleichung.

Beispiel 2.4.4 (Beispiele metrischer Räume)

1. Wir betrachten eine einelementige Menge $X = \{x\}$ und die Funktion $d(x, x) = 0$. Dies ist die langweiligste aller möglichen Metriken.

2. Nun wollen wir ein anderes langweiliges, jedoch etwas weniger triviales Beispiel ansehen. Es sei X eine beliebige Menge. Setze

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Die ersten beiden Eigenschaften der Metrik erkennt man leicht, die letzte beruht auf der Erkenntnis $1 \leq 1 + 1 = 2$. Natürlich sind diese beiden Beispiele eher dazu gedacht festzustellen, was dieser Begriff zulässt, sind an sich jedoch nicht gerade nützlich. Wir wollen wenigstens auch ein nützliches Beispiel angeben (und wir werden im Laufe der Analysis Vorlesung viele weitere wichtige und interessante Beispiele kennenlernen).

3. Sei $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Wir müssen noch nachprüfen, dass es sich tatsächlich um eine Metrik handelt. Die beiden ersten Eigenschaften sind klar!? Betrachten wir also drei Punkte x, y, z und

$$d(x,z) = |x-z| = \max(x-z, z-x) \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z).$$

   Man überlege sich und begründe genau, warum das Ungleichheitszeichen an der Stelle korrekt ist!

Wir betrachten nun Folgen in einem metrischen Raum (X, d).

Definition 2.4.5 (Folgen in metrischen Räumen)
Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Funktion* $x : \mathbb{N} \to X$ *mit* $x(n) = x_n$.

Folgen werden auch oft in der Form

$$\xi = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

notiert. Der Begriff und die Theorie konvergenter Folgen ist zentral für den Aufbau der Analysis. Aus der Schule kennen Sie vielleicht Folgen in $\mathbb{R}$. Man kann Folgen auf verschiedene Weise angeben: zum einen als *Liste* wie oben angedeutet. Man kann Konstruktionsvorschriften für das n-te Folgenglied bei Kenntnis der vorherigen Folgenglieder angeben, d. h. die Folge *rekursiv* definieren, und man kann schließlich eine Formel für das allgemeine Folgenglied angeben, d. h. das allgemeine Glied in *geschlossener Form* angeben. Wir wollen dies an Beispielen erläutern.

Beispiel 2.4.6 (Beispiele von Folgen)

1. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$;
2. $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}: \; x_n = 2^{-n+1}$.

Wir haben dreimal die gleiche Folge beschrieben, einmal als *Liste*, einmal *rekursiv* und das dritte Mal in *geschlossener Form*. Man beachte, dass diese Folge sehr einfach ist. Im allgemeinen ist es schwierig, oder gar unmöglich, von der einen zur anderen Form zu gelangen.

Definition 2.4.7 (Konvergenz)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge. Wir sagen, diese Folge ist konvergent *gegen ein Element $x_0 \in X$, wenn es zu jedem $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für (jedes) $n \in \mathbb{N}, \; n > N$ gilt*

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

In diesem Falle nennt man x_0 den Grenzwert *der Folge. Wir schreiben dafür*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Eine Veranschaulichung dieses Begriffes für eine reelle Folge bedeutet, dass eine reelle Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn für jede noch so kleine Kugel um x_0 (das heißt für jedes $\varepsilon > 0$) alle Folgenglieder mit hinreichend großem Index in dieser Kugel liegen. Die oben in Beispiel 2.4.6 angegebene Folge konvergiert gegen 0. Natürlich kann man leicht divergente Folgen angeben.

Satz 2.4.8 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)
Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Beweis. Nehmen wir an, wir hätten zwei Grenzwerte $x_0 \neq y_0$, und $\varepsilon > 0$ sei gegeben, so dass $d(x_0, y_0) > 2\varepsilon$. Dann gibt es zwei Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $n > N_1$ impliziert, dass der Abstand $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ und $n > N_2$ impliziert $d(x_n, y_0) < \varepsilon$. Setze $N = \max(N_1, N_2)$. Dann ist für $n > N$ sowohl $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ wie auch $d(x_n, y_0) < \varepsilon$ und

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von ε! □

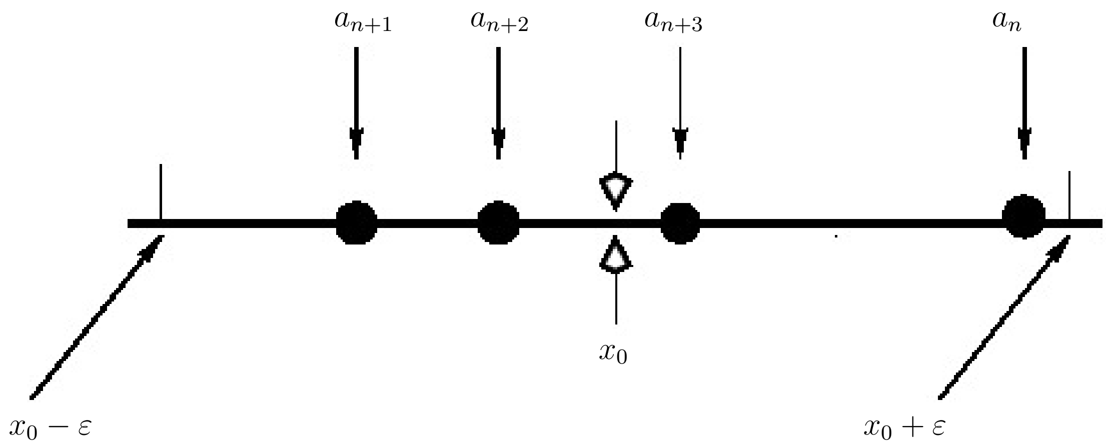

Abbildung 2.2: Veranschaulichung einer konvergenten Folge

Definition 2.4.9 (Cauchyfolge)
Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchyfolge[3]*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ und $m > N$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Die beiden Begriffe sind natürlich nicht vollkommen unabhängig, unterscheiden sich aber sehr. Während man nur die Folgenglieder selbst zu betrachten hat, um festzustellen, ob es sich um eine Cauchyfolge handelt, muss man bei der Untersuchung der Konvergenz ein Element $x_0 \in X$ finden, gegen das die Folge konvergieren kann.

Satz 2.4.10 (Konvergenz und Cauchy)
Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge.

Beweis. Wir nehmen an, die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen x_0 und eine Zahl $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Dann existiert eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n > N$ gilt $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $n, m > N$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[3]Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789–22.5.1857) war Sohn eines hohen Beamten und genoss demzufolge eine gute Privatausbildung. Nach einem ingenieurwissenschaftlichen Studium eignete er sich nebenbei Werke von Lagrange an. Im Jahr 1811 löste er ein Problem, das Lagrange formuliert hatte. Er arbeitete über Integrale, Strömungsmechanik und Elastizitätstheorie. Speziell die Arbeiten zum letztgenannten Bereich machten ihn zu einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit. Im weiteren arbeitete er auf vielen Gebieten, sein Hauptarbeitsgebiet wurde die Analysis mit der Theorie von Differentialgleichungen. Nach Gauß begann er mit komplexen Zahlen und der zugehörigen Analysis zu arbeiten. Cauchy war ungeheuer produktiv und dies sehen wir noch heute an vielen Konzepten, die seinen Namen tragen.

Dies war zu beweisen. □

Bemerkung 2.4.11 (Nichtkonvergente Cauchyfolgen)
In $\mathbb{Q}$ gibt es nicht konvergente Cauchyfolgen, also ist die Umkehrung von Satz 2.4.10 über Konvergenz und Cauchyfolgen nicht wahr. Wir nennen ein Beispiel und werden die zu führenden Beweise nachholen.
Die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ definiert durch

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n + 1 - \frac{x_n^2}{2} \end{aligned}$$

ist in $(\mathbb{Q}, d)$ eine Cauchyfolge, jedoch nicht konvergent.

Definition 2.4.12 (Vollständigkeit eines metrischen Raumes)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, *wenn jede Cauchyfolge konvergiert.*

Aus Bemerkung 2.4.11 über die Existenz nichtkonvergenter Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ folgt, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist. Das letzte Axiom auf unserem Weg die reellen Zahlen zu beschreiben ist das *Vollständigkeitsaxiom*. Es lautet:

Axiom (V) $\mathbb{R}$ ist ein vollständiger, vollständig geordneter archimedischer Körper. Der neue Punkt ist, dass $\mathbb{R}$ bezüglich der Metrik d vollständig ist.

Bemerkung 2.4.13
Auch die Umkehrung ist richtig: Hat man einen Körper mit den genannten Eigenschaften, so ist dieser von $\mathbb{R}$ nicht unterscheidbar.

2.5 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Weil das Vollständigkeitsaxiom so wichtig ist, wollen wir dazu äquivalente Formulierungen angeben. Bevor wir dies tun, untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Struktur von $\mathbb{R}$ als geordneter Körper und dem Grenzwertbegriff.

Definition 2.5.1 (Beschränkte Folgen)
Eine reellwertige Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, *wenn es eine reelle Zahl M gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|a_n| < M.$$

Lemma 2.5.2 (Beschränktheit konvergenter Folgen)
Konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ sind beschränkt.

Beweis. Angenommen die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n > N$ gilt $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Dann ist mit

$$M = \max(|A - \varepsilon|, |A + \varepsilon|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|)$$

die gewünschte Schranke gefunden, denn es gilt (trivialerweise) für $n \le N$

$$|a_n| \le M,$$

weil ja die entsprechenden Zahlen zur Maximumsbildung herangezogen wurden. Für $n > N$ ist $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ und damit

$$|a_n| < M.$$

□

Lemma 2.5.3 (Beschränktheit von Cauchyfolgen)
Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind beschränkt.

Beweis. Siehe Übungen. □

Satz 2.5.4 (Grenzwerte und Ordnung)
Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reellwertige Folgen mit Grenzwerten A, B. Dann gilt

1. *Ist $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $A \ge 0$.*
2. *Gilt $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so ist $A \le B$.*
3. *Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d. h. $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein positives $M \in \mathbb{R}$, so ist $|A| \le M$.*

Beweis. Siehe Übungen. □

Satz 2.5.5 (Grenzwerte und Arithmetik)
Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente, reellwertige Folgen. Dann gilt:

1. *Die Folge $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und*
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$
2. *Die Folge $\{a_n\cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und*
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$
3. *Ist $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$, so ist für fast alle $n\in\mathbb{N}$ (d. h. alle bis auf endlich viele) $b_n\neq 0$. Der Grenzwert einer Folge wird durch Abändern an endlich vielen Positionen nicht geändert. Wir ersetzen alle $b_n=0$ durch $b_n=1$. Dann konvergiert die Folge $\{a_n/b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}.$$

Beweis. (1) Als Grenzwert der Folge haben wir natürlich $\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$ im „Verdacht". Um zu beweisen, dass dies tatsächlich der Grenzwert ist, nehmen wir ein $\varepsilon>0$. Sei $N_1\in\mathbb{N}$ so gewählt, dass $m>N_1$ impliziert $|a_m-a|<\varepsilon/2$ und N_2 sei so gewählt, dass für $m>N_2$ gilt $|b_m-b|<\varepsilon/2$. Wähle $N=\max(N_1,N_2)$. Für $m>N$ gilt dann
$$|(a_m+b_m)-(a+b)|=|(a_m-a)+(b_m-b)|\leq|a_m-a|+|b_m-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) Dieser Beweis ist ein wenig komplizierter. Sei
$$A=\lim_{n\to\infty}a_n \text{ und } B=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Wir wollen zeigen
$$\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=A\cdot B.$$

Sei $\varepsilon>0$ gegeben. Nach Lemma 2.5.2 sind beide Folgen beschränkt, d. h. es existiert eine Zahl $S\in\mathbb{R}$ mit $S>0$, so dass
$$\forall m\in\mathbb{N} \text{ gilt } |b_m|<S.$$

Setze $M=\max(S,|A|,1)$. Dann gibt es ein N_1, so dass für alle $m>N_1$ gilt $|a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2\cdot M}$ und ein N_2, so dass für alle $m>N_2$ gilt $|b_m-B|<\frac{\varepsilon}{2\cdot M}$. Setze $N=\max(N_1,N_2)$. Dann gilt für $m>N$ sowohl $|a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2\cdot M}$ wie auch

$|b_m - B| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$. Betrachte für $m > N$

$$\begin{aligned}
|a_m \cdot b_m - A \cdot B| &= |a_m \cdot b_m - A \cdot b_m + A \cdot b_m - A \cdot B| \\
&\leq |(a_m - A) \cdot b_m| + |A \cdot (b_m - B)| \\
&= |(a_m - A)| \cdot |b_m| + |A| \cdot |(b_m - B)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M} S + |A| \frac{\varepsilon}{2M} \\
&\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(3) Die dritte Aussage folgt aus Teil (2) und einer Übungsaufgabe. □

Definition 2.5.6 (Intervall)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Menge der Zahlen

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$$

wird als abgeschlossenes Intervall *bezeichnet. Ist $b \geq a$, so ist*

$$\operatorname{diam}(I) = b - a$$

die Länge *des abgeschlossenen Intervalls.*

Definition 2.5.7 (Dedekindscher[4]Schnitt)
Eine Zerlegung von $\mathbb{Q}$ in zwei disjunkte Mengen A, B mit

D1 $A \cup B = \mathbb{Q}$,

D2 $\forall x \in A, \forall y \in B$ *gilt* $x < y$

wird als Dedekindscher Schnitt *bezeichnet.*

Satz 2.5.8 (Vollständigkeit, Dedekind Schnitte, Intervallschachtelung) *Das Vollständigkeitsaxiom ist äquivalent zum*

1. Intervallschachtelungsprinzip (`engl.` principle of nested intervals).
   Es sei für alle $k \in \mathbb{N}$ I_k ein abgeschlossenes Intervall. Es gelte für alle $k \in \mathbb{N}$ die Schachtelungsbedingung $I_{k+1} \subset I_k$ und
   $$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(I_k) = 0.$$
   Dann gibt es genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $\forall k$ gilt $x \in I_k$ oder auch
   $$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

2. *Dedekindschen Schnittaxiom.*
   Jeder Dedekindsche Schnitt (A, B) definiert genau eine reelle Zahl z mit $x \in A \Rightarrow x \leq z$ und $y \in B \Rightarrow z \leq y$ und zu jeder reellen Zahl z findet sich ein Dedekindscher Schnitt (A, B) mit $a \leq z,\ z \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$.

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass das Vollständigkeitsaxiom das Intervallschachtelungsaxiom impliziert. Wir betrachten die abgeschlossenen Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ und dazu die Folgen

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Beide Folgen sind Cauchyfolgen, denn für $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(I_n) < \varepsilon$ für alle $n > N$. Da für $m > N$ gilt $I_m \subset I_N$, gibt es für $i, j > N + 1$ ein $m > N$ mit $a_i \in I_m, a_j \in I_m$ und damit

$$d(a_i, a_j) = |a_i - a_j| \leq \operatorname{diam}(I_m) < \varepsilon.$$

Ersetzen wir in diesem Argument a_n durch b_n, so erhalten wir die entsprechende Aussage für die Folge der b_n. Aufgrund des Vollständigkeitsaxiom existieren die Grenzwerte

$$a = \lim_{j\to\infty} a_j, \quad b = \lim_{j\to\infty} b_j.$$

Es gilt (vgl. Übungen) $a \leq b$ und $a, b \in I_m$ für alle m. Dann ist

$$d(a, b) = b - a = \lim_{j\to\infty}(b_j - a_j) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{diam}(I_j) = 0.$$

[4]Julius Wilhelm Richard Dedekind (6.10.1831–12.2.1916) hatte die Idee der Dedekindschen Schnitte, seinen eigenen Angaben zu Folge, am 24. November 1858 während er eine Analysis-Vorlesung an der ETH Zürich vorbereitete. Seine wesentlichen wissenschaftlichen Arbeiten betreffen die Algebra und die Mengenlehre.

Also ist $a = b$.
Im nächsten Schritt folgern wir aus dem Intervallschachtelungsprinzip das Dedekindsche Schnittaxiom. Angenommen wir haben zwei nichtleere, disjunkte Mengen $A, B \subset \mathbb{Q}$ mit $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $x \in A, y \in B$ impliziert $x < y$. Sei $a \in A$ und $b \in B$. Wir definieren rekursiv eine Folge von geschachtelten, abgeschlossenen Intervallen

$$I_m = [a_m, b_m], a_m \in A, b_m \in B$$

mit $\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(I_m) = 0$. Setze $a_1 = a$, $b_1 = b$. Angenommen wir hätten $a_m \in A, b_m \in B$ konstruiert, wir geben nun die Regel an, mit deren Hilfe wir a_{m+1}, b_{m+1} konstruieren. Wir unterscheiden zwei Fälle

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_m + b_m}{2} \in A \\ \dfrac{a_m + b_m}{2} \in B \end{array}\right\} \text{setze} \left\{\begin{array}{ll} a_{m+1} = \dfrac{a_m + b_m}{2}, & b_{m+1} = b_m \\ a_{m+1} = a_m, & b_{m+1} = \dfrac{a_m + b_m}{2} \end{array}\right. .$$

Dann ist $\operatorname{diam}(I_{m+1}) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(I_m) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot 2^{-m+1} = (b-a)2^{-m}$. Nach Satz 2.3.6 (2) konvergiert $\operatorname{diam}(I_m) \to 0$ und es gibt nach dem Intervallschachtelungsprinzip genau eine reelle Zahl $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m$. Wir behaupten nun, x habe die gewünschten Eigenschaften.

Erstens für alle $a \in A$ ist $x \geq a$: Angenommen es gibt ein $A \ni a_0 > x$. Dann ist für alle $b \in B$

$$b - x > b - a_0.$$

Da die Folgenglieder $b_m \in B$ liegen und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n > N$ impliziert $b_n - a_n < \varepsilon$, erhält man mit

$$b - a_0 < b_n - x \leq b_n - a_n < \varepsilon < b - a_0$$

für $\varepsilon < b - a_0$ einen Widerspruch.
Zweitens gilt für alle $b \in B$ die Ungleichung $b \geq x$. Die Begründung ist eine Kopie der oben angegebenen Begründung. Damit hat dann x die gewünschten Eigenschaften. Zu gegebenem $x \in \mathbb{R}$ erhält man einen Schnitt durch

$$A = \left\{ y \in \mathbb{Q} \;\middle|\; y < x \right\} \text{ und } B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \;\middle|\; y \geq x \right\}.$$

Im nächsten Schritt beweisen wir, dass das Dedekindsche Schnittaxiom das Intervallschachtelungsprinzip impliziert. Wir setzen also voraus, dass wir eine Folge von abgeschlossenen Intervallen I_m hätten mit $I_{m+1} \subset I_m$ für alle m und $\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(I_m) = 0$. Zu zeigen ist, dass genau ein x im Schnitt aller dieser abgeschlossenen Intervalle liegt. Setze $I_m = [a_m, b_m]$ und

$$A_m = \left\{ y \in \mathbb{Q} \;\middle|\; y \leq a_m \right\} \text{ und } B_m = \left\{ y \in \mathbb{Q} \;\middle|\; y > b_m \right\}.$$

Sei

$$A_0 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \text{ und } B = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m.$$

Setze $A = A_0 \cup \left\{ q \in \mathbb{Q} \,\middle|\, q \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \right\}$. Wir zeigen zunächst $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{Q}$. Angenommen $z \in A \cap B$. Dann ist $z \in A$ und $z \in B$, also insbesondere $z \in A_0$ oder $z \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ und $z \in B$. Ist $z \in A_0 \cap B$, so gibt es ein a_m mit $z \leq a_m$ und ein b_n mit $z \geq b_n$. Dann ist aber $a_m \geq b_n$ und dies ist ein Widerspruch. Im anderen Fall ist $z \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ und in B. Dann ist $z \leq B_n$ für alle n und $z > b_m$ für alle m. Auch dies ist ein Widerspruch!

Wir zeigen $A \cup B = \mathbb{Q}$. Ist $x \in \mathbb{Q}$ und $x \notin A_0 \cup B$, so ist $x \geq a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ und damit $x \in A$. Sei ζ die zu diesem Dedekindschen Schnitt gehörende Zahl. Dann ist $\zeta \geq a_n$ für alle n und $\zeta \leq b_n$ für alle n, also $\zeta \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$. Da $\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(I_m) = 0$ ist, gibt es in diesem Schnitt höchstens einen Wert.

Im letzten Schritt zeigen wir noch, dass das Intervallschachtelungsprinzip die Vollständigkeit zur Folge hat. Wir beginnen mit einer Cauchyfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Setze $\varepsilon_i = 2^{-i}$ und definiere eine Folge N_i natürlicher Zahlen mit

$$N_{i+1} > N_i \text{ und für } j, k > N_i \text{ gilt } |x_j - x_k| < \varepsilon_{i+1}.$$

Setze $I_i = [x_{N_i+1} - \varepsilon_i, x_{N_i+1} + \varepsilon_i]$. Man beachte, dass für $j > N_i$ gilt $x_j \in I_i$. Dann ist für $j > k$ das abgeschlossene Intervall $I_j \subset I_k$ und $\operatorname{diam}(I_m) = 2^{-m+1}$. Daher sind die Voraussetzungen des Intervallschachtelungsprinzip erfüllt und es existiert ein $x \subset \cap_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Wir müssen noch zeigen, dass $\lim_{j\to\infty} x_j = x$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle N, so dass $i > N$ impliziert $2\varepsilon_i < \varepsilon$. Dies ist möglich, da $\varepsilon_i \to 0$ konvergiert. Dann ist $x \in I_i = [x_{N_i+1} - \varepsilon_i, x_{N_i+1} + \varepsilon_i]$. Da auch alle $x_j \in I_i$ für $j > N_i$ folgt, dass für diese j gilt $|x_j - x_i| < 2\varepsilon_i < \varepsilon$. $\square$

Wir wissen bereits, dass eine Folge in $\mathbb{R}$ genau dann konvergent ist, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Welche Kriterien haben wir für die Konvergenz einer Folge?

Wir betrachten zunächst einige einfache Beispiele:

1. Die konstante Folge $\xi = (a, a, a, \ldots, a, \ldots)$ ist Cauchyfolge und konvergent.

   Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, betrachte ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$. Dann ist für $i, j > N$ $|\xi_i - \xi_j| = 0 < \varepsilon$.

2. Die Folge $\xi_n = \frac{1}{n}$ ist Cauchy-Folge und damit konvergent.

   Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon}$ und somit ist $\frac{2}{N} < \varepsilon$ und für $i, j > N$ ist demnach $\frac{1}{i}, \frac{1}{j} < \frac{1}{N}$ und es gilt

$$\left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| < \frac{1}{i} + \frac{1}{j} < \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

3. Die dritte Folge aus Beispiel 2.4.6 ist konvergent. Dies folgt aus der Tatsache, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^{-n+1} \leq \frac{1}{n}$. Dies beweist man durch vollständige Induktion, vgl. Blatt 4 Aufgabe 3.

Ein einfaches Konvergenzkriterium lässt sich mit dem folgenden Begriff formulieren:

Definition 2.5.9 (Monotone Folgen)
Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton steigend, *wenn für $m > n$ gilt $a_m \geq a_n$. Sie wird als* monoton fallend *bezeichnet, wenn für $m > n$ gilt $a_m \leq a_n$. Die Folge heißt* monoton, *falls sie monoton steigend oder monoton fallend ist. Eine Folge heißt* streng monoton steigend, *wenn aus $m > n$ folgt $a_m > a_n$. Entsprechendes gilt für* streng monoton fallend *und* streng monoton.

Satz 2.5.10 (Konvergenz beschränkter monotoner Folgen)
Eine beschränkte, monotone, reellwertige Folge ist konvergent.

Beweis. Die Beweise für monoton steigende und monoton fallende Folgen sind nahezu identisch, wir beweisen oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die Behauptung im monoton steigenden Fall.

Sei also $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende, beschränkte Folge. Es gibt daher ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist insbesondere $a_n \leq M$. Daher ist die Menge

$$B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \forall n : \ y > a_n \right\}$$

nichtleer, setze $A = \mathbb{Q} \setminus B$. Aus der Mengenalgebra aus der Linearen Algebra erhält man die folgende nützliche Darstellung für diese Mengen

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ mit } B_n = \left\{ y \in \mathbb{Q} \,\middle|\, y > a_n \right\},$$

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ wobei } A_n = \left\{ y \in \mathbb{Q} \,\middle|\, y \leq a_n \right\}.$$

Dann ist $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$. Darüber hinaus ist auch leicht einsichtig

$$\forall_{a\in A} \forall_{b\in B} \text{ gilt } a < b.$$

Damit haben wir einen Dedekindschen Schnitt, der eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ definiert. Wir beweisen nun $z = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wir müssen zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m > N$ gilt $|z - a_m| < \varepsilon$. Da jede Zahl $\mathbb{Q} \ni a < z$ in A liegt, gibt es zu jeder solchen Zahl mindestens einen Index k mit $a_k > a$. Da es eine Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $z - \varepsilon < a < z$ gibt, existiert auch ein N mit $a_N > a > z - \varepsilon$. Da für alle $n > N$

gilt $a_n \geq a_N$, ist die Behauptung gezeigt, falls wir zeigen können, dass $a_n \leq z$. Da $a_n \in A$ und $z \geq a$ für alle $a \in A$ ist dies klar! □

Eine Abschwächung des Begriffes des Grenzwertes ist der Begriff Häufungspunkt. Es spielt sowohl in der Theorie wie auch in Anwendungen, z. B. in der Theorie dynamischer Systeme, eine wichtige Rolle.

Definition 2.5.11 (Häufungspunkt einer Folge)
Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) und $x \in X$. Das Element $x \in X$ heißt Häufungspunkt *(*`engl.` accumulation point*) der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

Satz 2.5.12 (Bolzano[5]-Weierstraß[6])
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, M die Schranke, d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq M$. Alle Folgenglieder liegen zwischen $-M$ und M, $I_0 = [-M, M]$. Wir betrachten nun die beiden Teile $[-M, 0], [0, M]$. In mindestens einem liegen unendliche viele Folgenglieder, wir wählen dieses aus und nennen es I_1. Angenommen, wir hätten n abgeschlossene Intervalle $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_{n-1}$ ausgewählt und in jedem dieser abgeschlossenen Intervalle liegen unendlich viele Elemente. Dann zerlegen wir $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ in die beiden abgeschlossenen Intervalle

$$[a_{n-1}, \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}], [\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_{n_1}].$$

Mindestens eines enthält unendlich viele Folgenglieder. Wir wählen es als I_n aus. Die Länge von I_N ist $\operatorname{diam}(I_n) = 2^{-n}2M = 2^{-n+1}M$. Damit erhalten wir eine geschachtelte Folge von abgeschlossenen Intervallen, deren Längen gegen 0 konvergiert. Aufgrund des Intervallschachtelungsprinzips gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ mit

$$z \in \bigcap_{n=0,1,2,\ldots} I_n.$$

z ist Häufungspunkt der Folge, da in jedem I_n unendlich viele der Folgenglieder liegen. □

---

[5]Bernard Bolzano (5.10.1781–18.12.1848) studierte Philosophie, Mathematik und Theologie. Er hatte zunächst eine Professur für Religionswissenschaft. Seine wesentlichen mathematischen Erkenntnisse waren der Zwischenwertsatz und der nach ihm benannte Satz von Bolzano-Weierstraß.

[6]Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (31.10.1815–19.2.1897) war einer der bedeutendsten Mathematiker des 19 Jahrhunderts. Er was zunächst Lehrer an einer höheren Schule und fiel durch seine Publikationen, die wichtige Zweige der Mathematik revolutionierten, auf. Er wurde Professor an der Humboldt Universität in Berlin. Durch sein Wirken wurde Berlin zu einem der großen mathematischen Zentren dieser Zeit.

Definition 2.5.13 (Teilfolge)
Ist $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge und* $\mathbf{b} = \{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *eine weitere Folge, so heißt* $\mathbf{b}$ *eine* Teilfolge *von* $\mathbf{a}$, *falls zu jedem* $m \in \mathbb{N}$ *ein* $n = n(m) \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$b_m = a_{n(m)}$$

und die Folge der $n(m)$ *ist streng monoton steigend.*

Bemerkung 2.5.14 (Teilfolgen)
Eine Teilfolge ist einfach eine Folge, die durch Auswahl eines Teils der Folgenglieder entsteht und die dann in natürlicher Weise nummeriert werden. Wir stellen uns dies etwa so vor:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_7 & \dots & \dots & \dots & a_n & \dots \\ & \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & b_1 & & & b_2 & & b_3 & & b_m & \\ & 2 = n(1) & & & 7 = n(2) & & n(3) & & n = n(m) & \end{array}$$

Korollar 2.5.15 (Folgen mit konvergenten Teilfolgen)
Jede reelle, beschränkte Folge $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei z ein Häufungspunkt der Folge $\mathbf{a}$. Sei für $i \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_i = 2^{-i}$. Nach der Definition von Häufungspunkt gibt es ein $a_{n(i)}, n(i) > n(i-1)$ mit $d(a_{n(i)}, z) < \varepsilon_i$. Setze $b_i = a_{n(i)}$. Offensichtlich ist die Folge $\mathbf{b} = \{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Wir müssen noch die Konvergenz gegen z zeigen. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_i < \varepsilon$. Setze $N = i - 1$. Dann ist für $j > N$

$$d(b_j, z) = |a_{n(j)} - z| < \varepsilon_j \le \varepsilon_i < \varepsilon.$$

$\square$

Satz 2.5.16 (Nichtabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)
$\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass das Intervall $[0, 1]$ nicht abzählbar ist. Angenommen $\xi : \mathbb{N} \to [0, 1]$ sei eine Bijektion. Wir konstruieren eine Folge von geschachtelten Intervallen $[a_n, b_n]$, deren Längen eine Nullfolge bilden, so dass der Schnitt genau einen Punkt enthält. Aufgrund der Konstruktion wird dieser Punkt nicht im Bild von ξ liegen.
Setze $a_0 = 0, b_0 = 1$. Angenommen wir hätten für $n \in \mathbb{N}_0$ bereits ein Intervall $[a_n, b_n]$ ausgewählt. Setze

$$\eta_n = a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n), \ \sigma_n = a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n).$$

Setze nun

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \eta_n \quad &\text{falls} \quad \xi_{n+1} \geq \frac{a_n + b_n}{2}, \\ a_{n+1} = \sigma_n, b_{n+1} = b_n \quad &\text{falls} \quad \xi_{n+1} < \frac{a_n + b_n}{2}. \end{aligned}$$

Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ das Folgenglied $\xi_n \notin [a_n, b_n]$. Insbesondere gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\xi_n \in \bigcap_{m=0}^{\infty} [a_m, b_m].$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$ gilt $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$ und es gilt

$$\operatorname{diam}([a_{m+1}, b_{m+1}]) = \frac{1}{3} \operatorname{diam}([a_m, b_m]).$$

Also bildet die Folge der Intervalllängen eine Nullfolge und

$$S = \bigcap_{m=0}^{\infty} [a_m, b_m] \neq \emptyset.$$

Sei $x \in S$. Dann gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n = x$. Also ist ξ keine Bijektion. □

Bemerkung 2.5.17 (Kritik der Konstruktion)
Will man die reellen Zahlen konstruieren, so kann man natürlich nicht den Begriff der Metrik mittels der reellen Zahlen definieren. Man kann dann entweder den Weg über die Dedekindschen Schnitte gehen oder Cantor folgend den Weg über Cauchyfolgen. Dazu muss man zunächst Cauchyfolgen rationaler Zahlen definieren. Ein Weg dazu wird in dem sehr empfehlenswerten Buch von EBBINGHAUS *et al. mit dem schlichten Titel „Zahlen“ [4] dargestellt, vgl. dort die Seiten 30–35. Speziell sei auf den letzten Absatz auf Seite 32 hingewiesen.*

2.6 Irrationale Zahlen

Was bringen uns die reellen Zahlen? Zunächst überlegen wir uns, dass im Körper $\mathbb{Q}$ das Ziehen der Wurzel im Allgemeinen nicht möglich ist. Schon das Beispiel der Quadratwurzel von 2 zeigt uns das Problem.

Satz 2.6.1 (Nichtexistenz rationaler Wurzeln)
Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis. Angenommen, es gebe eine solche Zahl $x \in \mathbb{Q}$. Wir schreiben x in der Form

$$x = \frac{p}{q} \text{ mit } \mathbf{ggT}(p, q) = 1.$$

Hier bezeichnet **ggT** den *größten gemeinsamen Teiler*. Dann ist

$$2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \text{ mit } \mathbf{ggT}(p^2, q^2) = 1.$$

Dies bedeutet

$$2q^2 = p^2.$$

Da die linke Seite von der Zahl 2 geteilt wird, ist dies auch für die rechte Seite der Fall. Also $2|p^2$. Dann folgt aber $2|p$, denn für eine Primzahl gilt: Teilt eine Primzahl ein Produkt zweier Zahlen, so teilt sie mindestens einen der beiden Faktoren. Dann gilt aber $2^2|p^2$ und damit haben wir $2^2|2q^2$. Nach dem Kürzen haben wir

$$2|q^2$$

und damit $2|q$. Dann ist aber $\mathbf{ggT}(p, q)$ ein Vielfaches von 2 im Widerspruch zur Annahme $\mathbf{ggT}(p, q) = 1$. □

Korollar 2.6.2 (Lösbarkeit ganzzahliger quadratischer Gleichungen)
Für eine ganze Zahl z ist die Gleichung

$$x^2 = z$$

in $\mathbb{Q}$ genau dann lösbar, wenn diese in $\mathbb{Z}$ lösbar ist.

Beweis. Siehe Übungen! Man analysiere den Beweis von Satz 2.6.1. □

Bemerkung 2.6.3 (Iterationsverfahren)
Die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \; x_1 = 1$$

ist eine Cauchyfolge. Sie konvergiert gegen die Lösung der Gleichung $z^2 = 2$ in $\mathbb{R}$. Vergleiche die entsprechende Übungsaufgabe. Diese Methode die Quadratwurzel auszurechnen beruht auf einem nach dem griechischen Mathematiker Heron[7,8] benannten Verfahren.

[7] Heron von Alexandria lebte im ersten Jahrhundert nC. Im Altertum wurde er wegen seiner Schriften zur Mechanik und der praktischen Umsetzung in Form eines mechanischen Theaters berühmt. Er schrieb auch über Technik, Pneumatik und Vermessungskunde.

[8] Das Verfahren von Heron startet zur Berechnung der Quadratwurzel von $q > 0$ mit einem Rechteck mit Seitenlängen $a > 0, \; b > 0$ der Fläche $a \cdot b = q$. Nun berechnen wir sukzessive neue Rechtecke, die das Quadrat approximieren. Sind a_n, b_n berechnet, so gibt man die neuen Werte $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{q}{a_{n+1}}$ an. Die im Text angegebene Folge ist mit dieser Folge von Paaren $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ eng verwandt.

Definition 2.6.4 (Monotone Funktionen)
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $D(f) = D$ sei eine Funktion. f heißt monoton steigend, falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$. Sie ist streng monoton steigend, falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$. Entsprechend definiert man monoton fallend und streng monoton fallend. Ist die Funktion entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend, so bezeichnen wir die Funktion als streng monoton. Entsprechend definieren wir die Funktion als monoton.

Satz 2.6.5 (Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion)
Ist $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$, $D(f) = D$ streng monoton, so ist f umkehrbar und die Umkehrung ist streng monoton.

Beweis. Da f streng monoton ist, folgt sofort die Injektivität, denn aus $f(x) = f(y)$ und $x < y$ oder $x > y$ folgt sofort ein Widerspruch zur strengen Monotonie.

Sei f oBdA streng monoton steigend $z_1 = f(x), z_2 = f(y)$ und $z_1 < z_2$. Dann ist $f^{-1}(z_1) = x, f^{-1}(z_2) = y$. Ist $x \neq y$, so ist entweder $x < y$ oder $x > y$. Der letzte Fall ist ein Widerspruch zu der Tatsache, dass f streng monoton steigend ist und daher ist $x < y$. □

Hilfssatz 2.6.6 (Monotonie von x^n)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f_n : x \mapsto x^n$ ist auf $Q = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 0 \right\}$ streng monoton steigend. Insbesondere ist auch ihre Umkehrfunktion streng monoton.

Beweis. (Induktion) Sei $x < y$ und $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; x^n < y^n \right\}$. Dann ist $1 \in A$ und $y > 0$. Sei $n \in A$, dann gilt

$$x^{n+1} = x \cdot x^n < y \cdot x^n < y \cdot y^n = y^{n+1}$$

und $n \in A$. □

Satz 2.6.7 (Lösbarkeit von $x^n = p > 0$)
In $\mathbb{R}$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem $p \in Q$ ($Q = \left\{ x \;\middle|\; x \geq 0 \right\}$) eine Lösung der Gleichung

$$x^n = p.$$

Beweis. Für diese Aussage kann man drei alternative Beweise angeben, jeweils basierend auf dem Vollständigkeitsaxiom, dem Intervallschachtelungsprinzip und dem Dedekindschen Schnittaxiom. Wir gehen den letzten Weg und betrachten die Mengen

$$A_+ = \left\{ q \in \mathbb{Q}, q \geq 0 \;\middle|\; q^n \leq p \right\}, \quad B = \left\{ q \in \mathbb{Q}, q \geq 0 \;\middle|\; q^n > p \right\},$$

$$A = A_+ \cup \left\{ q \in \mathbb{Q} \,\middle|\, q < 0 \right\}.$$

Zu zeigen ist zunächst: $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $\forall a \in A, b \in B$ gilt $a < b$. Nach dem archimedischen Prinzip gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > p$. Dann ist

$$0 \leq \frac{p}{m} < 1, \ \frac{p}{m} \leq p$$

und damit

$$\left(\frac{p}{m}\right)^n \leq \frac{p}{m} \leq p,$$

also ist $A_+ \neq \emptyset$. Setze $A = A_+ \cup \left\{ q \in \mathbb{Q} \,\middle|\, q < 0 \right\}$. Gleichermaßen folgt aus $p < m$ und $1 \leq m$, dass $m^n > p$ und damit ist auch $B \neq \emptyset$. Nach Definition von A, B ist $A \cap B = \emptyset$. Da $\mathbb{R}$ vollständig geordnet ist, folgt für jedes $x > 0$ $x^n < p \vee x^n = p \vee x^n > p$ und damit ist $A \cup B = \mathbb{Q}$. Ist $a \in A$ und $b \in B$, so ist $a^n < b^n$, also wegen der Monotonie (Hilfssatz 2.6.6) der n-ten Potenz auch $a < b$. Damit haben wir einen Dedekindschen Schnitt gefunden, der eine reelle Zahl x definiert. Wir müssen noch beweisen, dass $x^n = p$ ist. Angenommen $x^n \neq p$. Dann ist $x^n < p$ oder $x^n > p$. Beide Fälle werden auf gleiche Weise behandelt. Wir nehmen an, $x^n < p$. Wenn wir eine rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ finden mit $x^n \leq \alpha \leq p$, die n-te Potenz einer rationalen Zahl ist, so sind wir fertig, denn dies ergibt einen Widerspruch zur Definition des Dedekindschen Schnittes. Dazu betrachten wir die Zahl $x + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Wir zeigen nun, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $(x + \varepsilon)^n < p$.

$$\begin{aligned}
(x+\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \varepsilon^k \\
&= x^n + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \varepsilon^{k-1} \right) \\
&\leq x^n + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \max(x,1)^{n-k} \max(\varepsilon,1)^k \right) \\
&\leq x^n + \varepsilon (\max(x,1)\max(\varepsilon,1))^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= x^n + \varepsilon (\max(x,1)\max(\varepsilon,1))^{n-1} 2^n.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Ausdruck der Form

$$x^n + \varepsilon K,$$

wobei K für $0 < \varepsilon < 1$ eine positive reelle Zahl (unabhängig von ε) ist. Nach dem archimedischen Prinzip können wir $1 > \varepsilon > 0$ so klein wählen, dass $\varepsilon K < p - x^n$, und damit ist

$$x^n < (x + \varepsilon)^n < p.$$

Da es zwischen x und $x+\varepsilon$ nach Satz 2.3.3 (5) mindestens eine rationale Zahl s gibt, liegt deren n-te Potenz s^n zwischen x^n und p, also $x^n < s^n = \alpha < p$. Dann ist $s \in A$, denn $s^n < p$, aber $s > x$ im Widerspruch zur Konstruktion des Dedekindschen Schnittes. □

Definition 2.6.8 (Wurzel)
Für eine Zahl $p \in \mathbb{R}_+$ sei die positive Lösung der Gleichung $z^n = p$ mit $\sqrt[n]{p}$ bezeichnet. Wir nennen dies die n-te Wurzel *aus p. Ist $n = 2$ sprechen wir von der* Quadratwurzel *und schreiben $\sqrt{p}$.*

2.7 Teilmengen von $\mathbb{R}$

Wir hatten bereits spezielle Teilmengen, die abgeschlossenen Intervalle, gesehen. Wir wollen nun weitere spezielle Teilmengen angeben und einige Konstruktionen in Zusammenhang mit Teilmengen durchführen.

Definition 2.7.1 (Intervalle)
Seien a, b reelle Zahlen.

1. *Eine Teilmenge der Form $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b\right\}$ heißt* offenes Intervall. *Wir schreiben dafür (a, b).*
2. *Eine Teilmenge der Form $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \leq b\right\}$ oder $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x < b\right\}$ heißt halboffenes Intervall. Im ersten Fall schreiben wir $(a, b]$, im zweiten $[a, b)$.*

Ein Intervall *ist eine Menge, die entweder ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall ist.*

Wir beginnen nun mit einer beliebigen Teilmenge M von $\mathbb{R}$.

Definition 2.7.2 (Beschränkte Mengen)
Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, so heißt M nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in M$ gilt $x \leq K$. Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, so heißt M nach unten beschränkt, wenn $-M$ nach oben beschränkt ist.

Satz 2.7.3 (Kleinste obere Schranke)
Ist eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert eine kleinste obere Schranke, d. h. eine Schranke K, so dass aus K' ist Schranke für M folgt $K \leq K'$. Eine entsprechende Aussage gilt für nach unten beschränkte Mengen und einer größten unteren Schranke.

Beweis. Sei $B = \left\{ b \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \forall x \in M: \; b > x \right\} \neq \mathbb{Q}$ und $A = \mathbb{Q} \setminus B$. Da M nach oben beschränkt ist, ist B nicht leer. Dann sind A, B disjunkt, ihre Vereinigung ist $\mathbb{Q}$ und für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ ist $a < b$. Also ist das Paar A, B ein Dedekindscher Schnitt und definiert eine reelle Zahl K. K ist eine obere Schranke für M. Denn zu $x \in M$, $x > K$, gibt es ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $b \in (K, x)$, insbesondere $b > K$. Dann ist aber K nicht die reelle Zahl, die dem Dedekindschen Schnitt der Mengen A, B entspricht. Ist nun K' eine obere Schranke für M und ist $K' < K$, so finden wir eine rationale Zahl $y \in (K', K)$. Dann ist aber für alle $m \in M$ $y > K' \geq m$ und damit $y \in B$. Dann ist $K > y$ und dies widerspricht der Konstruktion des Dedekindschen Schnittes. $\square$

Definition 2.7.4 (Supremum)
Die Zahl K aus Satz 2.7.3 heißt Supremum *der Menge M und wird mit* $\sup M$ *bezeichnet. Entsprechend bezeichnen wir die größte untere Schranke als* Infimum *von M und schreiben dafür* $\inf M$.

Bemerkung 2.7.5 (Supremum/Infimum der leeren Menge)
Ist $M = \emptyset$, so ist M offensichtlich beschränkt, die Menge B, wie oben definiert, ist dann $B = \mathbb{Q}$ und daher $A = \emptyset$. Dieses Paar definiert keinen Dedekindschen Schnitt und auch keine reelle Zahl. Wir ordnen diesem Paar das Symbol $-\infty$ und dem Paar $(\mathbb{Q}, \emptyset)$ das Symbol ∞ zu. In diesem Sinne ist

$$\sup \emptyset = -\infty \text{ und } \inf \emptyset = \infty.$$

Hat man eine Folge, so kann man dieser die zugrundeliegende Menge zuordnen, einfach, indem man die Folgenglieder als Elemente eine Menge auffasst. Ist also $\mathbf{a} = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge so ordnen wir dieser die Menge

$$A = \left\{ a_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$$

zu. Notwendig für die Konvergenz der Folge $\mathbf{a}$ ist die Beschränktheit der Folge $\mathbf{a}$ und damit der Menge A. Für den Fall, dass diese Menge nicht beschränkt ist, wollen wir noch zwei Spezialfälle betrachten. Dazu definieren wir die erweiterten reellen Zahlen, indem wir zwei extra Punkte hinzunehmen.

Definition 2.7.6 (Erweiterte reelle Zahlen)
Wir setzen

$$\mathbb{R}_{erw} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

und bezeichnen dies als erweiterte reelle Zahlen.

Definition 2.7.7 (Konvergenz gegen Unendlich)
Eine divergente Folge $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}_{erw}$ *gegen* ∞ *bzw.* $-\infty$, *wenn zu jedem* $K > 0$ *eine Zahl* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n > N$ *gilt* $a_n > K$ *bzw.* $a_n < -K$. *Eine Folge heißt* konvergent in $\mathbb{R}_{erw}$, *wenn sie entweder in* $\mathbb{R}$ *konvergiert oder in* $\mathbb{R}$ *divergiert und gegen* ∞ *oder* $-\infty$ *in* $\mathbb{R}_{erw}$ *konvergiert. Wir schreiben* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \pm\infty$ *je nachdem, ob die Folge in* $\mathbb{R}$ *gegen* a *konvergiert oder in* $\mathbb{R}_{erw}$ *gegen* $\pm\infty$ *konvergiert.*

Korollar 2.7.8 (Konvergenz monotoner Folgen in $\mathbb{R}_{erw}$)
Jede reelle, monotone Folge konvergiert in $\mathbb{R}_{erw}$.

Ist nun eine reelle Folge $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Dann konstruieren wir neue Folgen

$$A_n = \sup\left\{a_m \;\middle|\; m \geq n\right\},\ B_n = \inf\left\{a_m \;\middle|\; m \geq n\right\}.$$

Nun ist $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge und daher existieren die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathbb{R}_{erw}$.

Definition 2.7.9 (Limessuperior, Limesinferior)
Es sei $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge. Dann nennen wir die erweiterte reelle Zahl* $\lim_{n\to\infty} A_n$ *den* Limessuperior *und* $\lim_{n\to\infty} B_n$ *den* Limesinferior *der Folge* $\mathbf{a}$. *Wir schreiben*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Satz 2.7.10 (Häufungspunkte einer Folge)
Alle Häufungspunkte einer Folge liegen im abgeschlossenen Intervall

$$[\liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n].$$

Beweis. Übungen. □

2.8 Die komplexe Zahlenebene

Wir führen auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ eine Addition ein, indem wir Paare komponentenweise addieren, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

und Paare multiplizieren nach folgender Regel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Man prüft nach (längere Rechnung): Diese beide Verknüpfungen machen $\mathbb{R}^2$ zum Körper, der $\mathbb{R}$ als Unterkörper enthält indem wir $\mathbb{R}$ auffassen als

$$\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir betrachten den Punkt (x, y) als Punkt in der Ebene mit Koordinaten x, y. Für das Paar (x, y) schreiben wir auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + \mathtt{i}y.$$

Die Rechenregeln lauten dann

$$(x_1 + \mathtt{i}y_1) + (x_2 + \mathtt{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathtt{i}(y_1 + y_2),$$

bzw.

$$(x_1 + \mathtt{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathtt{i}y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + \mathtt{i}(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Damit sieht man die Erweiterung der Lösbarkeit von Gleichungen gegenüber $\mathbb{R}$, während in $\mathbb{R}$ die Gleichung $x^2 = -1$ nicht lösbar ist, wird die Gleichung $z^2 = -1$ in $\mathbb{C}$ durch $z = \mathtt{i}$ gelöst. Wir haben damit einen neuen Körper konstruiert, den wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen und der eine Erweiterung von $\mathbb{R}$ ist, in dem quadratische Gleichungen allgemein lösbar sind. Wir bezeichnen das allgemeine Element in $\mathbb{C}$ mit $z = x + \mathtt{i}y$. Wir nennen z ein komplexe Zahl. Mit $\bar{z} = x - \mathtt{i}y$ bezeichnen wir die konjugiert komplexe Zahl. (Achtung: engl.: **complex conjugate**). Ist $z = x + \mathtt{i}y$ wird x als *Realteil* und y als *Imaginärteil* von z bezeichnet, man schreibt

$$x = \mathrm{Re}(z) \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

Hier einige Regeln zum Umgang mit der Konjugation.

Lemma 2.8.1 (Rechenregeln in $\mathbb{C}$)

1. $\bar{\bar{z}} = z$;
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
4. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$;
5. $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathtt{i}}(z - \bar{z})$.

Beweis.

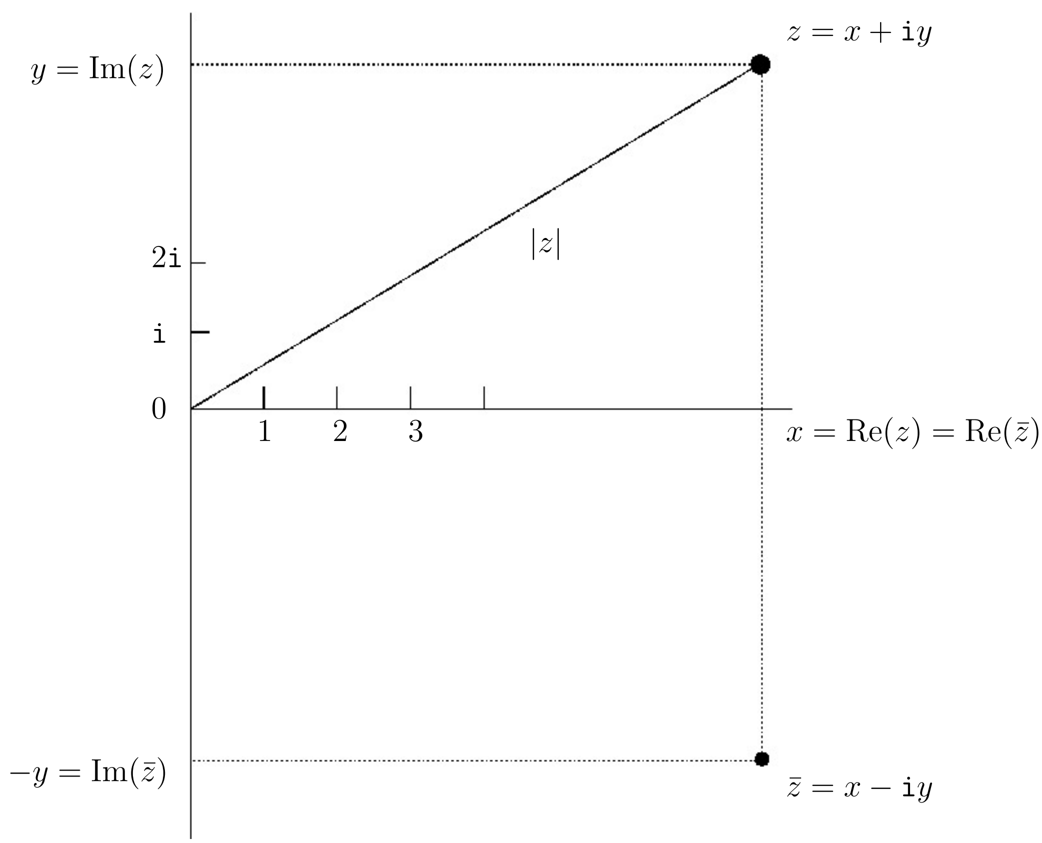

Abbildung 2.3: Veranschaulichung einer komplexen Zahl

1. $\bar{\bar{z}} = \overline{x - \mathtt{i}y} = x + \mathtt{i}y = z$.

2.
$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + \mathtt{i}y_1) + (x_2 + \mathtt{i}y_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + \mathtt{i}(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - \mathtt{i}(y_1 + y_2) = (x_1 - \mathtt{i}y_1) + (x_2 - \mathtt{i}y_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + \mathtt{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathtt{i}y_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathtt{i}(x_2y_1 + x_1y_2)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathtt{i}(x_2y_1 + x_1y_2) \\ &= (x_1 - \mathtt{i}y_1) \cdot (x_2 - \mathtt{i}y_2) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

Die vierte und fünfte Aussage sind unmittelbar klar. □

Eine leichte Rechnung zeigt
$$z \cdot \bar{z} = (x + \mathtt{i}y) \cdot (x - \mathtt{i}y) = x^2 + y^2 \geq 0.$$
Wir notieren für die Größe
$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
die folgenden Eigenschaften, die wir von der Betragsfunktion in $\mathbb{R}$ kennen.

Satz 2.8.2 (Betragsfunktion)
Für $z = x + \mathtt{i}y$ gilt

1. $|z| \geq 0$ *und*
$$|z| = 0 \iff z = 0;$$

2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Die Funktion $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+ : (z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$ ist eine Metrik auf $\mathbb{C}$.

Beweis.

1. $z \cdot \bar{z} = (x + \mathtt{i}y)(x - \mathtt{i}y) = x^2 + y^2 \geq 0$. Ist $x^2 + y^2 = 0$, so gilt $x = y = 0$ und damit ist $z = 0$. Die Umkehrung ist offensichtlich.

2.
$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2|^2 &= z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} \\ &= z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} \\ &= z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2.\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man die Behauptung.

3. Zunächst bemerken wir die für alle $z \in \mathbb{C}$ intuitiv offensichtliche Ungleichung
$$|\operatorname{Re}(z)| = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$
Mit $z_j = x_j + \mathtt{i} y_j$, $j = 1, 2$ gilt
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$
Daraus folgt dann die Behauptung.

Wir müssen nun beweisen, dass d eine Metrik ist, die sich sogar als *Fortsetzung*, der auf $\mathbb{R}$ definierten Metrik erweist. Dazu müssen wir die Eigenschaften (**M 1–3**) aus Definition 2.4.1 nachprüfen. Natürlich ist $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $z_1 = z_2$. Also haben wir (**M 1**).

Wir prüfen (**M 2**):
$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= |z_1 - z_2| \\ &= \sqrt{(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}} \\ &= \sqrt{(-(z_1 - z_2))\overline{(-1(z_1 - z_2))}} \\ &= |z_2 - z_1| \\ &= d(z_2, z_1). \end{aligned}$$
Bleibt (**M 3**).
$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= |z_1 - z_2| \\ &= |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\ &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_1, z_3). \end{aligned}$$
Betrachtet man die Teilmenge derjenigen Punkte mit verschwindendem Imaginärteil als den Unterkörper der reellen Zahlen, so ergibt die Einschränkung von d auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau die Metrik auf $\mathbb{R}$. □

Aufgrund dieser letzten Beobachtung erhalten wir sofort die folgende Aussage.

Korollar 2.8.3 (Konvergenz komplexer Folgen)
Eine Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *ist genau dann konvergent gegen* $z_0 \in \mathbb{C}$, *wenn die reellen Folgen* $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $\mathrm{Re}(z_0)$ *bzw.* $\mathrm{Im}(z_0)$ *konvergent sind.*

Korollar 2.8.4 (Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$)

1. *Eine Folge* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn die reellen Folgen* $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyfolgen sind.*

2. $(\mathbb{C}, d)$ *ist vollständig.*

Wichtige Definitionen und Sätze im zweiten Kapitel

1. Körperaxiome 2.1.1
2. Anordnungsaxiome 2.2.1
3. Archimedische Anordnung 2.2.8
4. Wohlordnungssatz 2.3.2
5. Konvergenz 2.4.7 und Cauchyfolge 2.4.9
6. Vollständigkeit eines metrischen Raumes 2.4.12
7. Vollständigkeitsaxiom: $\mathbb{R}$ ist ein vollständiger metrischer Raum 2.4
8. Vertauschungsätze für Grenzwerte und arithmetische Operationen 2.5.5
9. Äquivalenz von Vollständigkeit, Intervallschachtelungsprinzip und Dedekindschem Schnittaxiom 2.5.8
10. Satz von Bolzano-Weierstraß 2.5.12
11. Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ 2.5.16
12. Irrationalität der Wurzel aus 2 2.6.1
13. Supremum und Infimum 2.7.4
14. Komplexe Zahlen 2.8.2, 2.8.3, 2.8.4

Kapitel 3

Reihen

In diesem Kapitel werden wir Reihen untersuchen. Die Konvergenz von Reihen mit Hilfe der Konvergenz der Teilsummenfolge definiert.

Inhalt

3.1 Konvergenz von Reihen

Eine *Reihe* ist der Versuch eine unendliche Summation zu verstehen. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge und

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Wir wollen nun der *formalen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

unter bestimmten Umständen einen Wert zuordnen durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S(n).$$

Formal gehen wir folgendermaßen vor.

Definition 3.1.1 (Reihe)
Ein Paar von Folgen $(\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}},\ \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *heißt* Reihe, *falls*

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Wir schreiben dafür kurz

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Falls der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

existiert, sagen wir, die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

konvergiert, *im anderen Fall bezeichnen wir die Reihe als divergent. Der Wert* S_n *wird als* Partialsumme *bezeichnet,* $\lim_{n\to\infty} S(n)$ *als* Wert der Reihe, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nennen wir die* Partialsummenfolge.

Aus unseren bisherigen Erkenntnissen können wir sofort einige Aussagen über die Konvergenz von Reihen machen.

Satz 3.1.2 (Geometrische Reihe)
Für $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < 1$ *ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

konvergent. Der Wert dieser Reihe ist $\frac{1}{1-x}$.

Beweis. Durch Induktion beweist man $S_n(1-x) = 1-x^{n+1}$. Die Formel ist korrekt für $n = 1$. Angenommen, diese Formel ist gezeigt für $1, \ldots, n$. Dann ist

$$S_{n+1}(1-x) = S_n(1-x) + x^{n+1}(1-x) = 1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}.$$

Aus dieser Formel folgt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \frac{1}{1-x},$$

da $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ ist für $|x| < 1$. ∎

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet. Dies bedeutet, wie wir ja wissen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n > N$ gilt $|S_m - S_n| < \varepsilon$. Es gilt für $m > n > N$

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|.$$

Mit der Wahl $m = n + 1$ erhält man die wichtige Aussage des nächsten Satzes.

Satz 3.1.3 (Notwendige Bedingung für Konvergenz einer Reihe)
Notwendig für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist, dass die zugrundeliegende Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge bildet.

Diese Bedingung ist allerdings nicht hinreichend, wie das wichtige Beispiel der harmonischen Reihe zeigt. Bevor wir dieses behandeln noch eine weitere kleine Beobachtung.

Lemma 3.1.4 (Reihen mit positiven Gliedern)
Ist $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $a_k \geq 0$ für alle k, dann ist die Folge der $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. Folgt aus Lemma 2.5.2 ∎

Satz 3.1.5 (Divergenz der harmonischen Reihe)
Sei

$$a_k = \frac{1}{k}.$$

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ist divergent.

Beweis. Wir zeigen, dass die Teilfolge $\{S(2^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Dafür beweisen wir

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}.$$

Dies ist richtig für $n = 1$, denn $\frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$. Angenommen für $1, \ldots, n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}.$$

Dann ist
$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}.$$
Nun stehen in der letzten Summation 2^n Terme, von denen jeder mindestens $\frac{1}{2^{n+1}}$ ist, die Summe ist also abzuschätzen durch
$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$
Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 3.1.6 (Harmonische Reihe)
Die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$
wird als harmonische Reihe bezeichnet.

Allerdings reicht die Voraussetzung, dass die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist für eine spezielle Klasse von Reihen aus, um die Konvergenz zu erzwingen. Dazu betrachten wir reelle Reihen, d. h. Reihen deren Summanden a_j in $\mathbb{R}$ sind.

Definition 3.1.7 (Alternierende Reihe)
Sei $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_j \cdot a_{j+1} < 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Reihe
$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$
alternierend.

Lemma 3.1.8 (Alternierende Reihe)
Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann alternierend, wenn es eine Folge $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen gibt, so dass
$$a_k = \operatorname{sgn}(a_1)(-1)^{k+1} b_k$$
ist. Hierbei steht $\operatorname{sgn}(\cdot)$ *für die* Signumfunktion *definiert für reelle Zahlen durch*
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$

Beweis. Setze $b_k = |a_k|$. Der Rest ist klar! □

Das folgende Kriterium ist nach dem Mitbegründer der Analysis benannt.

Satz 3.1.9 (Leibniz[1]-Kriterium)
Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *eine Folge mit* $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ *für alle* k *und sei* $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *die nach Lemma 3.1.8 zugeordnete Folge positiver Zahlen. Ist* $\mathbf{b}$ *monoton und* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, *so ist die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergent.

Beweis. Sei oBdA $a_1 < 0$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_{2k+1}+a_{2k} \geq 0$ und $a_{2k-1}+a_{2k} \leq 0$ (wegen der Monotonie der b_k). Aus $a_1 < 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
a_1 &\leq \underbrace{a_1}_{\leq 0} + \underbrace{\underbrace{a_2 + a_3}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{a_{2k} + a_{2k+1}}_{\geq 0}}_{k\text{-Summanden}} \\
&= \sum_{j=1}^{2k+1} a_j = S(2k+1) \\
&\leq S(2k+1) + \underbrace{a_{2k+2}}_{\geq 0} = S(2k+2) \\
&= \underbrace{\underbrace{a_1 + a_2}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{a_{2k+1} + a_{2k+2}}_{\leq 0}}_{(k+1)\text{-Summanden}} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Folge $S(2k+1)$ monoton steigend und die Folge $S(2k)$ monoton fallend ist. Die Folge der $S(k)$ ist aufgrund der angegebenen Abschätzung beschränkt und die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{k\to\infty} S(2k) \\
B &= \lim_{k\to\infty} S(2k+1)
\end{aligned}$$

existieren. Dann ist

$$B - A = \lim_{k\to\infty} S(2k+1) - \lim_{k\to\infty} S(2k) = \lim_{k\to\infty} (S(2k+1) - S(2k)) = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = 0.$$

Damit existiert der Grenzwert und die Reihe ist konvergent. ∎

[1]Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646–14.11.1716) arbeitete als Diplomat, Philosoph, Jurist und Wissenschaftler. Mit seinen Arbeiten zur Analysis, die in Konkurrenz zu Isaac Newton entstanden sind, war er einer ihrer Mitbegründer. Er war ein Universalgelehrter, der auch in der Philosophie und Theologie deutliche Spuren hinterließ. Er plante die Gründung vieler wissenschaftlicher Akademien, war dabei aber nur in Berlin erfolgreich. Der Verbund einer Reihe von Forschungsinstituten aus verschiedensten Disziplinen nach ihm benannt. Dies unterstreicht seine enorme Bedeutung für die Entwicklung der modernen Wissenschaft.

3.2 Absolute Konvergenz

Wir kommen zur Beschreibung einer weiteren Konvergenzeigenschaft, die sich als ein Spezialfall einer großen und wichtigen Klasse erweisen wird.

Definition 3.2.1 (Absolute Konvergenz von Reihen)
Es sei $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ heißt } \text{absolut konvergent}, \textit{ falls die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \textit{ konvergent ist.}$$

Die Bedeutung der absoluten Konvergenz kommt durch zwei Resultate zum Ausdruck, die sich auf die Umordnung von Reihen beziehen. Wir definieren diesen Begriff zunächst.

Definition 3.2.2 (Umordnung)
Gegeben sei eine Folge $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen und eine bijektive Abbildung $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{\beta(j)} \textit{ eine } \text{Umordnung} \textit{ der Reihe } \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Wir werden nun sehen, dass der Wert einer Reihe sich durch eine Umordnung verändern lässt.

Beispiel 3.2.3 (Alternierende harmonische Reihe)

1. *Die alternierende harmonische Reihe*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + \ldots$$

   ist konvergent. Dies folgt sofort aus dem Leibniz-Kriterium Satz 3.1.9.

2. *Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, denn ansonsten würde die harmonische Reihe konvergieren.*

3. *Es gibt eine Umordnung dieser Reihe, so dass der Wert der umgeordneten Reihe ∞ ist. Um dies zu sehen, betrachten wir die positiven Folgenglieder zwischen $2^n + 1$ und $2^{n+1} - 1$. Dies sind 2^{n-1} ungerade Indizes. Diese Folgenglieder sind größer als $2^{-(n+1)}$, der Gesamtbeitrag ist mindestens $2^{n-1} \cdot 2^{-(n+1)} = \frac{1}{4}$. Wir erhalten die umgeordneten Reihe*

Beispiel 3.2.3 (Alternierende harmonische Reihe(Fortsetzung))

3. (Fortsetzung)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}\right)+\dots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2n+2}\right)\dots.$$

Ab $N = 3$, d. h. für $n \geq 3$ ist der in der Ausdruck in der Klammer mindestens $\frac{1}{8}$ und damit übersteigt der Wert der Reihe jede Schranke.

Satz 3.2.4 (Konvergenz absolut konvergenter Reihen)
Eine absolut konvergente Reihe reeller oder komplexer Zahlen ist konvergent.

Beweis. Sei $\{a_n\}n \in \mathbb{N}$ eine Folge, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist. Wir wollen das Cauchysche Konvergenzkriterium anwenden um zu schließen, dass die Reihe konvergent ist. Sei S_n die entsprechende Partialsumme. Dann ist

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{j=n+1}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |a_j|.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert aufgrund der absoluten Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m > N$ der rechte Ausdruck durch ε abgeschätzt werden kann. Das ist aber gerade die Konvergenzbedingung. □

Satz 3.2.5 (Invarianz gegen Umordnung)
Der Wert einer absolut konvergenten Reihe ist invariant gegen Umordnungen.

Beweis. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, ferner sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Zu zeigen ist, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\beta(n)}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dann gibt es wegen der absoluten Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $m > N$ gilt

$$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Insbesondere ist dann für $m > N$

$$\left| A - \sum_{n=1}^{m} a_n \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Fixiere $m > N$ und wähle $M > m$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$ gilt $k = \beta(j)$ für ein $j < M$. Dann ist

$$\left| A - \sum_{j=1}^{M} a_{\beta(j)} \right| \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} |a_{\beta(j)}| \leq \sum_{j=m}^{\infty} |a_j| < \varepsilon.$$

□

Satz 3.2.6 (Umordnungssatz)
Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass die zugehörige Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\beta_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\beta_A(n)} = A$$

ist.

Beweis. Wir schreiben $\mathbb{N} = P \cup N$, wobei

$$P = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \geq 0 \right\} \text{ und } N = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n < 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Dann ist $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, $N = \{n_1, n_2, \dots\}$. Sei nun $A > 0$ ($A < 0$ wird ganz entsprechend behandelt und auch $A = 0$ bedarf nur einer kleinen Modifikation). Wir addieren die den ersten Indizes in P entsprechenden Elemente a_k. Dabei sei $j_1 \in \mathbb{N}$ minimal mit

$$A_1 = \sum_{i=1}^{j_1} a_{p_i} > A.$$

Ein solches j_1 existiert, denn die Reihe $\sum_{j\in P} a_j$ ist divergent (Warum?). Dann addieren wir bis $\ell_1 \in \mathbb{N}$, ℓ_1 minimal mit

$$A_2 = A_1 + \sum_{k=1}^{\ell_1} a_{n_k} < A.$$

Entsprechend nehmen wir an, es seien Zahlen $A_{2n-1} > A > A_{2n}$, $j_n \in \mathbb{N}$ und ℓ_n bereits definiert. Setze $j_{n+1} \in \mathbb{N}$ als minimalen Wert

$$A_{2n+1} = A_{2n} + \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} a_{p_k} > A,$$

und ℓ_{n+1} wiederum als kleinsten Wert, so dass

$$A_{2n+2} = A_{2n+1} + \sum_{k=\ell_n+1}^{\ell_{n+1}} n_k < A.$$

Alle diese Indizes existieren und damit ist eine Folge $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definiert. Diese Folge konvergiert gegen A, denn

$$|A - A_{2k}| \leq |a_{n_{2k}}| \text{ bzw. } |A - A_{2k+1}| \leq a_{p_{2k+1}}.$$

Da die Folge der $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge bildet, folgt $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. Wir definieren $\tau(0) = 0$ und setzen für $n \in \mathbb{N}$ $\tau(n) = j_n + \ell_n$. Ist für $n \in \mathbb{N}$ $\tau(n-1) < k \leq \tau(n-1) + j_n$, so setzen wir $\beta(k) = p_s$ mit $s = \sum_{m=1}^{n-1} j_m + (k - \tau(n-1))$. Ist $\tau(n-1) + j_n < k \leq \tau(n)$, so setzen wir $\beta(k) = n_r$ mit $r = \sum_{m=1}^{n-1} \ell_m + (k - \tau(n-1) - j_n)$. □

Korollar 3.2.7 (allgemeiner Umordnungssatz)
Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen Null konvergiert und für die die zugehörige Reihe nicht absolut konvergent ist. Betrachtet man die Mengen P, N wie in Gleichung (3.1) und sind die Reihen

$$\sum_{p\in P} a_p \text{ und } \sum_{n\in N} a_n$$

beide nicht konvergent, so gilt die Aussage des Satzes 3.2.6.

3.3 Konvergenzkriterien

In diesem Abschnitt wollen wir Reihen auf Konvergenz untersuchen. Wir wissen bereits, dass die geometrische Reihe konvergent ist, d. h. für $0 < \gamma < 1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n$$

absolut konvergent. Wir beweisen zunächst einen *Vergleichssatz*, der auch als *Majorantenkriterium* bekannt ist.

Satz 3.3.1 (Majorantenkriterium, Vergleichssatz)
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und gilt für eine komplexe Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$|z_n| \leq a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergent.

Beweis. Sei $A(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $Z(n) = \sum_{k=1}^{n} z_k$. Von der letztgenannten Folge $\{Z(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ müssen wir zeigen, dass sie eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist, während wir als bekannt voraussetzen dürfen, dass die Folge der $A(n)$ eine reelle Cauchyfolge ist.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n > m > N$ impliziert

$$|A(n) - A(m)| < \varepsilon.$$

Dann ist für $n > m > N$

$$|Z(n) - Z(m)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_n k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_n = |A(n) - A(m)| < \varepsilon.$$

□

Korollar 3.3.2 (Quotientenkriterium)
Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $a_n = 0$ ist. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl $0 < \theta < 1$, so dass $n > N$ impliziert

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \theta.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis. Sei $c = |a_{N+1}|$. Dann ist (wie man leicht durch vollständige Induktion überprüft) $|a_{N+m}| \leq c\theta^{m-1}$. Da die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} c\theta^m$$

konvergiert, gilt dies nach Satz 3.3.1 auch für die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{m+N}.$$

Dann ist natürlich auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergent. □

Korollar 3.3.3 (Wurzelkriterium)
Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass es ein $0 < \theta < 1$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$, dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent.

Satz 3.3.4 (Verdichtungssatz)
Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige, monotone Folge. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergiert genau dann, wenn die verdichtete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

konvergiert.

Beweis. Sei oBdA $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge monoton fallend. Sei $S(n)$ die Teilsummenfolge der ursprünglichen Folge. Dann ist

$$S(2^n - 1) = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{r=2^j}^{2^{j+1}-1} a_r \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

Die Konvergenz der ursprünglichen Reihe folgt nun aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der verdichteten Reihe.

Wir müssen noch die andere Richtung beweisen. Die verdichtete Reihe konvergiert genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

konvergiert. Dies lässt sich aufgrund der Voraussetzungen abschätzen durch

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots \leq (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots,$$

allgemein gilt $a_2 \leq a_1 + a_2$ und für $k \geq 2$

$$2^{k-1} a_{2^k} \leq \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j$$

und damit folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium. □

Korollar 3.3.5 ($n^{-\alpha}$-Reihe)
Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$.

Beweis. Wir betrachten die verdichtete Folge

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)}.$$

Für $\alpha \leq 1$ ist die Folge $a_k = 2^{k(1-\alpha)}$ keine Nullfolge, für $\alpha > 1$ hat man eine geometrische Reihe. □

3.4 Produkte von Reihen

Wir definieren ein zunächst etwas merkwürdig aussehendes Produkt und zeigen, dass es geeignete Konvergenzeigenschaften besitzt und sich die Grenzwerte so verhalten wir wir es von Produkten erwarten. Seien $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir definieren eine neue Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Sei $\mathbf{c} = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schreiben dafür $\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$.

Satz 3.4.1 (Cauchy-Produkt)
Sind $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *Folgen, so dass*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent sind, so ist mit $\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis. Sei $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Es gilt zu zeigen, dass es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n > N$ impliziert

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k - AB \right| < \varepsilon.$$

Wir beginnen mit dem Fall, dass alle $a_n > 0$ und alle $b_n > 0$ sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{2n} b_k\right) &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} a_k b_j \\ &\geq \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j. \end{aligned}$$

Wir bilden die Differenz

$$\Delta = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} a_k b_j - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j.$$

Wir können abschätzen

$$\Delta \leq \sum_{k=n}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} a_k b_j + \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=n}^{2n} a_k b_j.$$

Da beide Terme gleich aussehen, reicht es einen abzuschätzen. Dazu beachten wir, dass die Teilsummenfolge konvergiert, also beschränkt ist, und zu einer konvergenten Folge und jedem $\varepsilon >$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n > N$ impliziert, dass die entsprechenden Folgenglieder durch ε abgeschätzt werden können. Sei B eine obere Schranke für die Teilsummenfolge der b_n. Also gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} a_k b_j &= \sum_{k=n}^{2n} a_k \sum_{j=0}^{2n} b_j \\ &= \sum_{j=0}^{2n} b_j \sum_{k=n}^{2n} a_k \\ &\leq B\varepsilon. \end{aligned}$$

Insgesamt können wir die Differenz klein machen. Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right).$$

Damit ist im allgemeinen Fall (ohne Vorzeichenbedingung) auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}|a_j|\,|b_{k-j}|\right)$$

konvergent aund damit auch

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}|a_j|\,|b_{k-j}|\right)$$

Das bisherige Argument zeigt im allgemeinen Fall, dass

$$\left|\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}b_j-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_kb_j\right|\le\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}|a_k||b_j|-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|a_k||b_j|$$

ist, und dieser Ausdruck kann mit großem n beliebig klein werden. ∎

3.5 Die Exponentialreihe

Wir definieren für $z\in\mathbb{C}$ die *Exponentialreihe* durch

$$\mathrm{E}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Zunächst beweisen wir, dass die Exponentialreihe für alle $z\in\mathbb{C}$ definiert ist.

Satz 3.5.1 (Absolute Konvergenz der Exponentialreihe)
Die Exponentialreihe ist für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergent.

Beweis. Sei $z\in\mathbb{C}$, dann existiert ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|z|<N$. Dann ist

$$\frac{\frac{|z|^n}{n!}}{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}=\frac{n+1}{|z|}>\frac{n+1}{N}>\frac{N+1}{N}$$

für $n>N+1$. Damit ist das Quotientenkriterium anwendbar und die Reihe konvergiert. ∎

Definition 3.5.2 (e)
Wir definieren die Eulersche Zahl[2] e *durch*

$$\mathrm{e}=\mathrm{E}(1).$$

Diese Zahl ist eine der zentralen Zahlen der Mathematik, sie taucht in vielen wichtigen Formeln auf, ohne diese Zahl ist die Analysis nicht denkbar! Wir werden ihr oft begegnen und dadurch wird diese Bedeutung offenbar werden.

Will man diese Zahl mittels dieser Definition ausrechnen, so kann man natürlich nur endlich viele Summanden berücksichtigen und man braucht eine Abschätzung für den Fehler, der durch den Abbruch der Reihe entsteht. Eine solche Abschätzung ist auch oft von theoretischem Interesse und wir werden am Ende dieses Kapitels noch eine Anwendung sehen.

Satz 3.5.3 (Fehler beim Abbruch der E-Reihe)
Der Abbruchfehler beim Abbruch der Exponentialreihe nach dem k-ten Glied

$$f_k(z) = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} z^n \right|$$

lässt sich für $|z| \leq 1 + \frac{k}{2}$ abschätzen durch das doppelte des $k+1$-Summanden, d. h.

$$f_k(z) \leq 2 \frac{1}{(n+1)!} |z|^{n+1}.$$

[2]Leonhard Euler (15.4.1707–18.9.1783) stammt aus der Schweiz und ist Schüler von Johann Bernoulli. Sein Werk ist äußerst umfangreich (ca. 900 Publikationen) und behandelt Fragen aus allen Bereichen der Mathematik und Physik. Er verbrachte lange Zeit in St. Petersburg, wo er zunächst Professor für Physik war. Später folgte er dem Ruf Friedrich des Zweiten nach Berlin, wo er Direktor der math. Klasse der Akademie der Wissenschaften war. Im Jahre 1766 kehrte er nach St. Petersburg zurück. Selbst seine Erblindung stoppte sein wissenschaftliches Schaffen nicht. Neben der Zahl e gibt es noch viele mathematische Objekte, die nach ihm benannt sind, wir werden einige davon kennenlernen. Für die Analysis ist besonders wichtig, dass er an der Formulierung des Funktionsbegriffes arbeitete, dies ist Grundlage der modernen Analysis und ihrer Anwendbarkeit durch die Beschreibung von physikalischen (und anderen) Phänomenen durch sogenannte Differentialgleichungen.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
f_k(z) &= \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right| \\
&= \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{\prod_{j=1}^{n}(k+1+j)}\right| \\
&\le \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{k+2}\right)^n\right| \\
&\le \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{für } \frac{|z|}{k+2} < \frac{1}{2} \\
&= 2\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.5.4 (e Numerischer Wert)
Der numerische Wert von e *ergibt sich nach Abbruch mit* $k = 10$ *zu*

$$\mathrm{e} \in [2.718282 - 2 \cdot 2.755732 \cdot 10^{-7}, 2.718282 + 2 \cdot 2.755732 \cdot 10^{-7}].$$

Satz 3.5.5 (Funktionalgleichung der Exponentialreihe)
Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\mathrm{E}(z_1) \cdot \mathrm{E}(z_2) = \mathrm{E}(z_1 + z_2). \tag{3.2}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(z_1 + z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} z_1^{n-k} \cdot \frac{1}{k!} z_2^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z_2^j.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 3.5.6 (Konsequenz aus der Funktionalgleichung)
Für $z \in \mathbb{C}$ gilt
$$\mathrm{E}(-z) = (\mathrm{E}(z))^{-1}. \tag{3.3}$$

Beweis.
$$1 = \mathrm{E}(0) = \mathrm{E}(z - z) = \mathrm{E}(z)\mathrm{E}(-z).$$
□

Die Gleichung (3.2) wird als Funktionalgleichung des Exponentialfunktion bezeichnet.

Lemma 3.5.7 (Positivität der E-Reihe)
Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{E}(x) > 0$.

Beweis. Zunächst ist für $x \geq 0$ nach Definition
$$\mathrm{E}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots,$$
wobei alle Summanden nicht negativ sind. Also ist $\mathrm{E}(x) \geq 0$. Für $x > 0$ gilt
$$1 = \mathrm{E}(0) = \mathrm{E}(x - x) = \mathrm{E}(x) \cdot \mathrm{E}(-x).$$
Damit ist $\mathrm{E}(-x) > 0$. □

Wir wollen nun die komplexen Winkelfunktionen einführen und reelle Argumente etwas genauer betrachten. Sie werden später noch eingehender untersucht werden.

Definition 3.5.8 (Sinus und Kosinus)
Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir
$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Lemma 3.5.9 (Konvergenz der Sinus/Kosinusreihen)
Die Reihen für $\cos(z)$ und $\sin(z)$ sind für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Beweis. Aus dem Beweis der Konvergenz der Exponentialreihe folgt sofort, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ beide Reihen absolut konvergent sind. □

Wir betrachten nun einen Spezialfall, die Exponentialreihe für rein imaginäre Argumente, also für komplexe Zahlen der Form $\mathtt{i}x$, wobei $x \in \mathbb{R}$ ist.

Lemma 3.5.10 (Kosinus/Sinus und E-Reihe)
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \operatorname{Re} \mathrm{E}(\mathtt{i}x) \\ \sin(x) &= \operatorname{Im} \mathrm{E}(\mathtt{i}x). \end{aligned}$$

Beweis. Für gerades $n = 2j$ gilt $\operatorname{Im}(\mathtt{i}^n) = 0$ und $\operatorname{Re}(\mathtt{i}^n) = \operatorname{Re}(\mathtt{i}^{2j}) = \operatorname{Re}((-1)^j) = (-1)^j$ und für ungerades $n = 2j+1$ gilt $\operatorname{Re}(\mathtt{i}^n) = 0$ und eine entsprechende Rechnung zeigt, dass die Folge alternierendes Vorzeichen hat. Damit ergeben sich die behaupteten Darstellungen. ∎

Satz 3.5.11 (Euler)
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{E}(\mathtt{i}x) = \cos(x) + \mathtt{i}\sin(x).$$

Beweis. Folgt aus dem bereits Gesagten. ∎

Lemma 3.5.12 (E-Reihe mit rein imaginären Argumenten)
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\mathrm{E}(\mathtt{i}x)| = 1$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |\mathrm{E}(\mathtt{i}x)|^2 &= \mathrm{E}(\mathtt{i}x)\overline{\mathrm{E}(\mathtt{i}x)} \\ &= \mathrm{E}(\mathtt{i}x)\mathrm{E}(\overline{\mathtt{i}x}) \\ &= \mathrm{E}(\mathtt{i}x)\mathrm{E}(-\mathtt{i}x) \\ &= \mathrm{E}(\mathtt{i}x - \mathtt{i}x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist $|E(\mathtt{i}x)| = 1$. ∎

Lemma 3.5.13 (Quadrate von Sinus und Kosinus addieren sich zu 1)
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

Beweis. Folgt aus Lemmata 3.5.12, 3.5.10. ∎

Satz 3.5.14 (Additionstheoreme)
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x).\end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden oft als Additionstheoreme *bezeichnet.*

Beweis. Da $\mathrm{E}(\mathtt{i}(x+y)) = \mathrm{E}(\mathtt{i}x + \mathtt{i}y) = \mathrm{E}(\mathtt{i}x)\mathrm{E}(\mathtt{i}y)$ folgt mit Lemma 3.5.11 $\cos(x+y) + \mathtt{i}\sin(x+y) = (\cos(x) + \mathtt{i}\sin(x))(\cos(y) + \mathtt{i}\sin(y))$ und damit die Behauptung. □

3.6 Der Logarithmus

In diesem Abschnitt definieren wir die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, den *Logarithmus*. Es ist eine der wichtigen Funktionen, die überall in Naturwissenschaften und Technik auftauchen.

Lemma 3.6.1 (Monotonie der Exponentialfunktion)
Für $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ ist $\mathrm{E}(x) > \mathrm{E}(y)$.

Beweis. $\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(y + (x-y)) = \mathrm{E}(y) \cdot \mathrm{E}(x-y) > \mathrm{E}(y)$. □

Also ist die Funktion $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto \mathrm{E}(x), D(\mathrm{E}) = \mathbb{R}$ streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$. Wir wollen nun den Bildbereich $B(\mathrm{E})$ ermitteln.

Satz 3.6.2 (Bijektivität der Exponentialfunktion)
$\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist eine Bijektion.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass E streng monoton steigend, also injektiv ist. Weiter wissen wir $\mathrm{e} = \mathrm{E}(1) > \mathrm{E}(0) = 1$, denn für alle $x > 0$ ist aufgrund der obigen Monotonieaussage $\mathrm{E}(x) > 1$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{e}^n = \mathrm{E}(n),$$

denn $\mathrm{e} = \mathrm{E}(1)$. Denn: Sei $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \mathrm{e}^n = \mathrm{E}(n) \right\}$. Angenommen $n \in A$, also $\mathrm{e}^n = \mathrm{E}(n)$, so erhalten wir

$$\mathrm{e}^{n+1} = \mathrm{e}^n \cdot \mathrm{e} = \mathrm{E}(n) \cdot \mathrm{E}(1) = \mathrm{E}(n+1)$$

nach der Funktionalgleichung für die Exponentialreihe. Damit ist $n+1 \in A$ und $A = \mathbb{N}$. Da $\mathrm{e} = 1 + (\mathrm{e} - 1)$ gilt nach der Bernoullischen Ungleichung $\mathrm{e}^n \geq 1 + n(\mathrm{e} - 1)$. Also konvergiert die Folge $\{\mathrm{e}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{\mathrm{erw}}$ gegen ∞. Da es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ damit eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n > N$ impliziert $\mathrm{e}^n > K$, folgt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$. Damit würde man nun vermuten $B(\mathrm{E}) = \mathbb{R}_+$. Um die Surjektivität zu zeigen, greifen wir auf das Dedekindsche Schnittaxiom zurück. Sei $y \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Mengen

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid \mathrm{E}(q) \leq y\}\,,\ B = \{q \in \mathbb{Q} \mid \mathrm{E}(q) > y\}\,.$$

Dann sind beide Mengen nicht leer, da ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\mathrm{E}(-n) = \mathrm{e}^{-n} < y < \mathrm{e}^n = \mathrm{E}(n).$$

Wegen der strengen Monotonie ist $A \cap B = \emptyset$ und natürlich gilt für jedes $q \in \mathbb{Q}$ entweder $\mathrm{E}(q) \leq y$ oder $\mathrm{E}(q) > y$, da $\mathbb{R}$ vollständig geordnet ist. Also, nach dem Dedekindschen Schnittaxiom, gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$.

Bleibt zu zeigen $\mathrm{E}(x) = y$. Mit $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a \leq x \leq b$ und damit

$$\mathrm{E}(a) \leq \mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(b).$$

Nun ist für $a \in A$ und $b \in B$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(b) - \mathrm{E}(a) &= \mathrm{E}(a + (b-a)) - \mathrm{E}(a) \\ &= \mathrm{E}(a)\mathrm{E}(b-a) - \mathrm{E}(a) \qquad \text{wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion} \\ &= \mathrm{E}(a)(\mathrm{E}(b-a) - 1). \end{aligned}$$

Gibt es nun zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Paar a, b mit $0 < \mathrm{E}(b) - \mathrm{E}(a) < \varepsilon$, so ist $|\mathrm{E}(x) - y| < \varepsilon$ und damit $\mathrm{E}(x) = y$. Wir müssen also zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Paar $a \in A$ und $b \in B$ existiert mit $\mathrm{E}(b) - \mathrm{E}(a) < \varepsilon$. Dazu reicht es aber zu zeigen, dass zu jeder $\varepsilon > 0$ ein $s \in \mathbb{Q}, s > 0$ existiert mit $\mathrm{E}(s) - 1 < \varepsilon$. Wähle

$$s < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right).$$

Dann ist mit der Fehlerabschätzung für $k = 1$ der Wert von $\mathrm{E}(s) < 1 + s + f_1(s)$ und damit

$$\mathrm{E}(s) - 1 < s + f_1(s) < \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{s^2}{2!} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Damit $B(\mathrm{E}) = \left\{r \in \mathbb{R} \,\middle|\, r > 0\right\} = \mathbb{R}_+$ und es existiert eine Umkehrfunktion $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y). \tag{3.4}$$

Definition 3.6.3 (Logarithmus)
Diese Funktion wird als Logarithmus *bezeichnet. Gleichung (3.4) nennt man die* Funktionalgleichung des Logarithmus.

Kapitel 4

Funktionen und Stetigkeit

In diesem Kapitel beginnen wir Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ systematisch zu untersuchen. Dazu bauen wir auf den Begriff des metrischen Raumes auf und erhalten offene und abgeschlossene Mengen. Mit diesen definieren wir den Begriff der Stetigkeit von Funktionen und geben dann einen wichtigen Satz, der die Gleichwertigkeit verschiedener Konzepte zeigt. Diese Gleichwertigkeit werden wir im Folgenden oft ausnutzen. Diese wird auch in anderen Teilen der Mathematik oft benötigt, so wird der zentrale Satz dieses Kapitels sicher in Ihrem Studium oft auftauchen.

Inhalt

4.1 Grundlegende Konstruktionen

Wir hatten die Begriffe offenes bzw. abgeschlossenes Intervall (vgl. Definitionen 2.7.1, 2.5.6) definiert. Wir wollen diese Begriffe etwas verallgemeinern.

Definition 4.1.1 (Offene/abgeschlossene Mengen)
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* offen, *wenn zu jedem Punkt $x_0 \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Menge*

$$B_\varepsilon(x_0) = \left\{ x \in X \,\middle|\, d(x, x_0) < \varepsilon \right\}$$

in A enthalten ist, d. h. $B_\varepsilon(x_0) \subset A$. Wir nennen $B_\varepsilon(x_0)$ die ε-Kugel um x_0.

2. *Eine Teilmenge $C \subset X$ heißt* abgeschlossen, *wenn $X \setminus C$ offen ist.*

Bemerkung 4.1.2 (Offene Intervalle sind offen)
Offene Intervalle sind offene Mengen, abgeschlossene Intervalle abgeschlossene Mengen im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$. Es gibt mehr offene Mengen in $(\mathbb{R}, d)$ als die offenen Intervalle, z. B. die Vereinigung zweier disjunkter offener Intervalle. Die Definition der Offenheit von A besagt, dass zu $x_0 \in A$ noch eine ε-Kugel um x_0 in A liegt, wobei natürlich ε von x_0 abhängt und hinreichend klein ist.

Lemma 4.1.3 (Offene Mengen)
Offene Mengen haben die folgenden Eigenschaften:

1. *X ist eine offene Teilmenge.*

2. *$\emptyset$ ist eine offene Teilmenge.*

3. *Jede Vereinigung von Familien offener Mengen ist offen, d. h. ist $\mathfrak{S}$ eine Familie offener Mengen, so ist*

$$\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$$

eine offene Menge.

4. *Endliche Schnitte offener Mengen sind offen, d. h. sind $A_1, \ldots, A_n$ offene Teilmengen eines metrischen Raumes X, so ist*

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

offen.

Beweis. Bei der ersten Aussage gibt es nichts zu zeigen. Die zweite Aussage folgt aus dem üblichen logischen Trick, da es in $\emptyset$ kein x_0 gibt, ist jede Aussage über ein solches x_0 wahr. Wir kommen zur dritten Aussage: Ist $\mathfrak{S}$ eine Menge offener Mengen und x_0 in der Vereinigung all dieser Mengen. Dann ist $x_0 \in S$ für ein S und demnach finden wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subset S$ und diese Menge $B_\varepsilon(x_0)$ ist dann auch in der Vereinigung.

Die letzte Aussage ist ähnlich einfach. Haben wir endlich viele S_i, $i = 1, \ldots, n$ offener Mengen und $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n S_i = S$. Dann gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\varepsilon_i > 0$, so dass

$$B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset S_i.$$

Sei $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_i \;\middle|\; i \in \{1, \ldots, n\}\right\}$. Dann ist für $i = 1, \ldots, n$

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset S_i$$

und damit ist $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset S$ und dies war zu zeigen. □

Lemma 4.1.4 (Abgeschlossene Mengen)
Abgeschlossene Mengen haben die folgenden Eigenschaften:

1. *X ist eine abgeschlossene Teilmenge.*
2. *$\emptyset$ ist eine abgeschlossene Teilmenge.*
3. *Jeder Durchschnitt von Familien abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, d. h. ist $\mathfrak{C}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, so ist*
$$\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C$$
eine abgeschlossene Menge.
4. *Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, d. h. sind $C_1, \ldots, C_n$ abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes X, so ist*
$$\bigcup_{j=1}^n C_j$$
abgeschlossen.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen aus den beiden ersten über offene Mengen (in vertauschter Reihenfolge). Die letzten beiden folgen wieder aus den Regeln über Komplementbildung für Vereinigung und Durchschnitt von Mengen. □

Wir können nun eine etwas unschöne Definition aus dem zweiten Kapitel korrigieren.

Definition 4.1.5 (Intervall)
Ein Intervall I *in* $\mathbb{R}$ *ist eine Teilmenge, so dass* $x, y \in I$ *und* $x < c < y$ *impliziert* $c \in I$.

Damit werden die Begriffe offenes und abgeschlossenes Intervall klar.

Lemma 4.1.6 (Intervalle und Metrik)
Offene bzw. abgeschlossene Intervalle sind Intervalle, die im Sinne der Metrik offen bzw. abgeschlossen sind und umgekehrt.

Beweis. Ist aufgrund der Definition klar. □

Hat man eine Menge $A \subset X$, so gibt es eine abgeschlossene Menge C mit $A \subset C$, z. B. $C = X$. Da beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, ist es sinnvoll folgende Konstruktion zu betrachten.

Definition 4.1.7 (Abschluss)
Ist A *eine Teilmenge eines metrischen Raumes* X. *So ist*

$$\overline{A} = \bigcap_{\{C \mid C \text{ ist abgeschlossen, } C \supset A\}} C$$

der Abschluss *von* A.

Bemerkung 4.1.8 (Abschluss einer abgeschlossenen Menge)
Für eine abgeschlossene Menge C *gilt* $\overline{C} = C$. *Warum?*

Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist $X \setminus \overline{A}$ offen und daher ist die folgende Aussage leicht einsehbar.

Satz 4.1.9 (Häufungspunkt und Abschluss)
Es sei A *eine Teilmenge eines metrischen Raumes* (X, d). *Für eine Folge* $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *gelte* $x_n \in A$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt: Ist* x_0 *ein Häufungspunkt der Folge* $\mathbf{x}$, *so ist* $x_0 \in \overline{A}$.

Beweis. Da $X \setminus \overline{A}$ offen ist, folgt aus der Annahme $x_0 \notin \overline{A}$, dass $x_0 \in X \setminus \overline{A}$ und es daher ein $\delta > 0$ gibt mit $B_\delta(x_0) \subset \big(X \setminus \overline{A}\big)$. Dann gibt es in $B_\delta(x_0)$ keine Folgenglieder unserer Folge, also ist x_0 kein Häufungspunkt und wir erhalten einen Widerspruch. □

Satz 4.1.10 (Häufungspunkte einer Folge)
Es sei (X, d) *ein metrischer Raum und* $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sei eine Folge. Sei* A *die zugrundeliegende Menge, d. h.* $A = \left\{x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Dann gilt*

1. $$\overline{A} = A \cup \left\{\xi \,\middle|\, \xi \text{ ist Häufungspunkt der Folge } \mathbf{x}\right\}.$$

2. *Die Menge der Häufungspunkte von* $\mathbf{x}$ *ist gegeben durch*
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}, \text{ wobei } A_n = \left\{x_{n+j} \,\middle|\, j \in \mathbb{N}\right\} \text{ ist }.$$

Beweis. (1) Zunächst wissen wir bereits, dass
$$A \cup \left\{\xi \,\middle|\, \xi \text{ ist Häufungspunkt der Folge } \mathbf{x}\right\} \subset \overline{A}.$$

Angenommen $\overline{A}$ enthalte weitere Punkte. Dann gibt es einen Punkt $x \in \overline{A}$, der weder in A liegt, noch enthält jede ε-Umgebung unendlich viele Glieder von $\mathbf{x}$. Also gilt $x \notin A$ und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $A \cap B_\varepsilon(x)$ hat endlich viele Punkte. Dann kann man ein $\varepsilon' > 0$ finden mit $B_{\varepsilon'}(x) \cap A = \emptyset$ und $x \in \overline{A}^c$.
(2) Offenkundig ist aufgrund von (1) jeder Häufungspunkt von $\mathbf{x}$ in dem genannten Durchschnitt enthalten. Die Umkehrung folgt sofort aus der Definition des Häufungspunktes. $\square$

Eine weitere wichtige Klasse von Mengen sind sogenannte kompakte Mengen.

Definition 4.1.11 (Kompakte Menge)
Es sei (X, d) *ein metrischer Raum.*

1. *Es sei* $K \subset X$ *eine Teilmenge. Eine Familie von offenen Mengen* $\mathfrak{S}$ *heißt eine offene Überdeckung von* K*, falls*
$$K \subset \bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S$$
ist.

2. *Eine Menge* $K \subset X$ *heißt kompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung* $\mathfrak{S}$ *eine endliche Teilmenge* $S_i \in \mathfrak{S}$, $i = 1, \ldots, n$ *ausgewählt werden kann, so dass* $K \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$. *Man sagt dafür: Aus jeder offenen Überdeckung kann eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden.*

Lemma 4.1.12 (Kompakte Mengen sind abgeschlossen)
Kompakte Mengen sind abgeschlossen.

Beweis. Ist K kompakt, $x_0 \in X \setminus K$. Dann ist für $y \in K$ der Abstand $d(x_0, y) > 0$ und

$$x_0 \notin \bigcup_{y \in K} B_{\frac{1}{2}d(x_0,y)}(y).$$

Die Mengen $\left\{ B_{\frac{1}{2}d(x_0,y)}(y) \;\middle|\; y \in K \right\}$ bilden eine offene Überdeckung von K, da K kompakt ist, können wir endlich viele Mengen der Form $B_{\frac{1}{2}d(y_i,x_0)}(y_i)$ auswählen und diese bilden eine Überdeckung von K. Sei

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \left\{ d(y_i, x_0) \;\middle|\; i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Dann ist $B_\varepsilon(x_0) \cap K$ leer, denn für ein $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap K$ würde gelten $x \in B_{\frac{1}{2}d(x_0,y_i)}(y_i)$ für ein $y_i \in K$ und daher ergibt sich ein Widerspruch

$$d(x_0, y_i) \leq d(x_0, x) + d(x, y_i) < \varepsilon + \frac{1}{2}d(y_i, x_0) \leq \frac{1}{2}d(y_i, x_0) + \frac{1}{2}d(y_i, x_0).$$

Daher ist die Annahme, es gibt ein $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap K$, falsch und es folgt $B_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus K$. Somit ist K abgeschlossen. □

Aufgabe 4.1.13 (Teilmengen kompakter Mengen)
Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.

Satz 4.1.14 (Heine[1]-Borel[2])
In $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Angenommen K ist in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ kompakt, dann ist K nach Lemma 4.1.12 abgeschlossen. Die Mengen $B_n(0) = \left\{ y \;\middle|\; |y| < n \right\}$ bilden eine offene Überdeckung von K. Ist K nicht beschränkt, so kann man keine endliche Teilüberdeckung auswählen. Also folgt aus der Kompaktheit die Beschränktheit.

Wir kommen zur Umkehrung. Angenommen K ist abgeschlossen und beschränkt. Sei $\mathfrak{S}$ eine offene Überdeckung. Wir beweisen zunächst eine Teilbehauptung, dass es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in K$ gilt: Es gibt ein

[1] Heinrich Eduard Heine (18.3.1821–21.10.1888) studierte Mathematik daneben u. a. auch Physik, Philosophie, Archäologie. Er wurde 1848 Professor in Bonn, ab 1856 in Halle. Seine Arbeitsgebiete sind Potentialtheorie, Funktionentheorie und partielle Differentialgleichungen.

[2] Félix Édouard Justin Émile Borel (7.1.1871–3.2.1956) war Mathematiker und Politiker. Zwischen 1924 und 1936 war er im Parlament, im Jahr 1925 sogar Minister. Unter dem Vichy-Regime war er kurz inhaftiert, danach in der Résistance. Seine wichtigsten Arbeiten betreffen Topologie, Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, wie auch die Spieltheorie.

$S \in \mathfrak{S}$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset S$. Eine solche Zahl heißt *Lebesgue-Zahl*[3]. Der Beweis dieser Teilbehauptung wird durch Widerspruch geführt: Angenommen eine solche Zahl existiert nicht.

$$(*) \quad \begin{cases} \text{Dann gibt es zu jedem } n \in \mathbb{N} \text{ ein } x_n \in K \text{ mit } B_{2^{-n}}(x_n) \\ \text{liegt in keinem } S \text{ in } \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.5.12 hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x_0. Dann gibt es, wegen der Überdeckungseigenschaft von $\mathfrak{S}$ ein $S \in \mathfrak{S}$ mit $x_0 \in S$. Sei nun $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset S$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} < \frac{\delta}{2}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ mit $x_n \in B_\delta(x_0) \subset S$. Dann ist aber $B_{2^{-n}}(x_n) \subset B_\delta(x_0) \subset S$. Dies ist ein Widerspruch zu (*). Damit ist die Existenz einer solchen Lebesgueschen Zahl bewiesen.

Wir betrachten nun die Überdeckung von K gegeben durch $\left\{ B_\varepsilon(x) \;\middle|\; x \in K \right\}$. Wenn hieraus eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann, sind wir fertig, denn jede dieser Mengen liegt in einem Element $\mathfrak{S}$, die dadurch erhaltene Auswahl von endlich vielen Elementen in $\mathfrak{S}$ ergäbe eine endliche Überdeckung. Wähle $x_1 \in K$ und dann induktiv eine Folge $x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j)$. Dann ist $d(x_n, x_j) > \varepsilon$ für jedes $j < n$. Daher hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in K, im Widerspruch zum Satz von Bolzano-Weierstraß.

Also reichen endlich viele der $B_\varepsilon(x)$ die Menge K zu überdecken und damit ist der Satz gezeigt. □

4.2 Stetigkeit von Funktionen

Ein wichtiger Begriff der Analysis, der eng mit dem anderen uns bisher bekannten Begriff der Konvergenz zusammenhängt, ist die Stetigkeit.

Definition 4.2.1 (Stetigkeit (lokal))
Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, eine Funktion $f : X \to Y$, $D(f) \subset X$ sei eine offene Teilmenge und $x_0 \in D(f)$. Dann heißt f stetig im Punkt *x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d_X(x, x_0) < \delta$ folgt, $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

[3] Henri Léon Lebesgue (28.6.1875–26.7.1941) erkannte die Unzulänglichkeit des Riemannschen Integralbegriffes und fand die nach ihm benannte Verallgemeinerung. Damit prägte Lebesgue die mathematische Entwicklung grundlegend. Die moderne Theorie partieller Differentialgleichungen wäre ohne dieses Werk nicht denkbar. Beide Integralbegriffe werden wir im Laufe des Analysis-Zyklus kennenlernen.

Bemerkung 4.2.2 (Stetigkeit: alternative Formulierung)
Wir sagen auch, eine Funktion heißt stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass f die δ-Kugel um x_0 in die ε-Kugel um $f(x_0)$ abbildet. Eine anschauliche Vorstellung soll durch das nachfolgende Bild vermittelt werden.

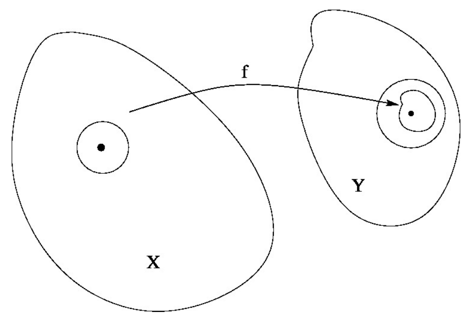

Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Stetigkeit

Beispiel 4.2.3 (Unstetigkeit)

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x \le 0 \\ 1, & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$
ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, wir nennen dies auch *unstetig*. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt kein $\delta > 0$, so dass $0 < x < \delta$ impliziert $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$. In allen anderen Punkten ist diese Funktion stetig.

2. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z$ ist in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig, mit $\delta = \varepsilon$.

3. Durch $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ führen wir eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ein (vgl. $|z|$ für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$). Die Funktion $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \; (x, y) \mapsto x + y$ ist in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. Gleiches gilt für die Funktion $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$. Wir wollen uns die Begründung nur für den ersten Fall ansehen. Seien (x_0, y_0) und $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle
$$\delta = \frac{1}{2}\varepsilon.$$
Dann ist für $d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ (wegen $\frac{1}{2}(a + b) \le \sqrt{a^2 + b^2} \le (a + b)$ für $a, b \ge 0$)
$$|(x_0+y_0)-(x+y)| \le |x-x_0|+|y-y_0| < 2\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < 2\delta = \varepsilon.$$

Definition 4.2.4 (Stetigkeit (global))
Eine Funktion $f : X \to Y$ mit $D(f) = X$ heißt stetig auf X, *falls f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.*

Beispiel 4.2.5 (Kontraktionen sind stetig)
Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $f : X \to X$, $D(f) = X$ eine Abbildung, so dass eine Zahl $0 < \lambda$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ gilt,

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Dann ist f stetig. Wähle $x_0 \in X$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Ist nun $d(x, x_0) < \delta$, so gilt $d(f(x), f(x_0)) \leq \lambda d(x, x_0) < \lambda\delta = \varepsilon$.

Stetigkeit kann auf verschiedene andere Weisen charakterisiert werden. Wir wollen einige davon angeben und beweisen.

Satz 4.2.6 (Hauptsatz über stetige Abbildungen)
Sei $f : X \to Y$, $D(f) = X$ eine Funktion. f ist genau dann stetig, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. *Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen.*
2. *Für jede abgeschlossene Menge $K \subset Y$ ist $f^{-1}(K)$ abgeschlossen.*
3. *Für jede Menge A gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
4. *Ist $x_0 \in X$ und ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Beweis. Wir beweisen dies nach dem Schema
Stetigkeit $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ Stetigkeit.

1. Ist $U \subset Y$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. Sei $y = f(x)$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset U$. Zu diesem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y)$. Also ist $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subset f^{-1}(U)$.

2. Sei $K \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist $A = Y \setminus K$ offen und $f^{-1}(A)$ ist offen. Da $f^{-1}(K) = X \setminus f^{-1}(A)$ ist, folgt $f^{-1}(K)$ ist abgeschlossen.

3. Sei $A \subset X$. Dann ist $\overline{f(A)}$ abgeschlossen, also $f^{-1}(\overline{f(A)})$ abgeschlossen und $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Also ist $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Dann folgt

$$f(\overline{A}) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) = \overline{f(A)}.$$

4. Sei $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann konvergiert jede Teilfolge $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0, also $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0$. Definiere für eine solche Teilfolge $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ die Menge $A_{n_j} = \left\{ x_{n_{j+k}} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$. Dann ist
$$x_0 \in \overline{A_{n_j}} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$
Aus Satz 4.1.10 folgt sogar
$$\{x_0\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{A_{n_j}}.$$
Dann ist (wegen (4.1)) für jedes $j \in \mathbb{N}$
$$f(x_0) \in f(\overline{A_{n_j}}) \subset \overline{f(A_{n_j})}$$
und damit
$$f(x_0) \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} f(\overline{A_{n_j}}) \subset \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{f(A_{n_j})}. \tag{4.2}$$
Also ist $f(x_0)$ Häufungspunkt jeder Teilfolge $\{f(x_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$. Angenommen z' sei ein weiterer Häufungspunkt der Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = z'$. Aufgrund des obigen Argumentes (vergleiche (4.2)) angewendet auf die Folge $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist $f(x_0)$ auch ein Häufungspunkt der Folge $\{f(x_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$, dies impliziert $z' = f(x_0)$.

5. Fixiere $x_0 \in X$. Angenommen f ist im Punkt x_0 nicht stetig, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$ und $d(f(x), f(x_0)) > \varepsilon$. Wähle $\delta_n = \frac{1}{n}$ und $x_n \in X$, so dass $d(x_0, x_n) < \delta_n$ mit $d(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$. Dann ist
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ und } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existiert nicht oder ist nicht } f(x_0).$$
Damit haben wir einen Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Bemerkung 4.2.7 (zur Charakterisierung der Stetigkeit)
Beachte, die dritte Eigenschaft aus dem Hauptsatz über stetige Abbildungen ist oft bei theoretischen Betrachtungen wichtig, die vierte oft in praktischen Anwendungen.

Korollar 4.2.8 (Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen)
Eine Funktion f ist genau dann in einem Punkt x_0 stetig, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Beweis. Eine Richtung aus Teil 5 des letzten Beweises, die andere direkt aus den Definitionen. □

Definition 4.2.9 (Kontinuierlicher Grenzwert)
Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$, $D(f) \subset X$ offen. Für $x_0 \in D(f)$ sagen wir $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in Y$, falls für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D(f)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Korollar 4.2.10 (Rechnen mit stetigen Funktionen)
Für stetige Funktionen gilt:

1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ oder $f, g : X \to \mathbb{C}$ sei stetig, dann sind $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ stetig und f/g ist allen Punkten $x \in X$ stetig, für die gilt $g(x) \neq 0$.*
2. *Sind X, Y, Z metrische Räume und sind $g : X \to Y$ und $f : Y \to Z$ stetig, so ist $f \circ g : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Charakterisierung stetiger Funktionen Satz 4.2.6 (4) und Satz 2.5.4.

Die zweite Behauptung sieht man wie folgt: Sei $x_0 \in X$, $y_0 = g(x_0)$ und $z_0 = f(y_0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(B_\delta(y_0)) \subset B_\varepsilon(z_0))$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von g ein $\delta' > 0$ mit $g(B_{\delta'}(z_0)) \subset B_\delta(y_0)$. Dann ist aber

$$f \circ g(B_{\delta'}(x_0) \subset f(B_\delta(y_0)) \subset B_\varepsilon(z_0).$$

□

Im folgenden wollen wir einige wichtige Beispiele behandeln.

Definition 4.2.11 (Polynom)
Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) heißt komplexe (reelle) Polynomfunktion *(kurz* Polynom*), wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Zahlen $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{C}$ ($\in \mathbb{R}$) gibt mit*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \; z \in \mathbb{C} \; (z \in \mathbb{R}).$$

Die größte Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ heißt der Grad *des Polynoms.*

Satz 4.2.12 (Klassen stetiger Funktionen)

1. *Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ein Polynom, so ist f stetig.*
2. *Die Exponentialreihe* E *definiert eine auf $\mathbb{R}$ bzw. auf $\mathbb{C}$ stetige Funktion.*
3. *Die Funktionen* sin, cos *sind auf* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis.

1. Aus der Stetigkeit von $z \mapsto z$ folgt mit Korollar 4.2.10, dass $z \mapsto z^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ stetig ist, weiterhin ist $z \mapsto a_k z^k$ stetig und schließlich mit der gleichen Begründung $z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_k z^k$.

2. Wir untersuchen die Stetigkeit im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und schreiben $z = z - z_0 + z_0$. Dann ist
$$|\mathrm{E}(z) - \mathrm{E}(z_0)| = |\mathrm{E}(z - z_0)\mathrm{E}(z_0) - \mathrm{E}(z_0)| = |\mathrm{E}(z_0)||\mathrm{E}(z - z_0) - 1|.$$
Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, setze $\varepsilon' = \varepsilon/|\mathrm{E}(z_0)|$. Gibt es nun ein $\delta > 0$, so dass $|z - z_0| < \delta$ impliziert, dass $|\mathrm{E}(z - z_0) - 1| < \varepsilon'$ dann ist $|\mathrm{E}(z) - \mathrm{E}(z_0)| < \varepsilon$. Damit folgt aus der Stetigkeit bei $z = 0$ die Stetigkeit bei z_0.

   Zu zeigen ist also, zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|z| < \delta$ impliziert $|\mathrm{E}(z) - 1| < \varepsilon$. Aus der Fehlerabschätzung für die Exponentialreihe Satz 3.5.3 folgt, für $|z| < \delta = \varepsilon/2$ ist
$$|\mathrm{E}(z) - 1| = |(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k) - 1| \le f_1(z) \le 2|z| < 2\delta = \varepsilon.$$

3. Wir betrachten die cos-Funktion, der Beweis im Fall der sin-Funktion ist entsprechend. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die grundlegende Beobachtung ist ganz einfach: Wir approximieren die cos-Funktion durch ein Polynom n-ten Grades (das durch Abschneiden der definierenden Reihe entsteht) $p_n(z)$. Dies Polynom ist stetig und wir schreiben
$$\begin{aligned} |\cos(z) - \cos(z_0)| &= |\cos(z) - p_n(z) + p_n(z) - p_n(z_0) + p_n(z_0) - \cos(z_0)| \\ &\le |\cos(z) - p_n(z)| + |p_n(z) - p_n(z_0)| + |p_n(z_0) - \cos(z_0)|. \end{aligned}$$
Der mittlere Term wird aufgrund der bereits bewiesenen Stetigkeit von Polynomen durch $\varepsilon/3$ abgeschätzt, falls nur $|z - z_0|$ hinreichend klein ist, anders gesagt, es gibt ein $\delta_1 > 0$, so dass $|z - z_0| < \delta_1$ impliziert $|p_n(z) - p_n(z_0)| < \varepsilon/3$. Nun müssen wir nur noch zeigen, dass auf einer Umgebung von z_0 die Differenz $|\cos(z) - p_n(z)| < \varepsilon/3$ abgeschätzt werden kann. Passt man den Beweis von Satz 3.5.3 an die cos-Reihe an, so erhält man eine entsprechende Abschätzung für den Fehler $f_n(z)$ für $|z| < 1 + n$ als
$$f_n(z) \le \frac{4}{3} \frac{|z|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Damit kann erreicht werden, dass in einer Umgebung von z_0 der Abbruchfehler kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

$\square$

4.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir wollen nun wesentliche Eigenschaften stetiger Funktionen notieren. Diese sind von fundamentaler Wichtigkeit nicht nur für die Analysis, sondern für alle Bereiche in denen Mathematik eine Rolle spielt. Wir werden zunächst einen einfachen Satz kennenlernen, der sich als Grundprinzip aller analytischen Methoden zur Lösung von Gleichungen erweist.

Satz 4.3.1 (Zwischenwertsatz)
Es sei I ein Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ stetig (insbesondere überall definiert). Gibt es $x_1 < x_2 \in I$ mit $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, so existiert ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis. Sei oBdA $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Betrachte $X = [x_1, x_2]$ mit der üblichen Metrik. X ist vollständiger metrischer Raum. Setze $g : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ (Einschränkung von f auf X). g ist stetig auf X. Setze $M = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) < 0\right\}$. M ist offen in (X, d), nach dem Hauptsatz über stetige Funktionen (Satz 4.2.6) (1) und $M \neq I$, denn $x_2 \notin M$. Sei nun

$$\xi = \sup M.$$

Dann ist $\xi > x_1$, da M offen ist und $x_1 \in M$. $\xi < x_2$, denn $f(x_2) > 0$.

Dann ist $f(\xi) \leq 0$, denn $f(\xi) > 0$ impliziert die Existenz von $\delta > 0$, so dass $f > 0$ auf $B_\delta(\xi)$ ist. Dies widerspricht der Supremumseigenschaft von ξ.

Wäre $f(\xi) < 0$, so könnten wir wie oben eine δ-Kugel um ξ in M finden, mit $f < 0$ auf $B_\delta(\xi)$, was wiederum der Konstruktion von ξ widerspricht. $\square$

Korollar 4.3.2 (Zwischenwertsatz, allgemeine Form)
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_1 < x_2 \in I$ und für ein $c \in \mathbb{R}$ gelte $f(x_1) < c < f(x_2)$], so gibt es ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = c$.

Beweis. Betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - c$. Dann sind die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes erfüllt, und es gibt ein ξmit $F(\xi) = 0$, d. h. $f(\xi) = c$. $\square$

Bemerkung 4.3.3 (Umgekehrte Ungleichung)
Eine entsprechende Aussage ist richtig, wenn $f(x_1) > c > f(x_2)$. Der Beweis ist natürlich eine einfache Modifikation des angegebenen Beweises.

Satz 4.3.4 (Stetige Bilder von Intervallen)
Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall I, so ist $f(I)$ ein Intervall.

Beweis. Sind $y_1 < y_2 \in f(I)$, so ist nach dem Korollar 4.3.2 jeder Wert $y_1 < c < y_2$ in $f(I)$. Damit ist $f(I)$ ein Intervall. □

Satz 4.3.5 (Stetige Bilder kompakter Mengen)
Sind X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig und ist $K \subset X$ kompakt, so ist $f(K)$ kompakt

Beweis. Ist $\mathfrak{S}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, so ist für $S \in \mathfrak{S}$ die Menge $f^{-1}(S)$ wegen Satz 4.2.6 (1) offen. Also ist

$$\left\{ f^{-1}(S) \;\middle|\; S \in \mathfrak{S} \right\}$$

eine offene Überdeckung von K, und wir können daraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d. h. es gibt $S_1, \ldots, S_n$ mit

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(S_k).$$

Dann ist

$$f(K) \subset \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(S_k)) = \bigcup_{k=1}^{n} S_k.$$

□

Korollar 4.3.6 (Annahme von Minimum/Maximum)
Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall I nimmt Maximum und Minimum an, d. h. es existieren $x_1, x_2 \in I$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

für alle $x \in I$.

Beweis. $f(I)$ ist ein kompaktes Intervall, insbesondere ein abgeschlossenes Intervall, d. h. von der Form $\{x \mid a \leq x \leq b\}$. Also gibt es ein $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = a$ und ein $x_2 \in I$ mit $f(x_2) = b$. □

Ein wichtiger Begriff, der mit dem Begriff der Stetigkeit eng verwandt ist, wird nun eingeführt.

Definition 4.3.7 (Gleichmäßig stetig)
Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. f heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_X(x_1, x_2) < \delta$ impliziert $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Aufgabe 4.3.8 (Gleichmäßige Stetigkeit versus Stetigkeit)

1. *Die Funktion* $f : (0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}, D(f) = (0,1]$ *ist auf* $(0,1]$ *stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.*

2. *Die Funktion* $f(x) = x^2$ *ist auf* $\mathbb{R}$ *stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.*

Satz 4.3.9 (Stetige Funktionen auf Kompakta)
Es seien X, Y *metrische Räume,* $K \subset X$ *kompakt und* $f : X \to Y$ *eine Abbildung. Ist* $K \subset D(f)$, f *auf* K *stetig, so ist* f *auf* K *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen der Stetigkeit zu jedem $x_0 \in K$ ein $\delta > 0$ und der Deutlichkeit halber, schreiben wir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, so dass $x \in B_\delta(x_0)$ impliziert $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Die Menge

$$\mathfrak{S} = \left\{ B_{\frac{1}{3}\delta(x_0,\frac{\varepsilon}{3})}(x_0) \;\middle|\; x_0 \in K \right\}$$

bildet eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K reichen endlich viele

$$B_{\frac{1}{3}\delta(x_i,\frac{\varepsilon}{3})}(x_i), i = 1, \ldots, n$$

K zu überdecken. Wähle

$$\delta = \frac{1}{3} \min\{\delta(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Sind nun $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$. Dann gibt es ein x_j mit $x \in B_{\frac{1}{3}\delta(x_j,\frac{\varepsilon}{3})}(x_j)$ und ein x_k mit $y \in B_{\frac{1}{3}\delta(x_k,\frac{\varepsilon}{3})}(x_k)$ und

$$\begin{aligned} d(x_k, x_j) &\le d(x_k, y) + d(y, x) + d(x, x_j) \\ &\le \frac{1}{3}\left(\delta(x_k, \frac{\varepsilon}{3}) + \min\{\delta(x_i, \frac{\varepsilon}{3})\} + \delta(x_j, \frac{\varepsilon}{3})\right) \\ &\le \max\{\delta(x_j, \frac{\varepsilon}{3}), \delta(x_k, \frac{\varepsilon}{3})\}. \end{aligned}$$

Nun können wir abschätzen

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(x_k)) + d(f(x_k), f(y)) \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

□

Satz 4.3.10 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)
Sind $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *metrische Räume* $K \subset X$ *kompakt und ist* $f : K \to Y$ *stetig und injektiv, so ist die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(K) \to X$ *stetig.*

Beweis. Setze $g = f^{-1} : f(K) \to K$. Wir wollen zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen $C \subset K$ in $f(K)$ abgeschlossen sind. Da $C \subset K$ (4.1.13) kompakt ist, ist $g^{-1}(C) = f(C)$ kompakt (nach Satz 4.3.5) und daher abgeschlossen. Nach Satz 4.2.6 (2) ist f^{-1} stetig. $\square$

Als Anwendung des Zwischenwertsatzes vermerken wir noch die folgende Aussage.

Lemma 4.3.11 (Eine positive Nullstelle des Kosinus)
Es gibt ein $x_0 \in (0, 2)$ mit $\cos(x_0) = 0$.

Beweis. Es gilt $\cos(0) = 1$. Für $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ ist die Kosinus-Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent und wir erhalten die Aussagen aus dem Beweis von Satz 3.1.9 über die Monotonie von $S(2k)$ und $S(2k+1)$, allerdings wegen $a_1 > 0$ gegenüber dem Beweis des Satzes vertauscht. Damit ist $S(2k+1)$ monoton fallend. An der Stelle $x = 2$ gilt daher $\cos(2) \leq 1 + (-1)\frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3}$. Also gibt es aufgrund des Zwischenwertsatzes Satz 4.3.1 ein solches x_0. $\square$

Definition 4.3.12 (Die Zahl π)
Ist x_0 die kleinste positive Nullstelle von $\cos$, d. h. ist

$$x_0 = \inf \left\{ x > 0 \;\middle|\; \cos(x) = 0 \right\},$$

so wird die Zahl $2x_0$ als π bezeichnet.

Bemerkung 4.3.13 (Positivität des Infimums)
Es gilt

$$\inf \left\{ x > 0 \;\middle|\; \cos(x) = 0 \right\} > 0.$$

Definition 4.3.14 (Periode)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird für eine positive Zahl p als p-periodisch bezeichnet, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x + p) = f(x).$$

Ist p die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft, so wird p als minimale Periode bezeichnet.

Satz 4.3.15
Die Funktionen $\sin, \cos$ sind 2π-periodisch. 2π ist die minimale Periode dieser Funktionen.

Beweis. Siehe Übungen. $\square$

4.4 Funktionenfolgen und Konvergenz

Definition 4.4.1 (Konvergenz von Funktionenfolgen)
Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f_n : X \to Y$ seien Funktionen mit $D(f_n) = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen die Folge

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert *gegen eine Funktion $f : X \to Y$, falls für jedes $x \in X$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Wegen dieser punktweisen *Forderung sprechen wir auch von* punktweiser Konvergenz.

Beispiel 4.4.2 (Beispiel einer konvergenten Funktionenfolge)
Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$, $D(f) = [0, 1]$ konvergiert gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$$

Definition 4.4.3 (Gleichmäßige Konvergenz)
Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f_n : X \to Y$ seien Funktionen mit $D(f_n) = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen die Folge

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert gleichmäßig *gegen eine Funktion $f : X \to Y$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in X$ und alle $n > N$ gilt*

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Satz 4.4.4 (Grenzwerte gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen)
Konvergiert eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist f stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n > N$ und alle $x \in X$ gilt

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wähle $n > N$ und $\delta > 0$ so dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann ist für $x \in B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x_0)) &\leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f stetig im Punkt x_0, da x_0 beliebig war, ist f stetig. □

Definition 4.4.5 (Funktionenräume)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren die Räume stetiger Funktionen durch

$$C(X; \mathbb{R}) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist stetig} \right\}$$

bzw.

$$C(X; \mathbb{C}) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ ist stetig.} \right\}$$

Aufgabe 4.4.6

1. *Ist X kompakt, so wird durch*

$$d_{C(X)}(f, g) = \sup \left\{ |f(x) - g(x)| \;\middle|\; x \in X \right\}$$

   eine Metrik auf $C(X; \mathbb{R})$ bzw. $C(X, \mathbb{C})$ definiert.

2. *$C(X; \mathbb{R})$ bzw. $C(X, \mathbb{C})$ sind mit der Metrik $d_{C(X)}$ jeweils ein vollständiger metrischer Raum.*

Aufgabe 4.4.7
Etwas allgemeiner kann man für metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y) den Raum

$$C(X, Y) = \left\{ f : X \to Y \;\middle|\; f \text{ ist stetig} \right\}$$

definieren. Ist X kompakt wird darauf eine Metrik durch

$$d_{C(X,Y)} = \sup \left\{ d_Y(f(x), g(x)) \;\middle|\; x \in X \right\}$$

erklärt.
Man zeige, $d_{C(X,Y)}$ macht $C(X, Y)$ zum metrischen Raum, $C(X, Y)$ ist genau dann vollständig, wenn Y vollständig ist.

Kapitel 5

Differenzierbare Funktionen

In diesem Kapitel widmen wir uns dem Begriff der Differenzierbarkeit und entwickeln die Eigenschaften differenzierbarer Funktionen. Darüber hinaus wollen wir unsere Kenntnisse spezieller Funktionen erweitern.

Inhalt

5.1 Differenzierbarkeit

Wir wollen Differenzierbarkeit definieren und dabei haben wir sowohl reelle wie komplexe Funktionen im Auge.

Definition 5.1.1 (Differenzenquotient)
Es sei D eine offene Menge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ (oder $f : D \to \mathbb{C}$) stetig und $x_0 \in D$. Für $0 \neq h \in \mathbb{R}$ oder $h \in \mathbb{C}$ mit $x_0 + h \in D$ sei

$$\Delta_{x_0}^h(f) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der Differenzenquotient *von f im Punkt x_0 zur Differenz h.*

Beispiel 5.1.2 (Differenzenquotient in $\mathbb{R}$)
Im reellen Fall kann man sich den Begriff durch die folgende Abbildung veranschaulichen.
Dieses Bild zeigt, dass wir den Differenzenquotienten nutzen können um die Steigung der Funktion im Punkt x_0 zu beschreiben, wobei Steigung die Steigung der Geraden ist, die f am besten approximiert.

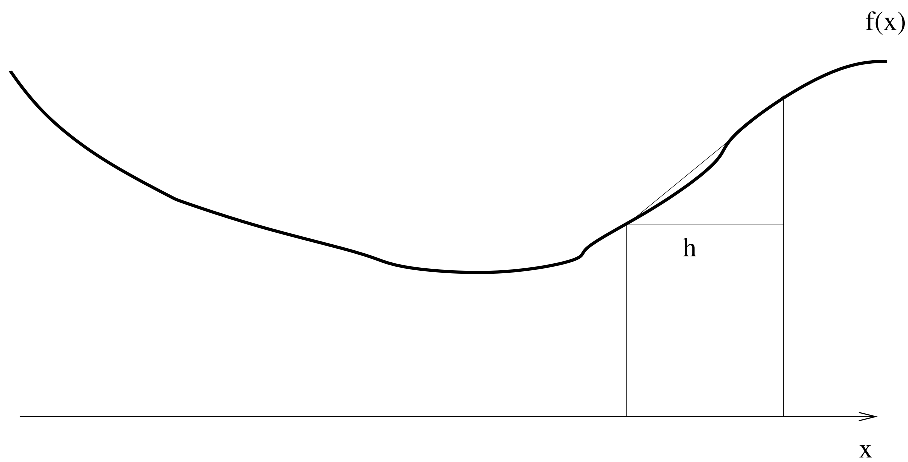

Abbildung 5.1: Veranschaulichung des Differenzenquotienten

Definition 5.1.3 (Differentialquotient)
Existiert der Grenzwert

$$\Delta_{x_0}(f) = \lim_{h \to 0} \Delta_{x_0}^h(f),$$

so nennen wir diesen Grenzwert die Steigung *oder auch die* Ableitung *von f an der Stelle x_0 oder auch den Differentialquotienten von f an der Stelle x_0. Wir sagen auch f ist im Punkt x_0 differenzierbar.*

Definition 5.1.4 (Differenzierbarkeit)
Ist $D \subset \mathbb{R}$ oder $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ bzw. $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar, so ist f auf D differenzierbar.

Definition 5.1.5 (Ableitung)
Ist f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar, so hat man eine Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ oder $f' : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f' : D \to \mathbb{R} \text{ (oder } f' : D \to \mathbb{C}) : x \mapsto \Delta_x(f).$$

Die Funktion f' heißt die Ableitung *von f.*

Bemerkung 5.1.6 (Schreibweise für Ableitung)
Für $f'(x_0)$ schreiben wir auch oft $\mathrm{D}\, f(x_0)$ oder $\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x_0}$.

Satz 5.1.7 (Rechnen mit Ableitungen)
Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ bzw. $f, g : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so sind die Funktionen

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. $h : D \setminus \left\{ x \in D \;\middle|\; g(x) = 0 \right\} \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$,

differenzierbar und es gilt für $x \in D$ bzw. in (3) für $x \in D \setminus \left\{ x \in D \;\middle|\; g(x) = 0 \right\}$

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. *(Produktregel)* $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. *(Quotientenregel))*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Beweis. (1) Natürlich reicht es die Aussage für jedes $x_0 \in D$ zu beweisen. Wir wissen, dass für Folgen $h_n \to 0,\ h_n \neq 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \pm \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \pm \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n},$$

falls die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.
(2) Wir betrachten

$$\frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0 + h) + f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}, \end{aligned}$$

da die Grenzwerte auf der rechten Seite nach Voraussetzung existieren. Der Grenzwert der linken Seite für $h \to 0$ ergibt $(f \cdot g)'(x_0)$, der auf der rechten

Seite
$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$
wobei die Stetigkeit von g ausgenutzt wurde.
(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert aufgrund der Stetigkeit von g ein $\delta > 0$, so dass für $|h| < \delta$ gilt $g(x_0 + h) \neq 0$. Dann ist
$$\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0)f(x_0 + h) - g(x_0 + h)f(x_0)}{g(x_0 + h)g(x_0)h}.$$
Mit dem üblichen Trick 0 in der Form $-g(x_0)f(x_0)+g(x_0)f(x_0)$ einzufügen erhält man das gewünschte Resultat. $\square$

Eine weitere wichtige Regel ist die sogenannte Kettenregel, die wir nun formulieren wollen.

Satz 5.1.8 (Kettenregel)
Es seien $E, D \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) offene Mengen und $f : D \to E$ sei im Punkt x_0 differenzierbar, $g : E \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) sei im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) \text{ mit } y_0 = f(x_0).$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten
$$\frac{g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)}{h} = \frac{g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
Mit $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ erhalten wir den Ausdruck
$$\frac{g(f(x_0) + k) - g(f(x_0))}{k} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
für den Differenzenquotienten. Wir beachten, dass mit h auch k gegen Null konvergiert, daher ist
$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)}{h} \\ =&\lim_{k\to 0} \frac{g(f(x_0) + k) - g(f(x_0))}{k} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$
Die rechte Seite ergibt offenbar
$$g'(f(x_0))f'(x_0).$$
$\square$

Wir geben nun eine alternative Charakterisierung der Differenzierbarkeit.

Satz 5.1.9 (Charakterisierung der Ableitung als lineare Abbildung) *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) offen und $x_0 \in D$ ein Punkt. $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es eine reelle (oder komplexe) Zahl $c \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gibt, so dass die durch*

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x)$$

definierte Funktion φ der Bedingung

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$$

genügt. In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. Wir nehmen an, f sei differenzierbar und die Funktion φ wie oben definiert und $c = f'(x_0)$. Dann ist

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Mit $h = x - x_0$ und dem Grenzwert für $h \to 0$ erhalten wir das Ergebnis

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

Für die Umkehrung betrachten wir φ wie definiert und nehmen an, dass

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - c \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h)}{h} = 0,$$

also

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c.$$

Damit existiert der Grenzwert und ist gleich c. $\square$

Bemerkung 5.1.10 (Approximation und Ableitung) Dieser Satz besagt, dass eine Funktion genau dann differenzierbar ist, wenn sie durch eine affin-lineare Abbildung approximiert werden kann.

Definition 5.1.11 (Höhere Ableitung) *Ist f' f'' bzw. $f^{(n)}$ definiert, definiere $(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$.*

5.2 Ableitungen bekannter Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Ableitungen bekannter Funktionen angeben.

Satz 5.2.1 (Ableitungen)
Alle hier auftretenden Funktionen seien auf $\mathbb{R}$ *definiert. Die Ableitung der Funktion* $f(x) = x$ *ist* $f'(x) = 1$*. Allgemeiner gilt, die Ableitung von* $f_n(x) = x^n$ *ist* $f_n'(x) = nx^{n-1}$*.*

Beweis. Wir beginnen mit der einfachen Funktion $f(x) = x$. Für deren Differenzenquotienten an der Stelle x_0 und der Differenz ergibt sich

$$\Delta_{x_0}^h(f) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Damit ist unabhängig von $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{x_0}^h(f) = 1.$$

Damit ist die erste Formel gezeigt.

Den zweiten Teil beweisen wir durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist durch den ersten Teil gegeben. Angenommen, die Behauptung sei gezeigt für n. Dann ist (mit der Produktregel)

$$f_{n+1}'(x_0) = f_1(x_0)f_n'(x_0) + f_1'(x_0)f_n(x_0) = x_0 n x_0^{n-1} + x_0^n = (n+1)x^n.$$

Dies ist gerade die angegebene Formel für $n+1$. □

Satz 5.2.2 (Ableitung von $\mathrm{E}(x),\ \log(x)$**)**
(a) Die Ableitung der Exponentialfunktionen $\mathrm{E}(z)$ *auf* $\mathbb{C}$ *ist*

$$\mathrm{E}(z).$$

(b) Die Ableitung des reellen Logarithmus auf $\mathbb{R}_+$ *ist gegeben durch*

$$(\log)'(x) = \frac{1}{x}.$$

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C}$. Der Differenzenquotient nimmt die Form

$$\Delta_{z_0}^h(\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{E}(z_0+h) - \mathrm{E}(z_0)}{h} = \mathrm{E}(z_0)\frac{\mathrm{E}(h)-1}{h}.$$

Dabei haben wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion benutzt. Für den Differentialquotienten erhalten wir daher

$$\Delta_{z_0}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}(z_0)\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{E}(h)-1}{h}.$$

Diesen Grenzwert berechnen wir wieder mit der Fehlerabschätzung, wobei wir nach dem ersten Term abbrechen $|h| < 1$ und erhalten

$$\frac{\mathrm{E}(h) - 1}{h} = \frac{1 + h + f_1(h) - 1}{h} = 1 + \frac{f_1(h)}{h}.$$

Die Fehlerabschätzung liefert

$$f_1(h) \leq 2\frac{h^2}{2!}$$

und damit

$$\left|\frac{\mathrm{E}(h) - 1}{h} - 1\right| \leq 2\frac{|h|}{2!}.$$

Daher ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{E}(h) - 1}{h} = 1.$$

und

$$\Delta_{z_0}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}(z_0).$$

Unter der Annahme, dass die Logarithmus-Funktion differenzierbar ist, lässt sich die Ableitung leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\log(x)) &= x \\
(\mathrm{E}(\log(x)))' &= 1 \\
\mathrm{E}'(\log(x))\,(\log(x))' &= 1 \\
x\,(\log(x))' &= 1 \\
(\log(x))' &= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Die Existenz der Ableitung des Logarithmus ist damit bisher nicht gezeigt, wir schließen sie aus einem allgemeinen Satz zur Existenz der Ableitung der Umkehrfunktion. □

Satz 5.2.3 (Ableitung der Umkehrfunktion)
Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf D definierte, stetige und streng monotone Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$. Ist f im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und die Ableitung $(f^{-1})'$ hat im Punkt y_0 den Wert

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Zu h gibt es ein $\tilde{h}$ mit

$$y_0 + h = f(x_0 + \tilde{h}).$$

Die Stetigkeit von f impliziert, dass $\tilde{h} \to 0$ mit $h \to 0$. (Genauer, ist h_n eine gegen 0 konvergierende Folge, so ergibt sich eine Folge $\tilde{h}_n$, die ebenfalls gegen 0 konvergiert.) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h} &= \frac{f^{-1}(f(x_0+\tilde{h}))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x_0+\tilde{h})-f(x_0)} \\
&= \frac{x_0+\tilde{h}-x_0}{f(x_0+\tilde{h})-f(x_0)} \\
&= \frac{\tilde{h}}{f(x_0+\tilde{h})-f(x_0)}.
\end{aligned}$$

Aus der Existenz des Grenzwertes auf der rechten Seite folgt die des Grenzwertes auf der linken Seite.
Betrachten wir links den Grenzwert $h \to 0$, so müssen wir rechts den Grenzwert für $\tilde{h} \to 0$ betrachten und erhalten die gewünschte Aussage. □

Wir berechnen nun die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen. Für die nötigen Abschätzungen wollen wir ein Hilfsmittel zur Verfügung stellen, das sich in allen Anwendungen der Mathematik großer Beliebtheit erfreut und wesentliche Vereinfachungen der Notation nach sich zieht. Allerdings, und darauf sei besonders hingewiesen, werden diese Hilfsmittel auch oft ungenau angewendet, davor wird eindringlich gewarnt. Es geht darum das Grenzwertverhalten von Funktionen f und g für $x \to x_0$ zu vergleichen, oft wird dabei $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = \infty$ sein.

Definition 5.2.4 (Landau Symbole)
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit entweder $x_0 \in \overline{D}$ oder D enthalte eine Menge der Form (a, ∞), f, g seien auf ganz D definierte Funktionen. Wir sagen

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to \infty,$$

falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K > a$ gibt, so dass für alle $x > K$ gilt

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)|,$$

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0,$$

falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $x \in B_\delta(x_0) \cap D$ impliziert

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)|.$$

Definition 5.2.4 (Landau Symbole (Fortsetzung))
Wir sagen
$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to \infty$$
falls es ein $K > a$ *und ein* $M \in \mathbb{R}_+$ *gibt, so dass für alle* $x > K$ *gilt*
$$|f(x)| < M|g(x)|,$$
$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to x_0,$$
falls es ein $\delta > 0$ *und eine Zahl* $M \in \mathbb{R}_+$ *gibt, so dass* $x \in B_\delta(x_0) \cap D$ *impliziert*
$$|f(x)| < M|g(x)|.$$
Die Symbole o, O *werden als* Landau-Symbole[1] *bezeichnet.*

Bemerkung 5.2.5
Speziell interessieren wir uns für Ausdrücke der Form
$$f(x) = o(|x|^\alpha) \text{ für } x \to 0 \text{ oder } x \to \infty.$$
Diese charakterisieren das Wachstumsverhalten bei Grenzwertbetrachtungen. Ist $g \neq 0$, so kann man die Bedingungen auch umschreiben:
$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to \infty$$
genau dann, wenn
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
In diesem Sinne ist
$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to \infty,$$
falls
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$
beschränkt ist auf jeder Menge der Form $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq K\right\}$, $K \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten zwei Beispiele.

[1] Edmund Landau (14.2.1877–19.2.1938) promovierte, indem er eine auf Euler zurückgehende Formel bewies. Unter anderem bewies er auch den Primzahlsatz. Sei Hauptarbeitsgebiet war die sogenannte Funktionentheorie.

Lemma 5.2.6 (Asymptotik von Sinus und Kosinus)
Es gilt

$$\cos(h) - 1 = o(h) \text{ für } h \to 0,$$

und

$$\sin(h) = O(h) \text{ für } h \to 0,$$

genauer gilt sogar:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Beweis.

$$\left| \frac{\cos(h) - 1}{h} \right| = \left| \frac{1 + f_1^{\cos}(h) - 1}{h} \right| = \left| \frac{f_1^{\cos}(h)}{h} \right| \leq \left| \frac{h^2}{h} \right| = |h|,$$

für h hinreichend klein.

Für

$$\frac{\sin(h)}{h}$$

bekommen wir

$$\left| \frac{\sin(h)}{h} \right| = \left| \frac{h + f_1^{\sin}(h)}{h} \right| \leq 1 + \left| \frac{f_1^{\sin}(h)}{h} \right| \leq 1 + \frac{|h|^3}{3|h|}.$$

Da für alle $h \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin(h)| \leq |h|$ (Leibniz-Kriterium) folgt damit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

$\square$

Satz 5.2.7 (Ableitung der trigonometrischen Funktionen)
Es gilt

1. $(\sin(x))' = \cos(x)$;
2. $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Wir setzen für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

und

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dann sind tan, cot *an allen Stellen ihres Definitionsbereiches differenzierbar und es gilt*

1. $(\tan(x))' = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$;
2. $(\cot(x))' = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$;

Beweis. Wir beginnen mit der Sinus-Funktion, aufgrund von Satz 3.5.14 gilt

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x).$$

Damit schreiben wir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}.\\ &= \cos(x),\end{aligned}$$

denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1,$$

wie wir oben gesehen haben. Die entsprechende Rechnung für den Kosinus ist ganz ähnlich:

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

wegen des ersten Additionstheoremes in Satz 3.5.14. Damit wird

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}\\ &= \cos(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert der rechten Seite für $h \to 0$ ist $-\sin(x)$. Die Ableitungen für tan und cot ergeben sich aus der Quotientenregel. □

In den Übungen (Aufgabe 6 auf Blatt 9) hatten wir die hyperbolischen Winkelfunktionen $\sinh, \cosh$ eingeführt und dafür Additionstheoreme gezeigt. Wir erinnern nochmals an die Definition.

Definition 5.2.8 (Sinus/Kosinus Hyperbolicus)
Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}\right), \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}\right).$$

Diese Funktionen werden als Sinus Hyperbolicus, *bzw.* Kosinus Hyperbolicus *bezeichnet. Wir nennen diese die* hyperbolisch triogonometrischen Funktionen.

Im Fall der trigonometrisch hyperbolischen Funktionen ergeben sich wie im Fall von Sinus/Kosinus Additionstheoreme.

Lemma 5.2.9 (Additionstheoreme hyperbolischer Winkelfunktionen)
Die Additionstheoreme *für die* hyperolischen trigonometrischen Funktionen *lauten*

$$\begin{aligned}\cosh(z_1 + z_2) &= \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2),\\ \sinh(z_1 + z_2) &= \cosh(z_1)\sinh(z_2) + \sinh(z_1)\cosh(z_2).\end{aligned}$$

Beweis. Siehe Übungen. □

Wie im Fall von Sinus und Kosinus ergeben sich die Ableitungen nun.

Satz 5.2.10 (Ableitung hyperbolisch trigonometrischer Funktionen)
Es gilt

$$\begin{aligned}\cosh'(z) &= \sinh(z)\\ \sinh'(z) &= \cosh(z).\end{aligned}$$

Beweis. Aufgrund der Additionstheoreme Lemma 5.2.9 ergibt sich

$$\begin{aligned}\cosh(z + h) &= \cosh(z)\cosh(h) + \sinh(z)\sinh(h)\\ \sinh(z + h) &= \cosh(z)\sinh(h) + \sinh(h)\cosh(z),\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}\frac{\cosh(z+h)-\cosh(z)}{h} &= \cosh(z)\frac{\cosh(h)-1}{h}+\sinh(z)\frac{\sinh(h)}{h}\\ \frac{\sinh(z+h)-\sinh(z)}{h} &= \cosh(z)\frac{\sinh(h)}{h}+\sinh(z)\frac{\cosh(h)-1}{h}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition berechnet man wie für die trigonometrischen Funktionen

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cosh(h)-1}{h}=0$$

und

$$\frac{\sinh(h)}{h}=1.$$

Damit ergeben sich sofort die angegebenen Formeln. □

5.3 Extrema

Definition 5.3.1 (Extremwert)
Es sei (X,d) ein metrischer Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $D(f) \subset X$ offen. Gibt es ein $x_0 \in D(f)$ mit $f(x_0) = \sup\left\{f(y) \,\middle|\, y \in D(f)\right\}$, so heißt $f(x_0)$ das Maximum *von f. Gibt es ein $x_1 \in D(f)$ mit $f(x_1) = \inf\left\{f(y) \,\middle|\, y \in D(f)\right\}$, so heißt $f(x_1)$ das* Minimum *von f. $f(x_0)$ bzw. $f(x_1)$ werden als* Extremwerte *bezeichnet und jedes $x \in D(f)$ mit $f(x) = f(x_0)$ bzw. $f(y) = f(x_1)$ als* Extremwertstelle.

Bemerkung 5.3.2 (Extremwert annehmen)
Wir sagen auch f nimmt in x_0 bzw. x_1 das Maximum bzw. Minimum an.

Definition 5.3.3 (Maximum/Minimum)
Ist $x_0 \in D(f)$ ein Punkt und $B_\varepsilon(x_0)$ eine offene Kugel um x_0 , mit $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$, so heißt $f(x_0)$ lokales Maximum *von f. Gilt $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$, so heißt $f(x_0)$* lokales Minimum *von f. x_0 heißt in diesen Fällen* lokale Extremwertstelle *und $f(x_0)$* lokales Extremum.

Satz 5.3.4 (Notwendige Bedingung für eine Extremwertstelle)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ sei stetig und überall differenzierbar. Gibt es einen Punkt $x_0 \in I$, so dass $f(x_0)$ ein lokales Extremum ist, so ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ oder $f(x) \geq f(x_0)$. Der Beweis des zweiten Falles ist eine unwesentliche Modifikation des Beweises des ersten Falles, wir beschränken uns auf diesen. Gilt $x < x_0$ und $x \in B_\delta(x_0)$, dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

insbesondere folgt

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Entsprechend hat man für $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

und es folgt

$$\lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Da der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert sind die beiden obigen Limites gleich und damit 0. □

Bemerkung 5.3.5 (Notwendige Bedingung ist nicht hinreichend)
Die angegebene Bedingung ist notwendig, jedoch nicht hinreichend, wie das Beispiel

$$f(x) = x^3$$

lehrt, $f'(0) = 0$, jedoch ist 0 keine Extremwertstelle von f.

Satz 5.3.6 (Rolle[2])
Es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall ($a < b$) und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ist f auf dem Intervall (a, b) differenzierbar und gilt

$$f(a) = f(b),$$

so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Ist die Funktion f konstant, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ und damit der Satz gezeigt. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $x_1 \in (a, b)$ mit $f(x_1) \neq f(a)$.

[2]Michel Rolle (21.4.1652–8.11.1719) stammte aus einfachen Verhältnissen und war Autodidakt. Zeitweise war er Gegner der Differentialrechnung.

Sei oBdA $f(x) < f(a)$. Da $f(I)$ ein kompaktes Intervall ist, gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f(x_0) = \min\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I \right\}.$$

Insbesondere ist x_0 ein lokales Minimum und damit nach Satz 5.3.5 $f'(x_0) = 0$. ∎

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ist der wichtige Mittelwertsatz.

Korollar 5.3.7 (Mittelwertsatz)
Es sei $I = [a,b]$, $a < b$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und f auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Betrachte die Funktion

$$F(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann gilt

$$F(a) = f(a), \; F(b) = f(b)$$

und die Funktion

$$G(x) = f(x) - F(x)$$

hat die Eigenschaft $G(a) = G(b) = 0$. Also gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $G'(x_0) = 0$ oder aber

$$F'(x_0) = f'(x_0).$$

Da für alle $x \in (a,b)$ gilt

$$F'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ist der Satz gezeigt. ∎

Korollar 5.3.8 (Verschwindende Ableitung)
Ist $I = [a,b]$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f konstant.

Beweis. Wäre f nicht konstant, so könnte man $x_1, x_2 \in (a,b)$ finden mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nun wenden wir den Mittelwertsatz auf die Einschränkung von f auf $[x_1, x_2]$ an und erhalten einen Punkt $x_0 \in [x_1, x_2]$ mit $f'(x_0) \neq 0$. ∎

Eine weitere wichtige Konsequenz ist die folgende Wachstumsschranke für f.

Korollar 5.3.9 (Wachstumsschranken)
Ist $I = [a, b]$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Gibt es Werte m, M mit

$$m \leq f'(x) \leq M$$

für alle $x \in I$, so gilt für alle $x_1, x_2 \in I$

$$m(x_1 - x_2) \leq f(x_1) - f(x_2) \leq M(x_1 - x_2).$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Mittelwertsatz. □

Korollar 5.3.10 ($f' = cf$)
Ist f auf einem Intervall $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar und gilt für alle $x \in (a, b)$ und eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = cf(x),$$

so ist

$$f(x) = f(a)\mathrm{e}^{c(x-a)}.$$

Beweis. Betrachte $f(x)\mathrm{e}^{-c(x-a)}$. Nach der Produktregel erhält man für die Ableitung (unter Verwendung der Kettenregel für $\mathrm{E}(ax) = \mathrm{e}^{ax}$)

$$(f(x)\mathrm{e}^{-c(x-a)})' = f'(x)\mathrm{e}^{-c(x-a)} + f(x)(-c)\mathrm{e}^{-c(x-a)} = 0.$$

Also ist $f(x)\mathrm{e}^{-c(x-a)}$ konstant, für $x = a$ hat es den Wert $f(a)$ und somit ist

$$f(x) = f(a)\mathrm{e}^{+c(x-a)}.$$

□

Als Spezialfall erhält man

Korollar 5.3.11 (Ableitung gleich Funktion)
Gilt $f' = f$ für eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$, so ist

$$f(x) = f(0)\mathrm{e}^{x}.$$

5.4 Injektivität und Differenzierbarkeit

Satz 5.4.1 (Monotonieverhalten und Ableitung)
Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

1. *Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton steigend.*
2. *Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton steigend.*
3. *Gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton fallend.*
4. *Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton fallend.*

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Fall, alle anderen ergeben sich durch einfache Modifikationen. Wir nehmen an $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Wäre f nicht monoton steigend, so würde man x_1, x_2 finden mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$. Dann gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x_0) < 0$. Dies ist ein Widerspruch zum Mittelwertsatz. □

Eine weitere wichtige Anwendung der bisher erhaltenen Regeln ist der folgende Satz, der ein hinreichendes Kriterium für die Existenz lokaler Extrema angibt.

Satz 5.4.2 (Hinreichende Bedingung für Extremwertstelle)
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ überall definiert, stetig und differenzierbar. Ist $f'(x_0) = 0$ und existiert im Punkt x_0 die zweite Ableitung $f''(x_0)$ und gilt $f''(x_0) \neq 0$, so ist x_0 eine lokale Extremwertstelle.

Beweis. Wir betrachten oBdA den Fall $f''(x_0) > 0$, der andere Fall geht genauso.

Wir beginnen mit der Betrachtung der zweiten Ableitung

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h},$$

da $f'(x_0) = 0$. Da $f''(x_0) > 0$, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|h| < \delta$ impliziert

$$\frac{f(x_0 + h)}{h} > 0.$$

Dann ist für $|h| < \delta$ und $h < 0$ der Wert $f'(x_0 + h) < 0$ und für $h > 0$ der Wert $f'(x_0 + h) > 0$. Dann ist aber auf $(x_0 - \delta, x_0)$ die Ableitung f' negativ und daher f streng monoton fallend, auf $(x_0, x_0 + \delta)$ ist f' positiv und damit f streng monoton steigend. Damit ist für $\delta > h > 0$

$$f(x_0 - h) > f(x_0) < f(x_0 + h)$$

und $f(x_0)$ ist ein lokales Minimum. □

5.5 Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

Die Funktionen $\sin, \cos$ sind nicht injektiv und daher nicht umkehrbar. Schränken wir die Funktionen jedoch ein, also betrachten wir nur einen Teil des Definitionsbereiches, so kann man diesen Teil so wählen, dass die Funktionen injektiv sind und damit umkehrbar. Der obige Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion liefert dann die Ableitung dieser Funktionen.

Definition 5.5.1 (Monotonie von Sinus/Kosinus)

1. *Wir betrachten die Einschränkung von* $\sin$ *auf das Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Die Ableitung von* $\sin$ *ist* $\cos$ *und dieser ist im angegebenen Intervall positiv, also ist* $\sin$ *injektiv und es gibt eine Umkehrfunktion, die wir mit* $\arcsin$ *bezeichnen.*

2. *Wir betrachten die Einschränkung von* $\cos$ *auf das Intervall* $(0, \pi)$. *Die Ableitung von* $\cos$ *ist* $-\sin$ *und dieser ist im angegebenen Intervall negativ, also ist* $\cos$ *injektiv und es gibt eine Umkehrfunktion, die wir mit* $\arccos$ *bezeichnen.*

3. *Wir betrachten die Funktion* $\tan$ *auf dem Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Die Ableitung von* $\tan$ *ist* $\frac{1}{\cos^2}$ *und ist im angegebenen Intervall positiv, also ist* $\tan$ *injektiv und es gibt eine Umkehrfunktion, die wir mit* $\arctan$ *bezeichnen.*

4. *Wir betrachten die Funktion* $\cot$ *auf dem Intervall* $(0, \pi)$. *Die Ableitung von* $\cot$ *ist* $\frac{1}{\sin^2}$ *und ist im angegebenen Intervall positiv, also ist* $\cot$ *injektiv und es gibt eine Umkehrfunktion, die wir mit* arccot *bezeichnen.*

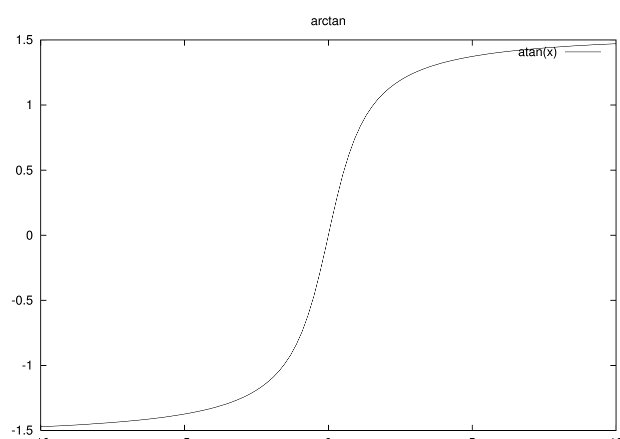

Abbildung 5.2: Arcustangens

Satz 5.5.2 (Ableitung der Umkehrfunktion einer Winkelfunktionen) *Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind nach Satz 5.2.3 auf den angegebenen Intervallen differenzierbar und die Ableitungen ergeben sich zu:*

1. *Für* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ist*
$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}.$$
Damit ist für $y \in (-1, 1)$
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

2. *Für* $x \in (0, \pi)$ *ist*
$$\arccos'(\cos(x)) = -\frac{1}{\sin(x)}.$$
Damit ist für $y \in (-1, 1)$
$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

3. *Für* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ist*
$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)}.$$
Damit ist für $y \in (-\infty, \infty)$
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

4. *Für* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ist*
$$\operatorname{arccot}'(\cot(x)) = \frac{1}{\cot'(x)}.$$
Damit ist für $y \in (-\infty, \infty)$
$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Beweis. Der erste Teil der Aussage folgt immer unmittelbar aus dem Satz zur Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion 5.2.3. Im Fall des arcsin ergibt sich folgende Rechnung: Setze $y = \sin(x)$. Dann ist

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Im Falle des arccos ist die Rechnung eine triviale Modifikation.

Wir kommen zum Tangens und erhalten (dort wo $\tan'(x) \neq 0$ ist)

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)}.$$

Setze $y = \tan(x)$ und damit ergibt sich

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) = 1 + y^2,$$

also ist

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Alle anderen Fälle sind entsprechend. □

Bemerkung 5.5.3 (Zweige von Umkehrfunktionen)
Natürlich kann man die Injektivität auch erzwingen dadurch, dass man die Funktionen auf ein anderes Intervall einschränkt. Die auf diese Weise gewonnen Umkehrfunktionen nennt man *Zweige* der jeweiligen Umkehrfunktion.

Bemerkung 5.5.4 (Sekans und Kosekans)
Oft werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

und

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Diese Funktionen werden als *Sekans* und *Kosekans* bezeichnet.

Definition 5.5.5 (Hauptzweig)
Die im Satz angegebenen Umkehrfunktionen werden jeweils als Hauptzweig *der entsprechenden Funktion bezeichnet.*

Wir kommen nun noch zu den hyperbolischen Winkelfunktionen. Zunächst setzen wir für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)},\\ \coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)},\end{aligned}$$

wobei wir natürlich nur solche z zulassen, dass $\cosh(z) \neq 0$, bzw. $\sinh(z) \neq 0$. Man überlegt sich leicht einige qualitative Eigenschaften der Funktionen Sinus Hyperbolicus, Kosinus Hyperbolicus, Tangens und Kotangens Hyperbolicus.

Satz 5.5.6 (Eigenschaften der hyperbolischen Winkelfunktionen)

1. *Die Funktion* $\sinh(x)$ *ist auf* $\mathbb{R}$ *streng monoton steigend, es gilt* $\lim_{x\to\pm\infty}\sinh(x) = \pm\infty$. *Die Funktion ist ungerade. Es gibt eine einzige Nullstelle bei* $x = 0$.

2. *Die Funktion* $\cosh(x)$ *ist auf* $\mathbb{R}$ *gerade, sie ist streng monoton fallend auf* $(-\infty, 0)$ *und streng monoton steigend auf* $(0, \infty)$. *Es gilt* $\lim_{x\to\pm\infty}\cosh(x) = \infty$. *Bei* $x = 0$ *hat* cosh *eine globale Extremwertstelle,* $\cosh(0) = 1$ *ist ein lokales und globales Minimum.*

3. *Die Funktion* $\tanh(x)$ *ist für alle* $x \in \mathbb{R}$ *definiert. Es gilt* $|\tanh(x)| \leq 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $\lim_{x\to\pm\infty}\tanh(x) = \pm 1$.

4. *Die Funktion* $\coth(x)$ *ist für alle* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ *definiert und es gilt* $\lim_{x\to 0, x>0}\coth(x) = \infty$, coth *ist ungerade und es gilt* $|\coth(x)| \geq 1$ *und* $\lim_{x\to\infty}\coth(x) = 1$.

Beweis. (1) Die Ableitung von sinh ist cosh. Man sieht sofort, dass diese Funktion für reelle x nicht Null wird. Die Funktion ist aufgrund ihrer Definition ungerade und die Grenzwerteigenschaften folgen sofort aus denen für die Exponentialfunktion. Jede Nullstelle genügt der Gleichung $e^x = e^{-x}$. Da für $x > 0$ gilt $\mathrm{e}^x > 1$ und für $x < 0$ gilt $\mathrm{e}^x < 1$, folgt, dass diese Gleichung höchstens die Lösung $x = 0$ hat. Dies ist auch eine Lösung und es ist nichts weiter zu zeigen.
(2) Geradheit und Monotonieeigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von sinh. Als einzige Extremwertstelle kommt die Nullstelle von $\sinh(x)$ in Frage und dort erhält man den Wert 1. Die Abschätzung $\cosh(x) \geq 1$ ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition.
(3) Da für alle x gilt

$$|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}| \leq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x},$$

hat man sofort eine Schranke für tanh. Die Funktion ist offensichtlich ungerade und daher reicht es den Grenzwert für $x \to \infty$ zu untersuchen. Wir erhalten

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = 1.$$

(4) Da $\sinh(0) = 0$, ist die Unbeschränktheit nahe $x = 0$ klar, ebenso folgt aus der gerade gemachten Überlegung $|\coth(x)| \geq 1$ für alle x und wie eben $\lim_{x\to\infty} \coth(x) = 1$. □

Bemerkung 5.5.7 (Graphen)
Wir betrachten die Graphen der hyperbolischen Winkelfunktionen in den folgenden Darstellungen.

Nun überlegen wir uns wie eventuelle Umkehrfunktionen dieser Funktionen aus-

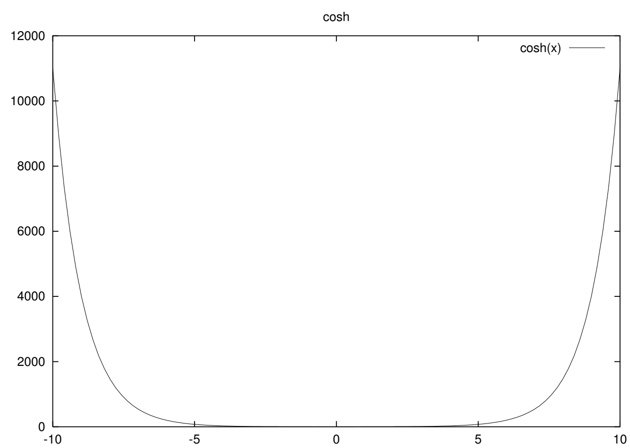

Abbildung 5.3: Kosinus Hyperbolicus

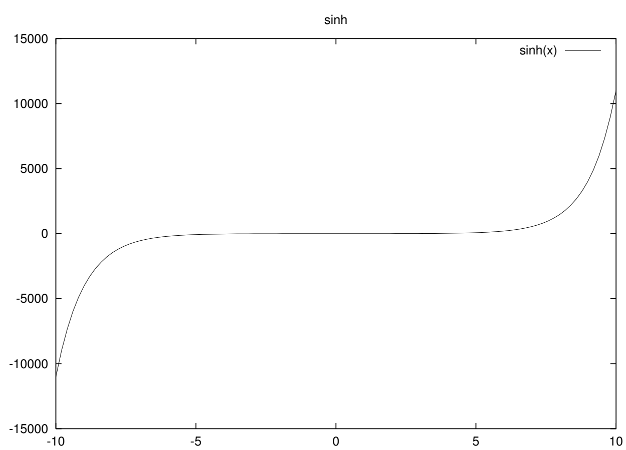

Abbildung 5.4: Sinus Hyperbolicus

sehen. Als Hilfsmittel verwenden wir eine Formel, die sofort aus dem Additionstheorem für cosh folgt, indem man es auf $z + (-z)$ anwendet, also

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1. \tag{5.1}$$

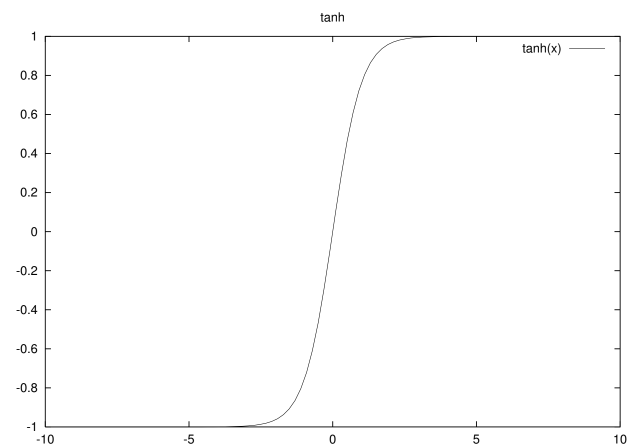

Abbildung 5.5: Tangens Hyperbolicus

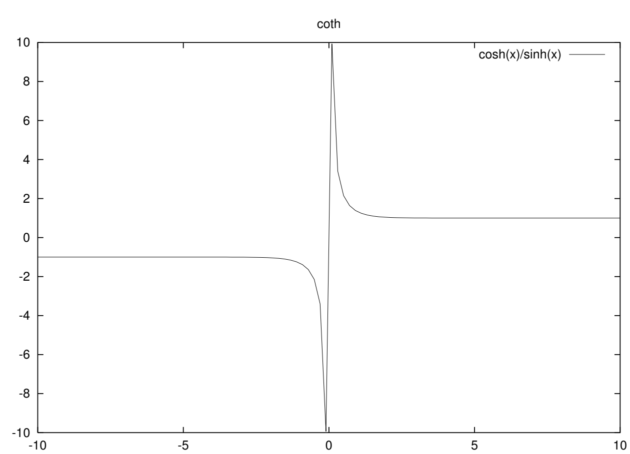

Abbildung 5.6: Kotangens Hyperbolicus

Satz 5.5.8 (Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen)

1. Die Funktion sinh ist bijektiv auf $\mathbb{R}$, die Ableitung nirgends Null, also existiert eine Umkehrfunktion
$$\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
mit
$$\operatorname{Arsinh}'(\sinh(x)) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$
Damit ergibt sich
$$\operatorname{Arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$
2. Die Funktion cosh ist auf $(0, \infty)$ injektiv und umkehrbar, die Umkehrabbildung
$$\operatorname{Arcosh} : (1, \infty) \to (0, \infty).$$
Diese ist überall differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich
$$\operatorname{Arcosh}'(\cosh(x)) = \frac{1}{\sinh(x)}$$
und damit für $y > 1$
$$\operatorname{Arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Beweis. Jeweils die erste Aussage ist wiederum eine sofortige Konsequenz aus der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion. Setzen wir $y = \sinh(x)$, so ergibt sich aus Gleichung (5.1)
$$\cosh(x) = \sqrt{1+y^2}.$$
$\square$

5.6 Die Regeln von de l'Hospital

Lemma 5.6.1 (Grenzwerte für $f(x)/x$)
(a) Es sei $(0,c)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f:(0,c)\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = M.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)}{x} = M.$$

(b) Ist $f:(c,\infty)\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = M,$$

so ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = M.$$

Beweis. (a) Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$0 < x < \delta \text{ impliziert } |f'(x) - M| < \varepsilon.$$

Ist nun $0 < x < \delta$ so ist nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi),$$

für ein $\xi \in (0,x)$. Damit ist

$$\left|\frac{f(x)}{x} - M\right| = |f'(\xi) - M| < \varepsilon.$$

Dies war zu zeigen.
(b) Hier betrachten wir zunächst den Fall $M = 0$. Wegen $\lim_{x\to\infty} f'(x) = M$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $c > 0$, so dass $x > c$ impliziert $|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ist nun $x > x_0 > c$, so gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(x - x_0).$$

Damit ist für hinreichend großes x, genauer für

$$x > \max\{x_0, 2\frac{f(x_0)}{\varepsilon}\},$$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{x} + \frac{|f(x_0)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}\frac{x - x_0}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ist nun M beliebig, so betrachten wir die Funktion $\tilde{f}(x) = f(x) - Mx$. Für diese gilt nun $\tilde{f}'(x) \to 0$ mit $x \to \infty$ und

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - Mx}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - M.$$

□

Satz 5.6.2 (l'Hospital[3])
Gegeben sei ein Intervall der Form $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir setzen voraus $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to b, x<b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = M \in \mathbb{R}$$

existiere.
Dann gelten die beiden Aussagen:

1. *Aus $\lim_{x\to b,x<b} g(x) = \lim_{x\to b,x<b} f(x) = 0$ folgt:*
   (a) *$g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und*
   (b) $\lim_{x\to b,x<b} \frac{f(x)}{g(x)} = M.$
2. *Aus $\lim_{x\to b,x<b} g(x) = \lim_{x\to b,x<b} f(x) = \pm\infty$ folgt:*
   (a) *Es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit $g(x) \neq 0$ für $x > x_0$ und*
   (b) $\lim_{x\to b,x<b} \frac{f(x)}{g(x)} = M.$

Entsprechende Aussagen gelten auch für die Grenzwerte bei a.

Beweis. Wir beginnen mit dem ersten Teil. Es gibt ein $\alpha < b$ mit g ist injektiv auf (α, b) und $g(x) \neq 0$ für $x \in (\alpha, b)$, denn ist

$$g(x) = g(y),$$

so existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (x, y)$ mit $g'(\xi) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $g' \neq 0$ und wäre $g(x) = 0$, so würde das gleiche Argument auf

[3]Guillaume François Antoine l'Hôpital, Marquis de Sainte Mesme (1661–3.2.1704) war Mitglied des französischen Hochadels, widmete sich dennoch der Mathematik. Von Johann I Bernoulli wurde er in die damals neue Infinitesimalrechnung eingeführt und schloss mit ihm ein Abkommen, dass jener ihm gegen Bezahlung die Rechte an mathematischen Erkenntnissen abtrat. So gehen auch die hier genannten Regeln auf Johann I Bernoulli zurück, der nach dem Tode von l'Hôpital die Entdeckerrechte einforderte.

dem Intervall (x, b) anwendbar sein. Also existiert eine stetige inverse Abbildung

$$g^{-1} : (0, \beta) \to (\alpha, b).$$

Für $y \in (0, \beta)$ gilt

$$\frac{f(g^{-1}(y))}{g(g^{-1}(y))} = \frac{f(g^{-1}(y))}{y}$$

und der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{f(g^{-1}(y))}{g(g^{-1}(y))} = \lim_{y \to 0} \frac{f(g^{-1}(y))}{y} = M,$$

denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, y} f(g^{-1}(y)) = \frac{f'(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

Der zweite Teil ist ganz ähnlich, nur bildet g auf ein Intervall der Form (β, ∞) ab. g ist auf (a, b) injektiv, zum Beweis dient das gleiche Argument wie oben. Damit ist g auf (a, b) streng monoton, denn g' wechselt das Vorzeichen nicht. Insbesondere können wir oBdA annehmen, dass $g > 0$ auf (a, ∞) ist. Das Bild von (a, b) unter g ist also ein Intervall der Form (β, ∞). Setze

$$F = f \circ g^{-1} : (\beta, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$F'(y) = \frac{f'(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

Nun ist

$$\lim_{y \to \infty} F'(y) = \lim_{x \to b, x < b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = M.$$

Damit folgt aus dem Lemma

$$\lim_{y \to \infty} \frac{F(y)}{y} = M.$$

Dann ist

$$\lim_{x \to b, x < b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to \infty} \frac{f(g^{-1}(y))}{y} = \lim_{y \to \infty} \frac{F(y)}{y} = M.$$

$\square$

Bemerkung 5.6.3 (Anwendungen der l'Hospitalschen Regel)

1. Wir betrachten für $\alpha > 0$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}.$$
Die Voraussetzungen zur Anwendung des Satzes von l'Hospital sind erfüllt und wir erhalten
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$
2. Den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$
kann man erst durch die Umformung
$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$$
in die erforderliche Gestalt bringen und ausrechnen, dass nach einer zweiten Anwendung von des Satzes von l'Hospital folgt, dass dieser Grenzwert 0 ist.

5.7 Stammfunktionen

Definition 5.7.1 (Stammfunktion)
Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt eine Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ Stammfunktion *von f, falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.*

Bemerkung 5.7.2 (Nichteindeutigkeit der Stammfunktion)
Eine Stammfunktion ist nicht eindeutig: ist F eine Stammfunktion von f, so gilt dies auch für $F + c$ für jede reelle Zahl c.

Satz 5.7.3 (Differenzen von Stammfunktionen)
Sind F_1, F_2 Stammfunktionen von der stetigen Funktion f auf (a,b), so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = F_2 + c$.

Beweis. Ist $x_0 \in (a,b)$ und $c = F_1(x_0) - F_2(x_0)$ und $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Dann gibt es ein $\xi \in (x, x_0)$ bzw. (x_0, x) mit

$$\begin{aligned}
(F_1(x) - F_2(x)) - (F_1(x_0) - F_2(x_0)) &= (F_1'(\xi) - F_2'(\xi))(x - x_0) \\
&= (f'(\xi) - f'(\xi))(x - x_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

□

Damit können wir die Stammfunktionen einer großen Klasse von Funktionen (jeweils bis auf Angabe einer Konstanten) angeben. Hier eine kleine Auswahl:

Funktion f	Stammfunktion F
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^a, a \neq -1$	$\dfrac{1}{a+1} x^{a+1}$
x^{-1}	$\log(\lvert x \rvert)$
e^x	e^x
$\log(x)$	$x \log(x) - x$
$\sin$	$-\cos$
$\cos$	$\sin$
$\sinh$	$\cosh$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\arcsin(y)$

Kapitel 6

Das Riemann-Integral

In diesem Abschnitt wollen wir einen Integralbegriff einführen. Dieser Integralbegriff geht auf Riemann[1] zurück und beruht auf einer naheliegenden Anschauung. Es wird sich zeigen, dass dieser Begriff für wichtige Anwendungen nicht ausreichend ist und wir werden später einer weitergehenden Begriff kennenlernen. Wir beginnen mit dem Begriff der Zerlegung eines Intervalls, eine naheliegende Konstruktion, die zur Definition des Integrals benötigt wird. Die Entwicklung des Integralbegriffes nimmt einige Konzepte, die meist erst bei der Darstellung des Lebesgue-Integrales eine Rolle spielen, vorweg. Damit ist unsere Darstellung etwas abstrakter, als es in der Literatur üblich ist, andererseits treten auch bei der Darstellung, wie sie normalerweise gegeben wird, einige Probleme auf, die dort nicht explizit behandelt werden, deren sachgemäße Lösung auf unseren Formalismus führt, der konsequent aus dem Funktionsbegriff hervorgeht.

Inhalt

[1]Georg Friedrich Bernhard Riemann (17.9.1826–20.7.1866) gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker, seine wichtigsten Beiträge galten der Analysis und der Differentialgeometrie.

6.1 Zerlegungen

Definition 6.1.1 (Zerlegung)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine geordnete Teilmenge

$$\mathfrak{Z} = \left\{ \zeta_i \;\middle|\; i = 0, \ldots, n \right\} \text{ mit } a = \zeta_0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_n = b$$

heißt eine Zerlegung *von $[a, b]$.*
Das Maximum

$$\Delta(\mathfrak{Z}) = \max \left\{ \zeta_{i+1} - \zeta_i \;\middle|\; i = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

nennt man die Feinheit *der Zerlegung.*

Wir wollen nun zwei Zerlegungen vergleichen.

Definition 6.1.2 (Feinheit einer Zerlegung)

1. *Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_1$ des Intervalls $[a, b]$ nennt man* feiner *als eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_2$ des Intervalls $[a, b]$, falls*
$$\Delta(\mathfrak{Z}_1) \leq \Delta(\mathfrak{Z}_2).$$
2. *Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_1$ des Intervalls $[a, b]$ wird als* Verfeinerung *der Zerlegung $\mathfrak{Z}_2$ bezeichnet, wenn*
$$\mathfrak{Z}_2 \subset \mathfrak{Z}_1.$$

Bemerkung 6.1.3 (Verfeinerung ist feiner)
Ist $\mathfrak{Z}_1$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_2$, so ist

$$\Delta(\mathfrak{Z}_1) \leq \Delta(\mathfrak{Z}_2),$$

d. h. $\mathfrak{Z}_1$ ist feiner als $\mathfrak{Z}_2$.

Lemma 6.1.4 (Existenz der gemeinsamen Verfeinerung)
Ist $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und sind $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ zwei Zerlegungen von $[a, b]$, so gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_3$, so dass $\mathfrak{Z}_3$ sowohl eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_1$, wie auch eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_2$ ist.

Definition 6.1.5 (Gemeinsame Verfeinerung)
Jede Zerlegung $\mathfrak{Z}_3$ mit dieser Eigenschaft wird als gemeinsame Verfeinerung *von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ bezeichnet.*

Das obige Lemma kann man also knapp so zusammenfassen: Zu je zwei Zerlegungen eines kompakten Intervalls gibt es eine gemeinsame Verfeinerung.

Beweis von Lemma 6.1.4. Betrachte

$$\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$$

und ordne $\mathfrak{Z}_3$ entsprechend der natürlichen Anordnung in $\mathbb{R}$. □

Definition 6.1.6 (Treppenfunktion)
Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\varphi_i \in \mathbb{R}, i = 0,\ldots,n-1$ eine Folge von n reellen Zahlen, dann nennt man eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $D(\varphi) \supset [a,b] \setminus \mathfrak{Z}$ mit

$$\varphi(x) = \varphi_i \text{ falls } x \in (\zeta_i, \zeta_{i+1})$$

Treppenfunktion *auf $[a,b]$.*

Eine Treppenfunktion wird durch eine Zerlegung und eine (endliche) Folge reeller Zahlen definiert. Man beachte, dass die Werte der Treppenfunktion φ an den Stellen ζ_i bei der Definition keine Rolle spielen. Wir gehen sogar noch einen Schritt weiter und verlangen nicht einmal, dass φ an diesen Stellen definiert ist.

Lemma 6.1.7 (Algebraische Eigenschaften von Treppenfunktionen)

1. *Sind φ, ψ Treppenfunktionen auf $[a,b]$, so ist $\varphi + \psi$ mit $D(\varphi+\psi) = D(\varphi) \cap D(\psi)$ mit $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $x \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ eine Treppenfunktion.*

2. *Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und φ eine Treppenfunktion auf $[a,b]$, so ist $\lambda\varphi$ eine Treppenfunktion.*

Beweis. Siehe Übungen. □

Definition 6.1.8 (Raum von Treppenfunktionen)
Den Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $T([a,b])$.

6.2 Ober- und Unterintegrale

Wir beginnen hier mit den anschaulichen Begriffen von Ober- und Untersumme und zeigen, wie der Integralbegriff, der auf diesen einfachen Begriffen basiert, äquivalent zu einer etwas abstrakteren Definition mittels Treppenfunktionen ist. Für alle praktischen Zwecke reicht die anschauliche Herleitung aus, das abstraktere Konzept gibt allerdings einen Ausblick und eine Vorbereitung auf die später zu definierende Verallgemeinerung des Integralbegriffes. Um gewisse technische Komplikationen auszuschließen, benötigen wir einige Einschränkungen an die von uns zu betrachtenden Funktionen.

Definition 6.2.1 (Raum der beschränkten Funktionen)
Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, setze

$$F([a,b];\mathbb{R}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; D(f) = [a,b] \setminus Z, \#(Z) \in \mathbb{N}_0,\ f \text{ ist beschränkt} \right\}.$$

Mit einfachen Worten, $F([a,b];\mathbb{R})$ ist die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen, die an allen, bis auf endlich vielen, Stellen definiert sind.

Definition 6.2.2 (Ober-, Unter-, Riemannsumme)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Es sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Es sei $f \in F([a, b], \mathbb{R})$ mit $D(f) \supset [a, b] \setminus \mathfrak{Z}$. Für $i = 0, \dots, n-1$ sei $x_i \in (\zeta_i, \zeta_{i+1})$. Dann führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{O}(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in (\zeta_i, \zeta_{i+1}) \right\} (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \\
\mathfrak{U}(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \inf\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in (\zeta_i, \zeta_{i+1}) \right\} (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \\
\mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(\zeta_{i+1} - \zeta_i).
\end{aligned}$$

$\mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z})$ *nennt man die* Obersumme *von f auf $[a, b]$ zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$, entsprechend* $\mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z})$ *die* Untersumme *und* $\mathfrak{R}(f, \mathfrak{Z})$ *eine* Riemannsumme *zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$.*

Bemerkung 6.2.3 (Riemannsumme)
Zu gegebener Zerlegung hängt der Wert einer Riemannsumme von der Auswahl der $x_i \in (\zeta_i, \zeta_{i+1})$ ab. Allerdings gilt für jede solche Auswahl:

$$\mathfrak{U}(f,\mathfrak{Z}) \le \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}) \le \mathfrak{O}(f,\mathfrak{Z}).$$

Man beachte, dass die Werte der Obersumme, Untersumme und Riemannsumme unabhängig sind von den Funktionswerten an den Zerlegungspunkten.

Lemma 6.2.4 (Treppenfunktionen als beschränkte Funktionen)
Es gilt $T([a,b]) \subset F([a,b];\mathbb{R})$.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition. □

Definition 6.2.5 (Äquivalenz beschränkter Funktionen)
Auf $F([a,b];\mathbb{R})$ *definieren wir eine Relation durch*

$f \sim g$ *genau dann, wenn* $\exists Z \subset [a,b], \#Z \in \mathbb{N}_0 \forall x \in [a,b]\backslash Z$ *gilt* $f(x)-g(x)=0$.

Aufgabe 6.2.6 (Vektorräume von Klassen beschränkter Funktionen)

1. Man zeige: Die Relation $f \sim g$ ist eine Äquivalenzrelation auf $F([a,b];\mathbb{R})$.
2. Für $f \in F([a,b];\mathbb{R})$ sei $[f]$ die Äquivalenzklasse mit $f \in [f]$. Man zeige
$$\mathfrak{F}([a,b];\mathbb{R}) = \left\{ [f] \,\middle|\, f \in F([a,b],\mathbb{R}) \right\}$$
ist ein Vektorraum.
3. Es sei
$$\mathfrak{T}([a,b]) = \left\{ [f] \,\middle|\, f \in T([a,b]) \right\}.$$
Man zeige: $\mathfrak{T}([a,b])$ ist ein Untervektorraum von $\mathfrak{F}([a,b],\mathbb{R})$.
4. Man überlege sich
   (a) $F([a,b],\mathbb{R})$ ist kein Vektorraum, $T([a,b])$ ist kein Vektorraum.
   (b) Man versuche eine Änderung der Definition von $F([a,b],\mathbb{R})$ und $T([a,b])$, so dass Vektorräume entstehen. Vergewissern Sie sich, dass die oben gewählte Definition mittels Äquivalenzrelation eine einfache Lösung aller entstehenden Probleme ist.

Wir wollen nun $F([a,b],\mathbb{R})$ mit einer Ordnung versehen.

Definition 6.2.7 (Relation für Klassen beschränkter Funktionen)
Es sei $[a,b]$ *ein kompaktes Intervall in* $\mathbb{R}$ *und* $f,g \in F([a,b],\mathbb{R})$. *Wir definieren eine Relation durch:* $f \le g$ *genau dann, wenn*

$\exists\, Z \subset [a,b],\ \#(Z) \in \mathbb{N}_0$ *mit* $D(f), D(g) \supset [a,b] \setminus Z$, *für* $x \notin Z$ *gilt* $f(x) \le g(x)$.

Lemma 6.2.8 (Ordnungsrelation)
Die Relation $\leq$ definiert eine Ordnungsrelation im Sinne der Definition 1.3.10 auf $\mathfrak{F}([a,b],\mathbb{R})$.

Beweis. Zu zeigen sind Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie. Ist $f \in F([a,b],\mathbb{R})$, so ist $f \leq f$, denn für alle $x \in D(f)$ gilt $f(x) \leq f(x)$, wobei das letzte $\leq$ für die Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ steht. Ist $f \leq g$, $g \leq h$, dann gibt es eine Menge Z_1 mit $f(x) \leq g(x)$ außerhalb Z_1 und eine Menge Z_2 mit $g(x) \leq h(x)$ außerhalb Z_2. Sei $Z = Z_1 \cup Z_2$. Dann ist Z endlich und für $x \notin Z$ gilt

$$f(x) \leq g(x) \text{ und } g(x) \leq h(x),$$

also $f(x) \leq h(x)$. Insbesondere haben wir gezeigt, aus

$$[f] \leq [g] \text{ und } [g] \leq [h] \text{ folgt } [f] \leq [h].$$

Die Antisymmetrie beruht auf einem sehr ähnlichen Argument: $[f] \leq [g]$, $[g] \leq [f]$ implizieren die Existenz von endlichen Teilmengen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ mit $x \in [a,b] \setminus Z_1$ impliziert $f(x) \leq g(x)$ und $x \in [a,b] \setminus Z_2$ impliziert $g(x) \leq f(x)$. Dann ist $Z_1 \cup Z_2$ endlich und für $x \notin Z_1 \cup Z_2$ gilt

$$f(x) \leq g(x) \leq f(x).$$

Damit ist $[f] = [g]$. □

Wir beginnen nun die Definition des Integrals.

Definition 6.2.9 (Integral für Klassen)
Ist $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und ist φ eine Treppenfunktion, so dass bezüglich einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ die Funktion φ auf jedem Intervall (ζ_i, ζ_{i+1}) konstant ist und dort den Wert c_i wie in Definition 6.1.6 annimmt. Wir setzen

$$\int_a^b [\varphi(x)]\,\mathrm{d}x = \mathfrak{R}(\varphi, \mathfrak{Z}).$$

Lemma 6.2.10 (Wohldefiniertheit)
Für $f \in T([a,b])$ ist

$$\int_a^b [f(x)]\,\mathrm{d}x$$

wohldefiniert.

Beweis. Ist $\mathfrak{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_1 = \{\zeta_0^1 < \cdots < \zeta_n^1\}$ und f Treppenfunktion auf $[a,b]$, die auf (ζ_i, ζ_{i+1}), $i = 0, \ldots, n-1$ jeweils konstant ist. Da $\mathfrak{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_1$ ist, wird ein Intervall

$$(\zeta_i^1, \zeta_{i+1}^1)$$

durch $\mathfrak{Z}_2$ weiter zerlegt, jedoch nimmt f_j auf jedem dieser Teilintervall den Wert c_i an. Man rechnet leicht nach, dass der Integralwert, den man bei Berechnung mit der Zerlegung $\mathfrak{Z}_2$ erhält, der gleiche ist wie mit $\mathfrak{Z}_1$.

Ist nun g eine zu f äquivalente Funktion, so gibt es eine Zerlegung, so dass auf jedem Intervall (ζ_i, ζ_{i+1}) die Werte von f und g gleich sind. Dann sind auch die mit dieser Zerlegung berechneten Integrale gleich. $\square$

Definition 6.2.11 (Ober- Unterintegral)
Für $f \in F([a,b],\mathbb{R})$ definieren wir Ober- *bzw.* Unterintegral *durch*

$$\begin{aligned}
\int_a^{b\,*} f(x)\,\mathrm{d}x &= \inf\left\{ \int_a^b [\varphi(x)]\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in T([a,b]), [\varphi] \geq [f] \right\} \\
\int_{a\,*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sup\left\{ \int_a^b [\varphi(x)]\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in T([a,b]), [\varphi] \leq [f] \right\}.
\end{aligned}$$

Definition 6.2.12 (Ober-, Unterintegral für Äquivalenzklassen)
Wir setzen

$$\int_a^{b\,*} [f(x)]\mathrm{d}x = \int_a^{b\,*} f(x)\mathrm{d}x$$

und

$$\int_{a\,*}^{b} [f(x)]\mathrm{d}x = \int_{a\,*}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Lemma 6.2.13 (Unabhängigkeit vom Repräsentanten)
Ober- und Unterintegral der Klasse $[f]$ hängt nicht von der Auswahl des Repräsentanten ab.

Beweis. Siehe Übungen. $\square$

Satz 6.2.14 (Charakterisierung integrierbarer Funktionen)
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f \in F([a,b],\mathbb{R})$. Dann sind die beiden folgenden Bedingungen gleichwertig.

1. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ gilt*
$$\Delta(\mathfrak{Z}) < \delta \Rightarrow \mathfrak{O}(f,\mathfrak{Z}) - \mathfrak{U}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$$
2. $\displaystyle\int_a^{b\,*} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Beweis. „$1 \Rightarrow 2$“ Für die erste Richtung bemerken wir, dass die Obersumme und Untersumme jeweils als Integral für eine geeignete Treppenfunktion gedeutet werden können, und daraus folgt, dass

$$\mathfrak{O}(f,\mathfrak{Z}) \geq \int_a^{b\,*} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\mathfrak{U}(f,\mathfrak{Z}) \leq \int_{a\,*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Daher gilt für jedes $\varepsilon > 0$, $\Delta(\mathfrak{Z}) < \delta$, wobei $\delta = \delta(\varepsilon)$ gemäß (1) definiert ist,

$$\varepsilon > \mathfrak{O}(f,\mathfrak{Z}) - \mathfrak{U}(f,\mathfrak{Z}) \geq \int_a^{b\,*} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a\,*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir kommen zur Rückrichtung. Sei $f \in F([a,b],\mathbb{R})$, $M > 0$, so dass $|f(x)| < M$ für alle $x \in D(f)$. Es gelte

$$\int_a^{b\,*} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es zwei Treppenfunktionen $\overline{\varphi}, \underline{\varphi}$ mit

$$\underline{\varphi} \leq f \leq \overline{\varphi}$$

mit

$$\int_a^{b\,*} \overline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a\,*}^{b} \underline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die zugehörigen Zerlegungen seien

$$\underline{\mathfrak{Z}} \text{ bzw. } \overline{\mathfrak{Z}}.$$

Sei $\mathfrak{Z}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\underline{\mathfrak{Z}}$ und $\overline{\mathfrak{Z}}$ mit

$$\mathfrak{Z} = \left\{\zeta_i \;\middle|\; i = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

Setze

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{4Mn},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{3} \min \left\{\zeta_{i+1} - \zeta_i \;\middle|\; i = 0, \ldots, n-1\right\}$$

und $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Ist nun $\mathfrak{Z}_0 = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit Feinheit $\Delta(\mathfrak{Z}_0) < \delta$. Wir betrachten die Intervalle der Form (ξ_i, ξ_{i+1}) und unterscheiden zwei Typen: Typ 1: (ξ_i, ξ_{i+1}) enthält keinen Punkt der Form ζ_j
Typ 2: (ξ_i, ξ_{i+1}) enthält einen Punkt der Form ζ_j.
Wir berechnen die Differenz von Obersumme und Untersumme für die Intervalle von Typ 1 und Typ 2 getrennt.
Es gibt höchstens n Intervalle vom Typ 2. In jedem solchen Intervall A gilt

$$-M \leq \inf \left\{f(x) \;\middle|\; x \in A\right\} \leq \sup \left\{f(x) \;\middle|\; x \in A\right\} < M$$

und $\sup \left\{f(x) \;\middle|\; x \in A\right\} - \inf \left\{f(x) \;\middle|\; x \in A\right\} < 2M$. Dann trägt dieses Intervall zur Differenz von Ober- und Untersumme höchstens mit

$$\delta_1 \cdot 2M = \frac{\varepsilon}{4Mn} 2M = \frac{\varepsilon}{2n}$$

bei, da es höchstens n solche Intervalle gibt, ist der Gesamtbeitrag der Typ 2 Intervalle höchstens

$$n \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ist nun B ein Typ 1 Intervall, so ist $B \subset (\zeta_i, \zeta_{i+1})$ für ein $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Für $x \in B$ gilt

$$\underline{\varphi}(x) \leq \inf \left\{f(x) \;\middle|\; x \in B\right\} \leq \sup \left\{f(x) \;\middle|\; x \in B\right\} \leq \overline{\varphi}(x).$$

Damit ist

$$\overline{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x) \geq \sup \left\{f(x) \;\middle|\; x \in B\right\} - \inf \left\{f(x) \;\middle|\; x \in B\right\}.$$

Insbesondere ist der Gesamtbeitrag der Typ 1 Intervalle zur Differenz von Obersumme und Untersumme abzuschätzen durch

$$\int_a^b \overline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Definition 6.2.15 (Integrierbarkeit)
Ist für $f \in F([a,b],\mathbb{R})$ eine der beiden Bedingungen aus Satz 6.2.14 erfüllt, so ist f integrierbar *im Sinne von Riemann. Wir setzen*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b\,*} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta(\mathfrak{Z})\to 0} \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z})$$

und nennen dies das Integral *von f.*

Satz 6.2.16 (Eigenschaften des Integrals)
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f,g \in F([a,b],\mathbb{R})$. Es seien f,g integrierbar. Dann gilt:

1. *Für $\xi \in [a,b]$ existieren die Integrale*

$$\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ und es gilt } \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *$f+g$ sind integrierbar und*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. *Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist λf integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Satz 6.2.17 (Eigenschaften des Integrals (Fortsetzung))

4. *Es sei*
$$f_+ = \max\{f(x), 0\}, f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$
Dann existieren die Integrale
$$\int\limits_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst die Existenz des Integrals
$$\int\limits_a^\xi f(s)\,\mathrm{d}s.$$
Für $\xi = a$ gibt es nichts zu zeigen, für $\xi = b$ ist es die Voraussetzung. Sei nun $a < \xi < b$. Nach dem Satz 6.2.14 zur Charakterisierung der integrierbaren Funktionen gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit Feinheit $\Delta(\mathfrak{Z}) < \delta$ die Differenz von Ober- und Untersumme kleiner als ε ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ zu $\frac{\varepsilon}{2}$ zugehörig gewählt. Sei $\mathfrak{Z}_1$ eine Zerleung von $[a, \xi]$, $\mathfrak{Z}_2$ eine von $[\xi, b]$ und es sei $\delta(\mathfrak{Z}_i) < \delta$ für $i = 1, 2$. Sei $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$. Dann ist $\Delta(\mathfrak{Z}) < \delta$. Nun ist
$$\begin{aligned} \mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}) &= \mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}_1) + \mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}_2) \\ \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}) &= \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}_1) + \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}_2). \end{aligned}$$
Also ist
$$\varepsilon > \mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}) - \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}_1) + \mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}_2) - \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}_2).$$
Da beide Terme $\mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}_1) > 0$ und $\mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}_2) - \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}_2) > 0$ folgt
$$\mathfrak{O}(f, \mathfrak{Z}_i) - \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z}_i) < \varepsilon$$
und damit folgt die Integrierbarkeit. Das Argument zeigt auch die Additionsformel
$$\int\limits_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
(2) Wir beweisen die Behauptung zunächst für Treppenfunktionen. Seien φ, ψ zwei Treppenfunktionen mit Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ und zugeordneten Folgen φ_i, ψ_j. Wir betrachten eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$. Es gibt eine Treppenfunktion φ' mit $D(\varphi') = [a, b] \setminus \mathfrak{Z}$, so dass $\varphi \equiv \varphi'$ und eine Treppenfunktion ψ' mit $D(\psi') = [a, b] \setminus \mathfrak{Z}$ und $\psi' \equiv \psi$. Die Treppenfunktionen φ' und ψ' addiert

man jetzt einfach durch Addieren der zugehörigen Folgenglieder. Damit erhält man sofort die Darstellung des Integrals als Summe der beiden Integrale.
Sind $f, g \in F([a,b], \mathbb{R})$ integrierbar, so sind für beide Funktionen Ober- und Unterintegrale gleich, d. h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen

$$\psi_f \leq f \leq \varphi_f, \psi_g \leq g \leq \varphi_g$$

mit

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \psi_f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \int_a^b \varphi_g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \psi_g(x)\,\mathrm{d}x &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\psi_f + \psi_g \leq f + g \leq \varphi_f + \varphi_g.$$

Addition der obigen Integrale ergibt dann

$$\int_a^b (\varphi_f + \varphi_g)(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b (\psi_f + \psi_g)(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Damit ist $f + g$ integrierbar und es gilt die Additionsformel.
(3) ist klar.
(4) Wir betrachten für eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{\zeta_0 < \cdots < \zeta_n\}$

$$\mathfrak{O}(f_+, \mathfrak{Z}) - \mathfrak{U}(f_+, \mathfrak{Z}).$$

Für festes $0 \leq i \leq n-1$ gilt

$$\sup_{x \in (\zeta_i, \zeta_{i+1})} f_+(x) - \inf_{x \in (\zeta_i, \zeta_{i+1})} f_+(x) \leq \sup_{x \in (\zeta_i, \zeta_{i+1})} f(x) - \inf_{x \in (\zeta_i, \zeta_{i+1})} f(x).$$

Daraus folgt sofort die Integrierbarkeit von f_+ nach Teil 1 von Satz 6.2.14. Da $f_- = -(-f)_+$ folgt die Behauptung für f_- sofort. Mit (2) folgt die Integrierbarkeit von $|f|$. $\square$

Korollar 6.2.18 (Schranken für Integrale beschränkter Funktionen)
Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f \in F([a,b], \mathbb{R})$ eine integrierbare Funktion mit Schranke $M > 0$, so gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Beweis. Offenkundig ist für jede Zerlegung

$$\mathfrak{U}(|f|, \mathfrak{Z}) \geq \mathfrak{U}(f, \mathfrak{Z})$$

und damit folgt die behauptete Ungleichung für die Unterintegrale und damit auch für die Integrale. Für die Treppenfunktion

$$\varphi(x) = M, x \in [a, b]$$

gilt auf $[a, b]$ $\varphi \geq |f|$. Also ist

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_a^{b\,*} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}x = M(b - a).$$

Damit ist auch die zweite Ungleichung gezeigt. □

Bemerkung 6.2.19 (Integral als Grenzwert von Riemann-Summen)
Wegen der Äquivalenz der beiden Aussagen in Satz 6.2.14 schreiben wir auch

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\Delta\mathfrak{Z} \to 0} \mathfrak{R}(f, \mathfrak{Z}).$$

Satz 6.2.20 (Integrierbare Funktionen bilden einen Vektorraum)
Es sei $R([a, b], \mathbb{R})$ die Menge der integrierbaren Funktionen und

$$\mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R}) = \left\{ [f] \;\middle|\; f \in R([a, b], \mathbb{R}) \right\}.$$

Dann ist $\mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum. (Man beachte

$$\int_a^b [f](x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

ist wohldefiniert.)

Beweis. Folgt, da $\mathfrak{F}([a, b], \mathbb{R})$ ein Vektorraum ist und mit $[f], [g] \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt

$$[f + g] \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R}) \text{ bzw. } \lambda[f] \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R}).$$

□

Satz 6.2.21 (Weitere Eigenschaften)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall.*

1. *Ist* f *integrierbar, so auch* $|f|^p$ *für* $p > 1$.
2. *Sind* $f, g \in F([a, b], \mathbb{R})$ *integrierbar, so gilt dies auch für* $f \cdot g$.

Beweis. (1) Es genügt den Fall $|f| \leq 1$ zu betrachten, denn für beliebiges durch $M > 0$ beschränktes f, ist die Funktion $g = |f|/M$ durch 1 beschränkt. Ist g^p integrierbar, so auch $M^p g^p = |f|^p$.

Sei also $|f| \leq 1$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi \leq |f| \leq \psi$ mit

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Für Treppenfunktion gilt, dass jede Potenz $p \geq 1$ wieder eine Treppenfunktion ist, also hat man Treppenfunktionen

$$\varphi^p \leq |f|^p \leq \psi^p.$$

Daraus folgt

$$\int_a^b \varphi^p(x)\mathrm{d}x \leq \int_{a\,*}^{b} |f|^p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{b\,*} |f|^p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi^p(x)\mathrm{d}x.$$

Da wir uns auf den Fall $|f| \leq 1$ beschränken, folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ($(x^p)' = px^{p-1} \leq p$)

$$\psi^p(x) - \varphi^p(x) \leq p(\psi(x) - \varphi(x))$$

und damit

$$\int_a^b (\psi^p - \varphi^p)(x)\,\mathrm{d}x \leq p \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \leq p\frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon.$$

Damit sind Ober- und Unterintegral von $|f|^p$ gleich und $|f|^p$ ist integrierbar.

(2) Folgt sofort aus (1), denn

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

□

Definition 6.2.22 (Vertauschte Integralgrenzen)
Bisher hatten wir immer Integrale der Form

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

betrachtet, wobei $[a,b]$ *ein Intervall ist. Wir wollen nun Funktionen* $f \in F([a,b],\mathbb{R})$ *betrachten und setzen für* $a \leq c < d \leq b$ *das Integral*

$$\int_c^d f(s)\,\mathrm{d}s$$

in der gewohnten Form. Wir definieren

$$\int_d^c f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_c^d f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Bemerkung 6.2.23 (Integration komplexwertiger Funktionen)
Natürlich können wir mit dem entwickelten Integralbegriff auch komplexwertige Funktionen integrieren. Dazu setzen wir die Menge

$$F([a,b],\mathbb{C}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re} f \in F([a,b],\mathbb{R}), \operatorname{Im} f \in F([a,b],\mathbb{R}) \right\}.$$

Eine Funktion $f \in F([a,b],\mathbb{C})$ heißt genau dann Riemann-integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Riemann-integrierbar sind. Demzufolge ist

$$R([a,b],\mathbb{C}) = \left\{ f \in F([a,b],\mathbb{C}) \;\middle|\; \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in R([a,b],\mathbb{R}) \right\}.$$

Wir setzen dann

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\mathrm{d}x + \mathtt{i}\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\mathrm{d}x.$$

6.3 Existenz des Integrals

In diesem Abschnitt geht es darum, die Existenz des Riemann-Integrals für gewisse Klassen von Funktionen zu beweisen.

Satz 6.3.1 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)
Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so ist $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ integrierbar.

Beweis. Ist $f \in C([a,b];\mathbb{R})$, so ist wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ die stetige Funktion f gleichmäßig stetig (Satz 4.3.9). Sei $\varepsilon > 0$, $L = b - a$ und $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$. Sei $\eta > 0$ so gewählt, dass $|x - x'| < \eta$ impliziert $|f(x) - f(x')| < \delta$ (unter Ausnutzung der gleichmäßigen Stetigkeit).

Sei $\mathfrak{Z} = \{\zeta_0 < \cdots < \zeta_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit Feinheit $\Delta(\mathfrak{Z}) < \eta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{O}(f,\mathfrak{Z}) - \mathfrak{U}(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x)(\zeta_{i+1}-\zeta_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x)(\zeta_{i+1}-\zeta_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x) - \inf_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x) \right) (\zeta_{i+1}-\zeta_i) \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1} \delta(\zeta_{i+1}-\zeta_i) \;=\; \delta \sum_{i=0}^{n-1} (\zeta_{i+1}-\zeta_i) \;\le\; \frac{\varepsilon}{L} L \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher existiert das Integral von f über $[a,b]$ nach Satz 6.2.14, 1.Teil. □

Satz 6.3.2 (Integrierbarkeit monotoner Funktionen)
Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so ist eine überall definierte monotone Funktion $f \in F([a,b],\mathbb{R})$ integrierbar.

Beweis. Wir betrachten oBdA eine monoton steigende Funktion. Für eine monoton steigende Funktion f und eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{\zeta_0 < \cdots < \zeta_n\}$ gilt für $i = 0, \ldots, n-1$

$$\sup_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x) \le f(\zeta_{i+1}) \text{ und } \inf_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x) \ge f(\zeta_i).$$

Sei $m = f(a)$ und $M = f(b)$, $\ell = M - m$. Ist $\ell = 0$, so ist f konstant und damit stetig und daher integrierbar. Sei also $\ell \neq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta = \frac{\varepsilon}{\ell}$. Sei $\mathfrak{Z} = \{\zeta_0 < \cdots < \zeta_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit Feinheit $\Delta(\mathfrak{Z}) < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{O}(f,\mathfrak{Z}) - \mathfrak{U}(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x)(\zeta_{i+1}-\zeta_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x\in(\zeta_i,\zeta_{i+1})} f(x)(\zeta_{i+1}-\zeta_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)\right)(\zeta_{i+1}-\zeta_i) \;\le\; \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)\right)\delta \\
&= \frac{\varepsilon}{\ell} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)\right) \;=\; \frac{\varepsilon}{\ell}\ell \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ nach Satz 6.2.14 von der Charakterisierung integrierbarer Funktionen, erster Teil, integrierbar. $\square$

Satz 6.3.3 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f \in C([a, b])$ und $\varphi \in F([a, b], \mathbb{R})$ sei integrierbar und $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. $f\varphi$ ist nach Satz 6.2.21 integrierbar. Es sei

$$\begin{aligned} m &= \inf_{x\in[a,b]} f(x) \\ M &= \sup_{x\in[a,b]} f(x). \end{aligned}$$

Dann ist für alle $x \in [a, b]$

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x).$$

Insbesondere folgt

$$m\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Daher gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\mu\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar. $\square$

Bemerkung 6.3.4 (Mittelwertsatz)
Explizit wollen wir auf den wichtigen Spezialfall $\varphi = 1$ hinweisen, der den Namen Mittelwertsatz rechtfertigt und für stetiges f die elementare Formel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(a - b)$$

für ein $\xi \in (a, b)$ liefert.

6.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt betrachten wir Integrale als Funktion der oberen Grenze. Wir untersuchen diese Funktion auf Differenzierbarkeit und beweisen einen fundamentalen Zusammenhang mit der Stammfunktion.

Satz 6.4.1 (Hauptsatz)
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f \in F([a,b],\mathbb{R})$ integrierbar. Dann existiert für jedes $x \in [a,b]$ das Integral

$$\int\limits_a^x f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Die Funktion

$$F(x) = \int\limits_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \tag{6.1}$$

ist auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig. Ist f im Punkt $x_0 \in (a,b)$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar und es gilt

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund von Satz 6.2.16 Aussage (1) die Existenz des Integrales

$$F(x) = \int\limits_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

für jedes $x \in [a,b]$ gesichert ist.
Für den Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit von F sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $M > 0$ eine Schranke für $|f|$, d. h.

$$\forall_{x\in[a,b]} : |f(x)| \le M$$

und $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Sei nun $x_1 < x_2$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gegeben. Nach Voraussetzung haben wir

$$F(x_1) = \int\limits_a^{x_1} f(s)\ \mathrm{d}s \text{ und } F(x_2) = \int\limits_a^{x_2} f(s)\ \mathrm{d}s = F(x_1) + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(s)\ \mathrm{d}s.$$

Daraus folgt dann

$$F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dies wird mit Korollar 6.2.18 durch

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(s)\,\mathrm{d}s \right| \leq M|x_1 - x_2| \leq M\delta = \varepsilon$$

abgeschätzt. Damit ist F gleichmäßig stetig.

Für die Differenzierbarkeit ist zu untersuchen ob der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

existiert. Wir haben

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi_h \in (x_0, x_0 + h)$ mit

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,\mathrm{d}s = hf(\xi_h).$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\xi_h \to x_0$ und wegen der Stetigkeit von f auch

$$f(\xi_h) \to f(x_0).$$

Damit ist der Satz gezeigt. □

Satz 6.4.2 (Hauptsatz II)
Ist $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ und G eine Stammfunktion von f, so gilt für $c, d \in [a,b]$

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = G(d) - G(c).$$

Beweis. Zunächst ist klar, die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

ist eine Stammfunktion von f ist und

$$\int_c^d f(s)\,\mathrm{d}s = F(d) - F(c).$$

Ist nun G eine beliebige andere Stammfunktion von f, so gibt es nach Satz 5.7.3 eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = F(x) + C.$$

Damit ist

$$G(d) - G(c) = F(d) + C - (F(c) + C) = F(d) - F(c).$$

□

Wir wollen noch die übliche Schreibweise erwähnen: Ist F die Stammfunktion von f, so schreibt man die Formel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

auch oft in der Form

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F\Big|_a^b.$$

Im fünften Kapitel hatten wir bereits eine Liste von Stammfunktionen angegeben, diese kann nun dazu benutzt werden, Integrale zu berechnen.

6.5 Integration von Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, wie sich Integration und Grenzwertbildung bei Funktionenfolgen vertragen.

Satz 6.5.1 (Integration und Grenzwerte)
Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset R([a,b],\mathbb{R})$ eine gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen mit $D(f_n) = [a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

Beweis. Wir zeigen:

1. f ist beschränkt.

2. Ober- und Unterintegral sind gleich.

3. Gleichung (6.2).

(1) f ist beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n > N$ impliziert: Für alle $x \in [a, b]$ ist $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Wähle $n > N$ fest. Da f_n beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$ mit $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist $|f(x)| \leq M + \varepsilon$, insbesondere ist f beschränkt.

(2) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $L = b - a$ und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n > N$ impliziert

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4L}.$$

Seien φ, ψ Treppenfunktion auf $[a, b]$ mit

$$\varphi \leq f_n \leq \psi$$

und

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der Integrierbarkeit von f_n gibt es solche Treppenfunktionen. Dann ist für alle $x \in [a, b]$ (bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen)

$$\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{4L} \leq f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4L} \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4L} \leq \psi(x) + \frac{\varepsilon}{4L}.$$

Weiterhin sind

$$\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{4L}, \psi(x) + \frac{\varepsilon}{4L}$$

Treppenfunktionen und

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{4L}\right)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{4} \\ \int_a^b \left(\psi(x) + \frac{\varepsilon}{4L}\right)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

und

$$\int_a^b \left(\psi(x) + \frac{\varepsilon}{4L}\right)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \left(\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{4L}\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit sind Ober- und Unterintegral gleich und f ist integrierbar.

(3) Zum Beweis von Gleichung (6.2) sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $L = b - a$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Dann ist für $n > N$

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{L}\,\mathrm{d}x = \varepsilon.$$

□

Beispiel 6.5.2 (Grenzwerte und einfache Konvergenz)
In diesem Beispiel wollen wir zeigen, dass einfache Konvergenz nicht ausreicht um die Reihenfolge von Integration und Konvergenz zu vertauschen. Wir betrachten die Folge von stetigen Funktionen auf $[0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x > \frac{1}{n} \\ 2n - 2n^2 x, & \text{für} \quad \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 2n^2 x, & \text{für} \quad x < \frac{1}{2n} \end{cases}.$$

Die Funktion konvergiert punktweise gegen 0, die Folge der Integrale

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

ist konstant, also ist

$$0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

Wir kommen nun zu einem Satz, der eine Aussage für die Vertauschbarkeit von Konvergenz und Differentiation macht. Allerdings ist diese Aussage etwas komplizierter als im Fall der Integration.

Satz 6.5.3 (Differenzierbarkeit und Grenzwerte)
Es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, die auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar sind, und deren Ableitungen auf $[a,b]$ stetig sind. Wir setzen voraus:

1. *Es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.*
2. *$\{f_n'\}$ ist eine gleichmäßig konvergente Folge (stetiger Funktionen) .*

Dann konvergiert die Folge $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in [a,b]$. Setze

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Die Funktion f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

für alle $x \in [a,b]$.

Beweis. Wir setzen $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. Dann ist g stetig, integrierbar und für alle x gilt

$$\int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)).$$

Damit existiert der Grenzwert rechts und es ergibt sich (mit der Vereinbarung $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Setze $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Nach Konstruktion ist f Stammfunktion der stetigen Funktion g, also differenzierbar und

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

□

Beispiel 6.5.4 (Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz)
Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

konvergiert auf jedem Intervall gleichmäßig gegen 0, jedoch ist die Folge der Ableitungen durch

$$f_n'(x) = \cos(nx)$$

gegeben. Diese konvergiert nicht gegen 0. An diesem Beispiel erkennt man, dass gleichmäßige Konvergenz einer Folge nicht die Vertauschbarkeit von Differentiation und Konvergenz impliziert.

6.6 Integrationsregeln

In diesem Abschnitt entwickeln wir Techniken zur praktischen Berechnung von Integralen bzw. Stammfunktionen. Aufgrund des Hauptsatzes ist klar, dass die analytische Berechnung von Integralen im wesentlichen auf das Auffinden von Stammfunktionen reduziert wird. Findet man eine Stammfunktion, so sagt man auch, dass das Integral in „geschlossener Form“ gelöst wird. Die erste Regel zeigt, wie sich Integrale unter Transformationen des Intervalls verhalten.

Satz 6.6.1 (Substitutionsregel)
Es sei $f \in F([a,b],\mathbb{R})$ integrierbar und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig, auf (c,d) differenzierbar mit stetiger Ableitung auf $[c,d]$. Dann gilt

$$\int\limits_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{c}^{d} (f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Wir beweisen diesen Satz zunächst für $f \in C([a,b])$ und injektivem φ, da dieser Spezialfall deutlich zeigt, warum diese Formel richtig sein muss. Sei F eine Stammfunktion von f, so gilt für die linke Seite

$$F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int\limits_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nun ist für $y \in (c,d)$ die Funktion $F(\varphi(\cdot))$ im Punkt y differenzierbar, da nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 6.4.1 die Stammfunktion F in jedem Punkt in (a,b) differenzierbar ist und wegen der Injektivität von φ der Punkt $\varphi(y) \in (a,b)$ liegt. Es gilt dann

$$(F\circ\varphi)'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y).$$

Auf $[c,d]$ ist also $F \circ \varphi$ Stammfunktion von $((f \circ \varphi)(y))\,\varphi'(y)$ und es ergibt sich aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung 6.4.1

$$F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int\limits_c^d ((f \circ \varphi)(y))\,\varphi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben die Behauptung.

Der Beweis für die allgemeine Aussage ist ein wenig komplizierter. Da f integrierbar ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen

$$\psi_1 \le f \le \psi_2$$

mit

$$\int\limits_a^b (\psi_2(x) - \psi_1(x))\,\mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass ψ_1, ψ_2 auf den gleichen Intervallen konstant sind. Sei $\zeta_0 < \zeta_1 \cdots < \zeta_n$ eine entsprechende Partition des Intervalls $[a,b]$. Sei φ wie oben mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ und oBdA $c < d$, ansonsten muss man das Argument leicht modifizieren. Wir nehmen nun an, φ sei injektiv. Dann gibt es (unter Ausnutzung des Zwischenwertsatzes) $c = \eta_0 < \eta_1 \cdots < \eta_n = d$ mit $\varphi(\eta_j) = \zeta_j$. Betrachte eine Treppenfunktion $\psi = \psi_{1,2}$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \psi(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \psi(\xi_j)(\zeta_{j+1} - \zeta_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \psi(\varphi(\tau_j))(\varphi(\eta_{j+1}) - \varphi(\eta_j)) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \psi(\varphi(\tau_j))\varphi'(\tau_j)(\eta_{j+1} - \eta_j)
\end{aligned}$$

In der letzten Umformung wurde der Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwendet, da $\psi \circ \varphi$ auf (η_i, η_{i+1}) differenzierbar ist. Beachte: In der zweiten Zeile kann ξ_j beliebig gewählt werden, da die Treppenfunktion auf dem Intervall konstant ist. Nun wird nach der Wahl von τ_j, die man nach Maßgabe des Mittelwertsatzes zu treffen hat, ξ_j so gewählt, dass $\varphi(\tau_j) = \xi_j$. Die letzte Gleichung ist gerade die Riemannsumme für $(\psi \circ \varphi)\varphi'$. Mit der Feinheit von der Zerlegung von $[a,b]$ geht auch die Feinheit der Zerlegung von $[c,d]$ gegen Null und die Behauptung ist gezeigt. Ist φ nicht injektiv, so muss man das Argument noch etwas ausführen. □

In diesem Satz haben wir zum zweiten Mal die Voraussetzung benötigt, die besagt, dass eine Funktion differenzierbar ist und die Ableitung stetig ist. Voraussetzungen dieses Typs werden wir noch oft brauchen, daher wird dafür ein Begriff geprägt.

Definition 6.6.2 (Stetig differenzierbar)
Eine differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, *wenn f' stetig ist. Wir nennen eine Funktion auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, wenn sie auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) stetig differenzierbar ist, und die Grenzwerte*

$$\lim_{x\to a,b,\ x\in(a,b)} f'(x)$$

existieren. Entsprechend definiert man k-mal stetig differenzierbare Funktionen.

Beispiel 6.6.3 (Substitutionsregel)

1. Mit $\varphi(s) = s + \tau$ wird aus

$$\int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(s+\tau)\,\mathrm{d}s.$$

2. Für stetig differenzierbares $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $0 \notin [\varphi(c), \varphi(d)]$ gilt

$$\log\left(\left|\frac{\varphi(d)}{\varphi(c)}\right|\right) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_c^d \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Satz 6.6.4 (Partielle Integration)
Es seien $f, g \in C([a,b])$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$ und der angegebene Satz folgt durch Integration dieser Gleichung. □

Beispiel 6.6.5 (Partielle Integration)

$$\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2\big|_a^b - \int_a^b \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 6.6.6 (Partielle Integration II)
Es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x\sin(x)\big|_a^b - \int_a^b \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x\sin(x)\big|_a^b - \mathrm{e}^x\cos(x)\big|_a^b - \int_a^b \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\int_a^b \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x\sin(x)\big|_a^b - \mathrm{e}^x\cos(x)\big|_a^b\right).$$

Eine wichtige Anwendung der partiellen Integration ist der folgende Satz, der auf Riemann zurückgeht.

Satz 6.6.7 (Riemann)
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Beweis. Wir wenden die Formel der partiellen Integration auf das gegebene Integral an und erhalten

$$\int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{f(x)\cos(kx)}{k}\Big|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f, f' sind diese Funktionen beschränkt, d. h. es gibt $M > 0, K > 0$ mit

$$|f(x)| < M, |f'(x)| < K \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Da cos auf $\mathbb{R}$ durch 1 beschränkt ist, hat man

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{k} + \frac{K(b-a)}{k}.$$

Daraus folgt sofort, dass der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

existiert und 0 ist. $\square$

Aufgabe 6.6.8

1. Für $t \in \mathbb{R}$, $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ und jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{1}{2}t)}.$$

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \text{ für } 0 < x < 2\pi.$$

Wir wollen uns nun mit der Integration rationaler Funktionen beschäftigen, dabei heißt eine Funktion *rational*, falls sie als Quotient zweier Polynome geschrieben werden kann. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

Beispiel 6.6.9 (Partialbruchzerlegung)
Es sei
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$
Wir schreiben
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}.$$
Daraus ergibt sich die Gleichung
$$A(1+x) + B(1-x) = 1$$
mit Lösung durch Koeffizientenvergleich
$$A = B \text{ und } A + B = 1.$$
Also ist
$$A = B = \frac{1}{2}.$$
Nun findet man eine Stammfunktion von f, indem man Stammfunktionen von
$$\frac{1}{2(1+x)} \text{ und } \frac{1}{2(1-x)}$$
angibt, also $\frac{1}{2}\log(|1+x|)$ bzw. $-\frac{1}{2}\log(|1-x|)$. Also ist die Stammfunktion von f für $x \neq \pm 1$ definiert durch
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\log(|1+x|) - \log(|1-x|)\right) + C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{|1+x|}{|1-x|}\right) + C.$$

Dieses Beispiel zeigt das prinzipielle Vorgehen zur Integration rationaler Funktionen, jedoch ist die allgemeine Situation etwas komplizierter. Eine allgemeine Theorie basiert auf einer Untersuchung von komplexen Polynomen. Wir skizzieren hier die Grundzüge. Wichtigstes Hilfsmittel ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra. Wir wollen ihn ohne Beweis angeben.

Satz 6.6.10 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes komplexe Polynom positiven Grades hat mindestens eine Nullstelle. Ist $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein komplexes Polynom und $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, so hat Q eine Darstellung der Form
$$Q(x) = (x-a)P(x)$$
und $1 + \operatorname{grad} P = \operatorname{grad} Q$.

Korollar 6.6.11 (Lineare Faktoren eines Polynoms)
Ein komplexes Polynom Q hat höchstens grad Q *Nullstellen und kann als Produkt von* grad Q *Faktoren der Form $(x-a)$ und einer komplexen Zahl geschrieben werden, d. h.*

$$Q(x) = q_0 \prod_{i=1}^{\operatorname{grad} Q} (x - a_i).$$

Natürlich kann ein Faktor mehrfach vorkommen.

Beweis. Folgt durch Induktion aus dem Fundamentalsatz der Algebra. □

Ein reelles Polynom zerfällt demzufolge über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren $x - a_i$. Dabei sind die a_i entweder reell oder komplex, diese treten dann als Paare konjugiert komplexer Linearfaktoren auf. Ist $a_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ so ist $(x - a_i)(x - \bar{a}_i) = x^2 - 2\operatorname{Re} a_i x + |a_i|^2$ ein reelles Polynom. Damit kann man den Fundamentalsatz der Algebra in einer reellen Form formulieren.

Satz 6.6.12 (Fundamentalsatz der Algebra, reelle Form)
Ist $Q(x)$ ein reelles Polynom, so hat Q eine Darstellung

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{j} Q_i(x),$$

wobei $Q_i(x)$ entweder linear oder quadratisch ist.

Zur Erinnerung: Für Polynome sind die aus der elementaren Zahlentheorie bekannten Konzepte Vielfaches, Teiler, ggT, kgV, teilerfremd, Division mit Rest sinnvoll. Die Rolle der Primzahlen wird von irreduziblen Polynomen übernommen, das sind solche, die sich nicht als Produkt von Polynomen kleineren Grades darstellen lassen. Die reelle Form des Fundamentalsatzes der Algebra besagt u. A., dass die irreduziblen Polynome linear oder quadratisch sind. Den größten gemeinsamen Teiler zweier Polynome findet man mit dem *euklidischen Algorithmus*. Wir stellen kurz gegenüber, dabei seien $p, q \in \mathbb{Z}$ und P, Q reelle Polynome.

Konzept	elementare Zahlentheorie	Polynom
Vielfaches	$q = kp, k \in \mathbb{Z}$	$P = K \cdot Q, K$ Polynom
Teiler	$q\|p : \exists k : kq = p$	$Q\|P : \exists K : KQ = P$
ggT	$k = \mathbf{ggT}(p,q), a\|p, a\|q \Rightarrow a\|k$	$K = \mathbf{ggT}(P,Q), A\|P, A\|Q \Rightarrow A\|K$
teilerfremd	$\mathbf{ggT}(p,q) = 1$	$\mathbf{ggT}(P,Q) \in \mathbb{R}$
Division Rest	$p = kq + r, 0 \le r < \|q\|$	$P = KQ + R, \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(Q)$

Satz 6.6.13 (Euklidischer Algorithmus)

1. *Gegeben seien zwei Zahlen* $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$. *Dann existieren endliche Zahlenfolgen* p_i, q_i, r_i *mit* $p_0 = p$, $q_0 = q$ *und* r_0 *der Rest der Division von* p *durch* q, *die induktiv definiert werden*

$$p_{i+1} = q_i, q_{i+1} = r_i, p_{i+1} = \alpha q_{i+1} + r_{i+1}, 0 \leq r_{i+1} < q_{i+1}.$$

Ist $m \in \mathbb{N}_0$ *minimal mit* $r_m = 0$, *so ist* $q_m = \mathbf{ggT}(p, q)$. *Induktiv findet man durch*

$$r_{i+1} = p_{i+1} - \alpha q_{i+1}$$

eine Darstellung von $\mathbf{ggT}(p, q)$ *in der Form*

$$\mathbf{ggT}(p, q) = mp + nq, m, n \in \mathbb{Z}.$$

2. *Gegeben seien zwei Polynome* P, Q, $\mathrm{grad}(Q) > 0$. *Dann existieren endliche Folgen von Polynomen* P_i, Q_i, R_i *mit* $P_0 = P$, $Q_0 = Q$ *und* R_0 *der Rest der Division von* P *durch* Q, *die induktiv definiert wird*

$$P_{i+1} = Q_i, Q_{i+1} = R_i, P_{i+1} = AQ_{i+1} + R_{i+1}, \mathrm{grad}(R_{i+1}) < \mathrm{grad}(Q_{i+1}).$$

Ist $m \in N$ *minimal mit* $R_m = 0$, *so ist* $Q_m = \mathbf{ggT}(P, Q)$. *Induktiv findet man durch*

$$R_{i+1} = P_{i+1} - AQ_{i+1}$$

eine Darstellung von $\mathbf{ggT}(P, Q)$ *in der Form*

$$\mathbf{ggT}(P, Q) = SP + TQ \textit{ mit Polynomen } S, T.$$

Beweis. Im ersten Fall ist r_i aufgrund der Konstruktion eine streng monoton fallende Folgen nichtnegativer ganzer Zahlen. Daher gibt es ein minimales m mit $r_m = 0$. Induktiv sieht man dass jeder gemeinsame Teiler von r_{i+1} und q_{i+1} auch ein Teiler von p_{i+1} ist und damit von p und q. Da r_{m-1} ein Teiler von q_{m-1} ist, teilt es p, q. Andererseits teilt jeder gemeinsame Teiler von p, q auch r_0 und damit r_m. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Die Darstellungsformel ist eine unmittelbare Konsequenz des Algorithmus.

Der Polynomfall ist eine Kopie des angegebenen Beweises und wird daher dem Leser/der Leserin überlassen. □

Beispiele sind hier sehr instruktiv, wirkliches Verständnis erwächst nur aus dem Rechnen von Beispielen.

Beispiel 6.6.14 (Euklidischer Algorithmus)

1. Wir betrachten den Fall $p = 141, q = 93$. Wir erhalten aus

$$\begin{aligned} 141 &= 1 \cdot 93 + 48 \\ 93 &= 1 \cdot 48 + 45 \\ 48 &= 1 \cdot 45 + 3 \\ 45 &= 15 \cdot 3, \end{aligned}$$

   den $\mathbf{ggT}(141, 93) = 3$ und die Darstellung erfolgt durch das Schema

$$\begin{aligned} 48 &= 141 - 93 \\ 45 &= 93 - (141 - 93) = 2 \cdot 93 - 141 \\ 3 &= 48 - 45 = (141 - 93) - (2 \cdot 93 - 141) = 2 \cdot 141 - 3 \cdot 93. \end{aligned}$$

2. Polynombeispiel: Es sei $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1$ und $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(X) &= Q(X)(X-1) + (-2X^2 + 2) \\ Q(X) &= (-2X^2 + 2)(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}) + 2(X+1) \\ -2X^2 + 2 &= (2X+2)(-X+1). \end{aligned}$$

   Also ist $X + 1$ der größte gemeinsame Teiler. Man erkennt die Produktzerlegung von $P(X) = (X-1)^2(X+1)^2$ und $Q(X) = (X+1)(X^2+1)$ und man findet (natürlich) den gleichen größten gemeinsamen Teiler.

Satz 6.6.15 (Partialbruchzerlegung)
Sei

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

eine rationale Funktion mit $\mathbf{ggT}(P, Q) = 1$. *Die Funktion* f *hat eine Darstellung*

$$f(x) = \sum_j H_j(x) + p(x),$$

wobei p *der polynomiale Anteil und* H_j *sogenannte Hauptteile sind, die die Form*

$$H_j(x) = \sum_{j,m} \frac{q_{j,m}(x)}{Q_j(x)^m}$$

mit irreduziblen Polynomen Q_j *und Polynomen* $q_{j,m}$ *mit* $\operatorname{grad} q_{j,m} < \operatorname{grad} Q_j$ *haben.*

Beweis. Wir schreiben

$$P(x) = p(x)Q(x) + R(x), \mathrm{grad}(R) < \mathrm{grad}(Q).$$

Damit hat f die Darstellung

$$f(x) = p(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

OBdA ist $\mathbf{ggT}(R, Q) \in \mathbb{R}$. p ist der polynomiale Anteil.
Wir betrachten den anderen Term

$$\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Sei Q_j ein irreduzibler Teiler von Q und s die maximale Potenz, so dass Q_j^s das Polynom Q teilt. Dann ist $Q = Q_j^s Q^1$ mit einem Polynom Q^1. Es gilt

$$\mathbf{ggT}(Q_j^s, Q^1) = 1.$$

Der euklidische Algorithmus liefert Polynome S, T mit

$$1 = SQ_j^s + TQ^1.$$

Damit löst man die Gleichung

$$\frac{1}{Q} = \frac{T}{Q_j^s} + \frac{S}{Q^1}.$$

Damit haben wir die rationale Funktion

$$\frac{RT}{Q_j^s} + \frac{RS}{Q^1}$$

zu betrachten. Eine einfache Induktion liefert die Darstellung von

$$RT = \sum_{i=1}^{\ell} \ell_i(x) Q_j^i + p_j \text{ mit } \mathrm{grad}\, p_j < \mathrm{grad}\, Q_j,\ \ell_i(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$

Bei einem linearen Q_j ist $\alpha_i = 0$. Division durch Q_j^s ergibt

$$\frac{RT}{Q_j^s} = \sum_{m=1}^{n_j} \frac{\ell_m(x)}{Q_j^m} + \frac{p}{Q_j^s},\ \mathrm{grad}\, P < \mathrm{grad}\, Q_j,\ \ell_m(x) = \alpha_m x + \beta_m.$$

Eventuell auftretende polynomiale Terme werden zum polynomialen Anteil hinzugenommen.
Da $\mathrm{grad}\, Q^1 < \mathrm{grad}\, Q$ kann die gleiche Methode für einen weiteren irreduziblen

Faktor angewendet werden. Induktion führt nach endlich vielen Schritten zur vollständigen Aufspaltung von Q in irreduzible Faktoren. □

Um einen vollständigen Überblick über die Integration rationaler Funktionen zu erhalten, müssen wir die Stammfunktionen der verbleibenden Terme angeben. Da wir Polynome bereits integrieren können und auch Terme der Form

$$\frac{\alpha}{x-\beta}$$

kein Problem darstellen, verbleiben zwei Typen von Integralen:

$$(1) \qquad \frac{1}{Q_j^m},\ Q_j\text{irreduzibel, vom Grad 1 oder 2,}$$

bzw.

$$(2) \qquad \frac{ax+b}{Q_j^m},\ Q_j\text{irreduzibel, vom Grad 2.}$$

Der zweite Fall lässt sich weiter vereinfachen: Da Q_j' ein Polynom vom Grad 1 ist, können wir bis auf Vielfache schreiben (und Vielfache sind bei der Integration kein Hindernis)

$$ax+b = Q_j' + c.$$

Damit wird

$$\frac{ax+b}{Q_j^m} = \frac{Q_j'}{Q_j^m} + \frac{c}{Q_j^m}.$$

Der zweite Ausdruck ist wieder vom Typ (1) (Grad 2), während der zweite durch die Substitution $t = Q_j(x)$ auf eine einfache Form zurückgeführt wird.

Damit bleibt nur noch die Integrale für diese Funktionen anzugeben. Für den Grad 1 ist dies eine einfache Substitution. Sei nun $Q_j = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 2 und $m > 1$. Mit $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ (Bedingung für Irreduzibilität) erhält man zunächst folgende Relation

$$\int_a^b \frac{1}{Q_j^m(x)}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{2\alpha x+\beta}{\Delta(m-1)Q_j^{m-1}}\right|_a^b + \frac{2m-3}{m-1}\frac{2\alpha}{\Delta}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{Q_j^{m-1}}.$$

Diese Formel erhält man aus folgenden Überlegungen

$$\begin{aligned}
Q_j(x) &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\
&= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \\
&= \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) \\
&= \frac{\Delta}{4\alpha}\left(\frac{4\alpha^2}{\Delta}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + 1\right) \\
&= \frac{\Delta}{4\alpha}(y^2 + 1)
\end{aligned}$$

für ein geeignet substituiertes y. Damit reicht es die Rekursionsformel für ein Polynom der Form $1 + y^2$ zu beweisen und dies wollen wir nun tun:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^m}\,\mathrm{d}y &= \int_a^b 1 \cdot \frac{1}{(1+y^2)^m}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{y}{(1+y^2)^m}\bigg|_a^b + m\int_a^b \frac{2y^2}{(1+y^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{y}{(1+y^2)^m}\bigg|_a^b + 2m\int_a^b \frac{y^2+1}{(1+y^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}y - 2m\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{y}{(1+y^2)^m}\bigg|_a^b + 2m\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^{m}}\,\mathrm{d}y - 2m\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$2m\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}y = \frac{y}{(1+y^2)^m}|_a^b + (2m-1)\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^m}\,\mathrm{d}y.$$

Auflösen und ersetzen von m durch $m-1$ ergibt

$$\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^m}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2(m-1)}\frac{y}{(1+y^2)^{m-1}}|_a^b + \frac{2m-3}{2m-2}\int_a^b \frac{1}{(1+y^2)^{m-1}\,\mathrm{d}y}.$$

Einsetzen ergibt die obige Rekursion. Damit bleibt das Integral für $m = 1$. Die Berechnung dieses Integrals ist eine schöne Anwendung der Substitutionsregel.

Man beachte, dass die Irreduzibilität von Q bedeutet, dass $4ac > b^2$. Wir betrachten nun das Integral (OBdA sei $a = 1$) von

$$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{x^2+bx+(\frac{b}{2})^2+c} = \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+c} = \frac{1}{(\frac{b}{2})^2((\frac{2x}{b})^2+\frac{2^2c}{b^2})}.$$

Wie oben reduziert man auf das Integral von $\frac{1}{1+y^2}$ und erhält den Arcustangens, einsetzen ergibt die Formel

$$\int_a^b \frac{1}{Q_j(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{\Delta}}\Big|_a^b.$$

6.7 Ausblick und π

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Zahl π befassen. Zunächst zeigen wir eine Reihendarstellung für π, danach diskutieren wir weitere verwandte Resultate, allerdings diese dann ohne Beweis. Wir beginnen mit einem einfachen Lemma.

Lemma 6.7.1 (Tangens von $\pi/4$)
Es gilt:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

und daher

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Beweis. Wegen $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4)$ (Symmetrie) und $\cos(-\pi/4) = \sin(-\pi/4+\pi/2) = \sin(\pi/4)$ gilt $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$. Dies impliziert $\tan(\pi/4) = 1$ und damit die Behauptung für die Umkehrfunktion. □

Damit ist es wünschenswert eine Reihenentwicklung für arctan zu erhalten um die Zahl π berechnen zu können.

Satz 6.7.2 (Reihendarstellung von arctan**)**
Die Funktion arctan *hat für* $x \in (-1,1)$ *eine Darstellung als Reihe in der folgenden Form*

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Beweis.

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ für } |x| < 1. \tag{6.3}$$

Dann ist arctan eine Stammfunktion der angegebenen Reihe mit $\arctan(0) = 0$. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{6.4}$$

unter der Annahme von Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Differentiation eine solche Stammfunktion ist und diese eindeutig ist, stellt die angegebene Reihe die Funktion $\arctan(x)$ dar. Wir wollen uns nun noch überlegen, dass tatsächlich die Reihe in Gleichung (6.4) eine Stammfunktion der Reihe in Gleichung (6.3) ist. Die beiden Reihen sind auf jeder kompakten Teilmenge von $(-1, 1)$ gleichmäßig konvergent. Dazu beachten wir, dass beide Reihen auf $(-1, 1)$ aufgrund des Leibniz-Kriteriums konvergent sind, daher der erste weggelasssene Term eine Abschätzung für den Fehler darstellt (vergleiche den Satz Leibniz-Kriterium 3.1.9) und dieser auf kompakten Teilmengen von $(-1, 1)$ gleichmäßig abgeschätzt werden kann.

Wir haben also auf jedem solchen Kompaktum die folgende Situation

$$\begin{array}{lcl} g_n & \to & f \text{ gleichmäßig} \\ g_n' & \to & k \text{ gleichmäßig} \end{array}$$

mit

$$g_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

In dieser Situation können wir den Satz 6.5.3 anwenden. Er besagt, dass f differenzierbar und die Ableitung von f gleich k ist. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ und ist bei $x = 0$ Null, also nach Satz 5.7.3 gleich arctan. □

Man beachte nochmals, dass die Reihe alternierend ist und die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, also hat man nach Leibniz Konvergenz und die im Beweis des Leibniz-Kriteriums angegebene Abschätzung (die man durch Zusammenfassung aufeinanderfolgender Glieder erhält) ergibt für $x \in (-1, 1)$ die Abschätzung

$$\left| \arctan(x) - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Da arctan und das Polynom stetig in 1 sind, gilt die Abschätzung auch für $x = 1$ und man hat

$$\left| \arctan(1) - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{1}{2j+1} \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Da $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ folgt der folgende Satz.

Satz 6.7.3 (Reihendarstellung von π)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

Diese Formel ist von überraschender Schönheit. Zur praktischen Berechnung von π modifiziert man diese. Um eine verbesserte Darstellung zu erhalten, benötigen wir das nachfolgende Lemma. Hier sehen wir zum ersten Mal die Bedeutung der verschiedenen Zweige der Umkehrfunktion.

Lemma 6.7.4 (Additionstheoreme für Tangens/Arcustangens)
Es gilt

1.
$$\tan(z + w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}.$$

2. *Für $xy < 1$ und $x > 0$ gilt für eine geeignete Zahl $s \in \mathbb{Z}$*
$$\arctan(x) + \arctan(y) = s\pi + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Beweis.

1. Wir schreiben für $z, w, z + w \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$$\begin{aligned} \tan(z+w) &= \frac{\sin(z+w)}{\cos(z+w)} \\ &= \frac{\sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)}{\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)} \\ &= \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}. \end{aligned}$$

2. Nun schreiben wir $z = \arctan(x) + a\pi$, $w = \arctan(y) + b\pi$, wobei wir beachten, dass a, b von z, w abhängen und erhalten
$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{x+y}{1-xy}.$$
Da $\tan \pi$ periodisch ist, spielen hier die Werte von a, b keine Rolle. Anwenden von arctan auf beiden Seiten liefert, unter Beachtung, dass
$$\arctan \circ \tan(z) = z + s\pi$$

$$\arctan(x) + \arctan(y) + s\pi = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Den Wert von s kann man dabei noch genauer spezifizieren.

□

Unter Ausnutzung der zweiten Aussage aus dem Lemma

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

ergeben sich einige einfache Formeln:

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

damit hat man eine etwas bessere Konvergenz als bei der Darstellung von $\frac{\pi}{4}$ mit der alternierenden Reihe der Inversen der ungeraden Zahlen. Man kann diesen Zugang noch systematisch verbessern: Für eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir $z = re^{\mathtt{i}\varphi}$ und schließen aus der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathtt{i}(\varphi_1+\varphi_2)},$$

und allgemeiner

$$\prod_{j=1}^{n} z_i = \prod_{j=1}^{n} r_j e^{\mathtt{i}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j}.$$

Nun ist

$$\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z_1 \cdots z_n)}{\mathrm{Re}(z_1 \cdots z_n)}\right) = \varphi_1 + \cdots + \varphi_n.$$

Insbesondere ergibt sich aus

$$\mathrm{Im}(z_1 \cdots z_n) = \mathrm{Re}(z_1 \cdots z_n),$$

dass $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = \frac{\pi}{4}$. Wir prüfen nach

$$(2+\mathtt{i})(3+\mathtt{i}) = 5 + 5\mathtt{i},$$

also

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Mit $(5+\mathtt{i})^4(-239+\mathtt{i}) = -114244 - 114244\mathtt{i}$ folgt dann die Formel von Machin[2]

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

[2] John Machin (1680–9.6.1751) war Professor für Astronomie in London.

Aus der Machinschen Formel und der Reihenentwicklung des arctan ergibt sich die folgende Formel für $\pi/4$

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}.$$

Machin berechnete damit 100 Stellen von π. Man rechnet damit nach

$$\pi = 3.1415926535 + R$$

mit $|R| < 10^{-11}$. Formeln für $\frac{\pi}{4}$, die man auf diese Weise erhält, nennt man *Machinsche Formeln.* Von Kikua Takano (1982) stammt die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\left(\frac{1}{49}\right) + 32\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right) + 12\arctan\left(\frac{1}{110443}\right).$$

Die wohl leistungsfähigste Formel stammt von Hwang Chien-Lih(2003),

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} \quad = \quad & 183\arctan\left(\frac{1}{239}\right) + 32\arctan\left(\frac{1}{1023}\right) - 68\arctan\left(\frac{1}{5832}\right) + 12\arctan\left(\frac{1}{113021}\right) \\ & -100\arctan\left(\frac{1}{6826318}\right) - 12\arctan\left(\frac{1}{33366019650}\right) \\ & +12\arctan\left(\frac{1}{43599522992503626068}\right)\end{aligned}$$

mit der 1241100000000 Stellen von π berechnet worden sind.

Eine andere überraschende Formel für π geht auf Ramanujan[3]

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{(1103 + 26390n)}{396^n}$$

zurück.
Die Frage der Bestimmung von π führt noch auf einen weiteren Fragenkomplex.

Definition 6.7.5 (Algebraische/Transzendente Zahl)
Eine irrationale reelle Zahl x heißt algebraisch, *wenn es ein ganzzahliges Polynom P gibt mit $P(x) = 0$. Ist eine Zahl nicht algebraisch, so nennt man sie* transzendent.

Es wurde lange Zeit vermutet, dass π transzendent ist, jedoch war kein Beweis in

[3]Srinivasa Ramanujan (22.12.1857–26.4.1920) war ein Autodidakt, der sich vornehmlich mit Zahlentheorie beschäftigte. Der englische Mathematiker G. Hardy lud ihn wegen seiner überraschenden Erkenntnisse ans Trinity College in Cambridge ein, wo er von 1914–1919 arbeitete. Er konnte Formeln und Reihen in erstaunlicher Weise umformen und entdeckte tiefliegende Zusammenhänge.

Sicht. Die Irrationalität von π wurde von Lambert[4] gezeigt, der bewies, dass für eine rationale Zahl x die Zahl $\tan(x)$ irrational ist, damit ist wegen $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ die Zahl π irrational.

Die Transzendenz von π geht auf Lindemann[5] zurück, der zeigte, ist $z \neq 0$ algebraisch, so ist e^z transzendent. Wegen $\mathrm{e}^{2\pi \mathtt{i}} = 1$ und da 1 nicht transzendent ist, folgt die Transzendenz von π.

[4] Johann Heinrich Lambert (26.8.1728–25.9.1777) stammt aus einfachen Verhältnissen und war Autodidakt. Er gab Entwicklungen für die hyperbolischen Winkelfunktionen an und zeigte damit die Irrationalität von π.

[5] Carl Louis Ferdinand Lindemann (12.4.1852–6.3.1939) promovierte bei Felix Klein, einem der bedeutenden deutschen Mathematiker, in Erlangen, lehrte lange Zeit an der Universität Königsberg. Er arbeitete in verschiedenen Gebieten, wie Astronomie, Molekularphysik, Differentialgeometrie, Zahlentheorie. Als seine bedeutendste Leistung gilt der Beweis der Transzendenz von π.

Index

Literaturverzeichnis

[1] M. Barner & F. Flohr. *Analysis I.* de Gruyter, 1974.

[2] C. Blatter. *Analysis I.* Springer Verlag, 1980.

[3] J. Dieudonné. *Grundzüge der modernen Analysis.* VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1972.

[4] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, J. Neukirch, A. Prestel & R. Remmert. *Zahlen*, Grundwissen Mathematik *1.* Springer Verlag, Heidelberg Berlin, 3. Auflage, 1992.

[5] K. Endl & W. Luh. *Analysis I.* AULA-Verlag, Wiesbaden, 1989.

[6] O. Forster. *Analysis 1.* Vieweg, Braunschweig, 9. Auflage, 2008.

[7] A. Friedman. *Foundations of Modern Analysis.* Holt Rinehart and Winston, 1972.

[8] K. Fritzsche. *Grundkurs Analysis 1.* Spektrum Akademischer Verlag, München, 2005.

[9] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1), 173-198, 1931.

[10] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* B. G. Teubner, Stuttgart, 15. Auflage, 2003.

[11] E. Hewitt & K. Stromberg. *Real and abstract analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1969.

[12] D. L. Johnson. *Elements of Logic via Numbers and sets.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[13] K. Königsberger. *Analysis I*, Springer Lehrbuch *8.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 4. Auflage, 2004.

[14] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, International Student Edition. International Student Edition. Mc Graw Hill, Inc, New York, 1976.

[15] W. Rudin. *Analysis. Transl. from the English by Martin Lorenz and Christian Euler. 3rd revised and improved ed.* München: R. Oldenbourg Verlag, 2005.