

# Höhere Analysis

Vorlesung

Reiner Lauterbach

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Universität Hamburg, WS 2015/2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>12 Integration im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>5</b>
12.1 Mengenalgebren . . . . .	6
12.2 Inhalt und Mass . . . . .	8
12.3 Die Lebesgue-Algebra . . . . .	18
12.4 Messbare Abbildungen . . . . .	23
12.5 Treppenfunktionen und ihr Integral . . . . .	27
12.6 Integrierbarkeit . . . . .	30
12.7 Konvergenzsätze . . . . .	38
12.8 Der Vergleich mit dem Riemann Integral . . . . .	43
12.9 Überblick . . . . .	50
<b>13 Anwendungen des Lebesgue-Integrals</b>	<b>51</b>
13.1 Räume integrierbarer Funktionen . . . . .	51
13.2 Transformationsformel und Koordinatenwechsel . . . . .	59
13.3 Der Satz von Fubini . . . . .	73
<b>14 Flächen</b>	<b>81</b>
14.1 Orientierung und Flächen . . . . .	81
14.2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten . . . . .	93
14.3 Tangentialräume . . . . .	101
14.4 Kompakta mit glattem Rand . . . . .	105
<b>15 Integralsätze</b>	<b>111</b>
15.1 Satz von Gauss . . . . .	111
15.2 Pfaffsche Formen . . . . .	118
15.3 Differentialformen höherer Ordnung . . . . .	129
15.4 Der Satz von Stokes . . . . .	149



# Einleitung

Die Vorlesung Analysis III baut auf den Vorlesungen Analysis I und Analysis II und natürlich auf die Lineare Algebra auf. In der Vorlesung werden wir teilweise dem Buch von Otto Forster, Analysis III [6] folgen. Für Kapitel 12 empfehle ich auch die Kapitel I, II aus dem sehr schönem Buch von Bauer [2]. Auch die Werke von Walter [17, 18, 19] und Pöschel [13, 14, 15] können für die Vorlesung gewinnbringend verwendet werden. Darüber hinaus gibt es eine ganze Reihe hervorragender Bücher zum Thema Analysis, ich möchte nur wenige nennen: [1, 3, 5, 8, 12, 11]. Ein hervorragendes Werk ist das Buch „Principles of Mathematical Analysis“ von Rudin [16], das auch als Taschenbuch erhältlich ist und als Begleitung zur Vorlesung gut geeignet ist. Nicht direkt als Begleitlektüre, jedoch als Nachschlagewerke für später bzw. als weiterführende Bücher zur Analysis möchte ich die Werke von Dieudonné, Friedman und Hewitt/Stromberg erwähnen [4, 7, 9]. Jetzt ist auch der Zeitpunkt gekommen, diese auch schon mal zu konsultieren. Es gibt dort viele bereichernde Diskussionen, Beispiele und natürlich auch weiterführendes Material.



# Kapitel 12

## Integration im $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel werden wir uns über Integration von Funktionen, die auf Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  definiert sind Gedanken machen. Am Ende von Kapitel 6 haben wir ja schon gesehen, wie man ausgehend vom Riemannsches Integralbegriff Integrale über Mengen der Form  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  definieren kann. Hier wollen wir allgemeiner vorgehen und auch Integrale über komplizierte Mengen definieren. Der Integralbegriff wird gleichzeitig neu gefasst und es werden auch bisher nicht integrierbare Funktionen integriert werden können, z. B. die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$ . Natürlich kann man eine solche allgemeine Integrationstheorie nicht ohne den entsprechenden Aufwand erhalten und wir werden einige Zeit benötigen um die entsprechenden Sätze beweisen zu können. Dabei wird sich zeigen, dass mit dem gleichen Aufwand auch Integrale über andere Mengen erklärt werden können. Dazu wird wieder einmal eine entsprechende Verallgemeinerung des Begriffsapparates notwendig.

### Inhalt

---

12.1 Mengenalgebren . . . . .	6
12.2 Inhalt und Mass . . . . .	8
12.3 Die Lebesgue-Algebra . . . . .	18
12.4 Messbare Abbildungen . . . . .	23
12.5 Treppenfunktionen und ihr Integral . . . . .	27
12.6 Integrierbarkeit . . . . .	30
12.7 Konvergenzsätze . . . . .	38
12.8 Der Vergleich mit dem Riemann Integral . . . . .	43
12.9 Überblick . . . . .	50

---

## 12.1 Mengenalgebren

Im Folgenden sei  $\Omega$  eine Menge und wir interessieren uns für gewisse Mengen von Teilmengen. Während für die Stetigkeit die Mengen der offenen, bzw. die Menge der abgeschlossenen Teilmengen eine große Rolle spielten, wollen wir uns hier mit Systemen von Teilmengen beschäftigen, die gewisse Operationen zulassen. Wir erinnern an die Definition 1.3.32 der Potenzmenge einer Menge als Menge aller ihrer Teilmengen.

### Definition 12.1.1 (Ring)

Es sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  eine Teilmenge der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  von  $\Omega$ .  $\mathfrak{R}$  heißt Ring (auf  $\Omega$ ), wenn  $\emptyset \in \mathfrak{R}$  und folgende Bedingungen erfüllt sind:  $X, Y \in \mathfrak{R}$  impliziert

1.  $X \cup Y \in \mathfrak{R}$ ,
2.  $X \setminus Y \in \mathfrak{R}$ .

### Aufgabe 12.1.2 (Durchschnitte)

In einem Ring  $\mathfrak{R}$  ist mit  $X, Y \in \mathfrak{R}$  auch  $X \cap Y \in \mathfrak{R}$ .

### Definition 12.1.3 (Algebra)

Ist  $\mathfrak{A}$  ein Ring und gilt zusätzlich  $\Omega \in \mathfrak{A}$ , so nennt man  $\mathfrak{A}$  eine Algebra.

### Aufgabe 12.1.4 (Charakterisierung einer Algebra)

Man zeige,  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist genau dann eine Algebra, wenn gilt: (1)  $\Omega \in \mathfrak{A}$ , (2)  $X \in \mathfrak{A}$  impliziert  $X^c \in \mathfrak{A}$  und (3) mit  $X, Y \in \mathfrak{A}$  ist auch  $X \cup Y \in \mathfrak{A}$ .

Es ist eine einfache Konsequenz der Definitionen, dass in Ringen und Algebren mit je endlich vielen Mengen auch deren Vereinigung bzw. deren Schnitte darin liegen, also hat man das folgende Lemma.

### Lemma 12.1.5 (endliche Vereinigungen und Durchschnitte)

Ist  $\mathfrak{A}$  ein Ring oder eine Algebra und sind  $X_1, \dots, X_n$  Elemente von  $\mathfrak{A}$  so sind auch

$$\begin{aligned} X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n &\in \mathfrak{A}, \\ X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n &\in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Wichtig ist dabei, dass wir uns auf endliche Vereinigungen bzw. Schnitte beschränkt haben. Will man dies erweitern auf unendliche Vereinigungen und Schnitte, so muss zumindest eine dieser Eigenschaften gefordert werden und dies macht den Begriff des  $\sigma$ -Ringes bzw. der  $\sigma$ -Algebra aus, den wir jetzt definieren wollen.

**Definition 12.1.6 ( $\sigma$ -Ring,  $\sigma$ -Algebra)**

Es sei  $\mathfrak{A}$  ein Ring oder eine Algebra. Gilt zusätzlich die Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathfrak{A},$$

so heißt  $\mathfrak{A}$  ein  $\sigma$ -Ring bzw. eine  $\sigma$ -Algebra.

Wir sammeln nun einige Eigenschaften von  $\sigma$ -Ringen, bzw.  $\sigma$ -Algebren.

**Satz 12.1.7 (Eigenschaften von  $\sigma$ -Algebren und Ringen)**

Es sei  $\Omega$  eine Menge und  $\mathfrak{A}$  ein  $\sigma$ -Ring oder eine  $\sigma$ -Algebra. Dann gilt

1. Sind für  $n \in \mathbb{N}$  die Mengen  $X_n \in \mathfrak{A}$ , so ist auch  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathfrak{A}$ .

2. Ist  $\Omega' \subset \Omega$  eine Teilmenge, so ist

$$\mathfrak{A}^{\Omega'} = \left\{ X \cap \Omega' \mid X \in \mathfrak{A} \right\}$$

ein  $\sigma$ -Ring bzw. eine  $\sigma$ -Algebra in  $\Omega'$ .

*Beweis.* 1. Sei  $X_n \in \mathfrak{A}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten die Menge

$$Z = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n^c \right)^c.$$

Nach der Definition von  $\sigma$ -Ringen bzw.  $\sigma$ -Algebren ist  $Z \in \mathfrak{A}$  und es ist leicht nachzuprüfen, dass  $Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$  ist. Man beachte, dass der angegebene Beweis nur für  $\sigma$ -Algebren korrekt ist, für  $\sigma$ -Ringe ist er geringfügig zu modifizieren.

2. Alle Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen. □

**Lemma 12.1.8 (Schnitte von  $\sigma$ -Algebren)**

Es seien  $\Omega$  und  $J$  Mengen. Für  $j \in J$  seien  $\mathfrak{A}_j$   $\sigma$ -Algebren auf  $\Omega$ , so ist

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{A}_j$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .

*Beweis.* Für alle  $j \in J$  gilt  $\emptyset, \Omega \in \mathfrak{A}_j$  und daher ist auch  $\emptyset, \Omega \in \mathfrak{A}$ . Entsprechendes gilt für die Differenzen und Vereinigungen von Mengen.  $\square$

**Lemma 12.1.9 (Existenz kleinster  $\sigma$ -Algebren)**

*Zu jeder Teilmenge  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  gibt es eine kleinste  $\sigma$ -Algebra, welche alle Mengen in  $\mathcal{E}$  beinhaltet.*

*Beweis.* Man betrachte die Menge  $J$  aller  $\sigma$ -Algebren  $\mathfrak{A}$  welche  $\mathcal{E}$  als Teilmenge beinhalten, also

$$J = \left\{ \mathfrak{A} \supset \mathcal{E} \mid \mathfrak{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \right\}.$$

Die Menge  $J$  ist nicht leer, denn

$$\mathcal{P}(\Omega) \in J.$$

Dann ist

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{\mathfrak{B} \in J} \mathfrak{B}$$

die gewünschte  $\sigma$ -Algebra.  $\square$

**Definition 12.1.10 (erzeugte  $\sigma$ -Algebra)**

*Die in Lemma 12.1.9 nachgewiesene kleinste  $\sigma$ -Algebra zu einer vorgegebenen Menge  $\mathcal{E}$  von Teilmengen, wird als die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra bezeichnet. Wir schreiben dafür  $\sigma(\mathcal{E})$ .*

**Definition 12.1.11 (Borel-Algebra)**

*Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\mathcal{O}$  die Menge der offenen Mengen in  $X$ . Dann wird die von  $\mathcal{O}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{O})$  als Borel-Algebra<sup>1</sup> bezeichnet.*

## 12.2 Inhalt und Maß

Die bisher definierten Mengensysteme sind Ausgangspunkt der Definitionen von Inhalt und Maß. Diese wiederum sind Funktionen, die auf solchen Mengensystemen definiert sind und jeder darin befindlichen Menge eine nichtnegative erweiterte reelle Zahl zuordnen, die wir dann als Inhalt bzw. als Maß bezeichnen werden.

<sup>1</sup>Émile Félix Edouard Justin Borel (7.1.1871–3.2.1956) war bedeutender französischer Mathematiker, der sich auch als Abgeordneter der Radikalsozialisten in der Politik betätigte. Seine mathematischen Leistungen betreffen die Analysis vor allem im Kontext der Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie.

**Definition 12.2.1 (Inhalt)**

Es sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathfrak{A}$  ein Ring auf  $\Omega$  und

$$\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \right\} \cup \infty$$

sei eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften

**I1**  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

**I2** für jede endliche Menge  $\{X_1, \dots, X_n\}$  von Mengen in  $\mathfrak{A}$  mit

$$X_i \cap X_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

gilt

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(X_i). \quad (12.1)$$

Dann wird  $\mu$  als Inhalt bezeichnet.

**Bemerkung 12.2.2 (Additivität)**

Der in Gleichung (12.1) dargelegte Sachverhalt wird als *Additivität* des Inhalts bezeichnet. Wesentlich ist dabei die **paarweise Disjunktheit** der beteiligten Mengen.

Wird die endliche Additivität des Inhalts durch die stärkere Forderung der abzählbar unendlichen Additivität ( $\sigma$ -Additivität) ersetzt, so bekommen wir einen neuen Begriff.

**Definition 12.2.3 (Prämaß)**

Es sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathfrak{A}$  ein Ring auf  $\Omega$  und  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$  sei eine Abbildung mit

**PM1**  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

**PM2** für jede abzählbare Menge  $\left\{ X_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  von Mengen in  $\mathfrak{A}$  mit

$$X_i \cap X_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \text{ und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathfrak{A} \text{ gilt}$$

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i). \quad (12.2)$$

Dann wird  $\mu$  als Prämaß bezeichnet.

Im folgenden Lemma werden einfache Eigenschaften eines Inhaltes gesammelt.

**Lemma 12.2.4 (Eigenschaften von Inhalt und Prämaß)**

Es sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathfrak{R}$  ein Ring auf  $\Omega$  und  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$  ein Inhalt.

1. Sind  $X, Y \in \mathfrak{R}$  so gilt

$$\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y).$$

2. Für  $X \subset Y \in \mathfrak{R}$  gilt

$$\mu(X) \leq \mu(Y).$$

3. Sind  $X \subset Y \in \mathfrak{R}, \mu(Y) < \infty$  gilt

$$\mu(Y \setminus X) = \mu(Y) - \mu(X).$$

4. Ist  $X_i \in \mathfrak{R}$ , für  $i \in \mathbb{N}$  und  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n X_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(X_i).$$

5. Für ein Prämaß gilt in der Situation von (4) unter der Annahme

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathfrak{R},$$

dass

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i).$$

*Beweis.* 1. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\bar{X} &= X \setminus (X \cap Y) \\ \bar{Y} &= Y \setminus (X \cap Y).\end{aligned}$$

Dann ist

$$X \cup Y = \bar{X} \cup \bar{Y} \cup (X \cap Y).$$

Dies ist eine disjunkte Vereinigung und wir schließen sofort

$$\mu(X \cup Y) = \mu(\bar{X}) + \mu(\bar{Y}) + \mu(X \cap Y).$$

Daraus folgt die erste Behauptung unmittelbar.

2. Diese Behauptung folgt aus  $\mu(Y \setminus X) \geq 0$ , der Additivität, vgl. Bemerkung 12.2.2 und  $\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X)$ .

3. Folgt direkt aus dem vorigen Schritt.

4. Wir setzen für  $j = 1, \dots, n$

$$Y_j = X_j \setminus \left( \bigcup_{k=j+1}^n X_k \right).$$

Dann ist  $\mu(Y_j) \leq \mu(X_j)$  und  $\bigcup_{j=1}^n X_j = \bigcup_{j=1}^n Y_j$ , die  $Y_j$  sind disjunkt und daher hat man

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n X_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n Y_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(Y_j) \leq \sum_{j=1}^n \mu(X_j).$$

5. Folgt durch Grenzübergang. □

**Bemerkung 12.2.5 (Isotonie, Subtraktivität und Subadditivität)**  
Eigenschaft (2) aus dem vorigen Lemma wird als *Isotonie*, Eigenschaft (3) als *Subtraktivität* und Eigenschaft (4) als *Subadditivität* bezeichnet.

**Definition 12.2.6 (Maß)**

Ist  $\mu$  ein Prämaß auf  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , so nennen wir  $\mu$  ein Maß. Das Tripel  $(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$  heißt in diesem Fall Maßraum. Ist  $\mu(\Omega) < \infty$  so nennen wir das Maß endlich und ebenso sprechen wir dann von einem endlichen Maßraum. Im Fall  $\mu(\Omega) = 1$  bezeichnet man den Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$  als Wahrscheinlichkeitsraum.

Bevor wir die spezielle Situation im  $\mathbb{R}^n$  betrachten wollen, werfen wir einen Blick auf den zentralen Satz, der die Konstruktion von Maßen aus einem Prämaß möglich macht.

**Satz 12.2.7 (Vom Prämaß zum Maß)**

Sei  $\Omega$  eine Menge und  $\mu$  ein auf einem Ring  $\mathfrak{R}$  auf  $\Omega$  definiertes Prämaß. Dann gibt es mindestens ein auf der von  $\mathfrak{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{R})$  definiertes Maß  $\tilde{\mu}$  welches  $\mu$  fortsetzt, d. h. für alle  $X \in \mathfrak{R}$  gilt

$$\mu(X) = \tilde{\mu}(X).$$

**Bemerkung 12.2.8 (Eindeutigkeit des Maßes?)**

Die Aussage kann u. U. präzisiert werden und auf Eindeutigkeit der Fortsetzung geschlossen werden, siehe z. B. Bauer [2]. Wir gehen auf die Eindeutigkeit nicht ein und kommen an der entsprechenden Stelle auf diese Bemerkung zurück.

Den Beweis wollen wir vorbereiten, indem wir den Begriff des äußeren Maßes einführen und zeigen, wie aus einem Prämaß ein äußeres Maß und aus einem äußeren Maß ein Maß gewonnen werden kann.

**Definition 12.2.9 (äußeres Maß)**

Eine Abbildung

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{erw}$$

heißt äußeres Maß, falls

**AM1**  $\mu^*(\emptyset) = 0;$

**AM2**  $X_1 \subset X_2 \Rightarrow \mu^*(X_1) \leq \mu^*(X_2);$

**AM3**  $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(X_n).$

**Bemerkung 12.2.10 (Potenzmenge und äußeres Maß)**

1. Wichtig ist hier, dass  $\mu^*$  auf ganz  $\mathcal{P}(\Omega)$  definiert ist.
2. Man beachte, dass  $\mu^*(X) \geq 0$  für alle  $X \subset \Omega$ . Denn  $\emptyset \subset X$  und (AM2) implizieren, dass  $0 = \mu^*(\emptyset) \leq \mu^*(X)$ .
3. Äußere Maße sind an sich nicht besonders interessant, ihre Bedeutung erlangen sie durch die nachfolgenden Konstruktionen, die auf Carathéodory<sup>2</sup> zurückgehen.

**Lemma 12.2.11 (vom Prämaß zum äußeren Maß)**

Gegeben sei eine Menge  $\Omega$ , ein Ring  $\mathfrak{R}$  auf  $\Omega$  und ein Prämaß  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$ . Dann gibt es ein äußeres Maß  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$ , welches  $\mu$  fortsetzt, d. h. für alle  $X \in \mathfrak{R}$  gilt

$$\mu^*(X) = \mu(X).$$

*Beweis.* Sei  $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ , wir betrachten die Familie von Mengen

$$\mathcal{D}(X) = \left\{ \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : X_n \in \mathfrak{R} \text{ und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \supset X \right\}.$$

<sup>2</sup>Constantin Carathéodory (13.9.1873–2.2.1950) ein hervorragender deutscher Mathematiker, der wesentliche Beiträge zur modernen Analysis entwickelte. Er erfand den Begriff des äußeren Maßes. Sein Schaffensbereich überschritt die Grenzen der Mathematik auch zur Physik.

Natürlich ist es möglich, dass für manche  $X$  eine solche abzählbare Überdeckung mit Elementen aus  $\mathfrak{A}$  nicht möglich ist, in diesem Fall ist  $\mathcal{D}(X) = \emptyset$  und dieser Fall wird in der folgenden Definition getrennt abgefangen. Wir setzen für  $X \subset \Omega$

$$\mu^*(X) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) \mid \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(X) \right\}, & \mathcal{D}(X) \neq \emptyset \\ \infty, & \mathcal{D}(X) = \emptyset \end{cases}.$$

Wir müssen nachprüfen, dass  $\mu^*$  ein äußeres Maß ist. Wir beginnen mit (AM1). Wir finden ein Element in  $\mathcal{D}(\emptyset)$ , nämlich die Folge

$$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } X_n = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit ergibt sich

$$\mu^*(\emptyset) \leq 0.$$

Da aber  $\mu$  nur nichtnegative Werte annimmt, ist  $\mu^*(X) \geq 0$  für alle  $X \in \mathcal{P}(\Omega)$  und damit ist  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

Der Nachweis von (AM2) besteht in der einfachen Beobachtung, dass im Fall  $\mathcal{D}(X_2) \neq \emptyset$  gilt, dass jede Überdeckung von  $X_2$  auch eine von  $X_1$  ist, also ist  $\mathcal{D}(X_2) \subset \mathcal{D}(X_1)$  und

$$\inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) \mid \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(X_1) \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) \mid \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(X_2) \right\}.$$

Der Nachweis der dritten Eigenschaft (AM3) ist etwas aufwendiger, allerdings nur unwesentlich komplizierter. Wir beginnen mit einer abzählbaren Familie von Mengen  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $X_n \subset \Omega$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und betrachten deren Vereinigung. OBDa nehmen wir an, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\mu^*(X_n) < \infty$ , denn ansonsten steht auf der rechten Seite der zu beweisenden Ungleichung ein Summand  $\infty$  und es ist nichts zu zeigen. Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gibt es, aufgrund der Definition 2.7.4 des Infimums zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von Mengen  $\{Y_m^{(n)}\}_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(X_n)$  mit

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(Y_m^{(n)}) < \mu^*(X_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Die Menge  $\left\{ Y_m^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$  ist abzählbar und demzufolge ist

$$\mathcal{D}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right) \neq \emptyset$$

und nach geeigneter Nummerierung ist die Folge der  $Y_m^{(n)}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  darin enthalten. Dann gilt (aufgrund der Definition des Infimums)

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(Y_m^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu^*(X_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(X_n) + \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.

Für die Fortsetzungseigenschaft wählen wir zu  $X \in \mathfrak{A}$  die Folge  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $X_1 = X$  und  $X_n = \emptyset$  für  $n > 1$ . Damit folgt

$$\mu^*(X) \leq \mu(X).$$

Nehmen wir an, es gebe eine Folge  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $X_n \in \mathfrak{A}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) < \mu(X)$ . Dann ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $X \cap X_n \in \mathfrak{A}$ ,  $X \cap X_n \subset X_n$  und daher ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \cap X_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) < \mu(X)$$

und andererseits ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \cap X_n) = X$$

und wegen Eigenschaft (5) aus Lemma 12.2.5 ist

$$\mu(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \cap X_n).$$

Damit hat man einen Widerspruch. □

Bevor wir Satz 12.2.7 beweisen können, benötigen wir noch einen wichtigen Satz, dessen Formulierung durch die Einführung eines weiteren Begriffes etwas klarer wird, wenn auch der neue Begriff zunächst nicht sehr anschaulich ist.

**Definition 12.2.12 (Messbarkeit)**

Sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$  ein äußeres Maß. Eine Teilmenge  $X \subset \Omega$  heißt  $\mu^*$ -messbar, wenn für jede Teilmenge  $Y \subset \Omega$  gilt

$$\mu^*(Y) = \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X^c \cap Y).$$

**Bemerkung 12.2.13 (Nachweis der Messbarkeit)**

Es gilt immer

$$\mu^*(Y) = \mu^*((X \cap Y) \cup (X^c \cap Y)) \leq \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X^c \cap Y).$$

Daher reicht es für den Nachweis der  $\mu^*$ -Messbarkeit einer Menge, die Ungleichung

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X^c \cap Y)$$

zu beweisen.

**Satz 12.2.14 ( $\mu^*$ -messbare Mengen bilden  $\sigma$ -Algebra)**

Ist  $\Omega$  eine Menge,  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$  ein äußeres Maß, so bildet die Menge  $\mathfrak{A}$  der  $\mu^*$ -messbaren Mengen eine  $\sigma$ -Algebra, und  $\mu^*$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{A}$  ist ein Maß  $\bar{\mu}$ .

*Beweis.* (i) Wir beginnen mit der Beobachtung, dass  $\mu^*(X) = 0$  impliziert, dass

$$\mu^*(Y \cap X) + \mu^*(Y \setminus X) \leq \mu^*(X) + \mu^*(Y) = \mu^*(Y).$$

Daher ist nach Bemerkung 12.2.13 die Menge  $X$  messbar. Da  $\mu^*(\emptyset) = 0$  ist  $\emptyset$  auch  $\mu^*$ -messbar, also  $\emptyset \in \mathfrak{A}$ .

(ii) Als nächstes zeigen wir: Aus  $X \in \mathfrak{A}$  folgt  $X^c \in \mathfrak{A}$ . Dies ist aber offensichtlich, denn die definierende Gleichung ist symmetrisch in  $X$  und  $X^c$ .

(iii) Im nächsten Schritt prüfen wir, ob mit  $X_1, X_2 \in \mathfrak{A}$  auch die Vereinigung  $X_1 \cup X_2$   $\mu^*$ -messbar ist. Für beliebiges  $Y$  gilt nun wegen der  $\mu^*$ -Messbarkeit von  $X_1$  und  $X_2$ , dass

$$\left. \begin{aligned} \mu^*(Y) &= \mu^*(Y \cap X_1) + \mu^*(Y \cap X_1^c) \\ \mu^*(Y \cap X_1^c) &= \mu^*((Y \cap X_1^c) \cap X_2) + \mu^*((Y \cap X_1^c) \cap X_2^c) \end{aligned} \right\}, \quad (12.3)$$

wobei wir in der zweiten Gleichung als „Testmenge“, die Menge  $Y \cap X_1^c$  eingesetzt haben. Wir beachten

$$(Y \cap X_1^c) \cap X_2^c = Y \cap (X_1^c \cap X_2^c) = Y \cap (X_1 \cup X_2)^c$$

und

$$((Y \cap X_1^c) \cap X_2) \cup (Y \cap X_1) = Y \cap (X_1 \cup X_2).$$

Indem wir die zweite Gleichung aus (12.3) in die erste einsetzen, erhalten wir

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap X_1) + \mu^*((Y \cap X_1^c) \cap X_2) + \mu^*((Y \cap X_1^c) \cap X_2^c)$$

und mit der vorstehenden Beobachtung

$$\begin{aligned} \mu^*(Y) &= \mu^*(Y \cap (X_1 \cup X_2)^c) + \mu^*(Y \cap X_1) + \mu^*((Y \cap X_1^c) \cap X_2) \\ &\geq \mu^*(Y \cap (X_1 \cup X_2)) + \mu^*(Y \cap (X_1 \cup X_2)^c). \end{aligned}$$

Damit ist  $X_1 \cup X_2$   $\mu^*$ -messbar.

Da  $X_1 \setminus X_2 = (X_1^c \cup X_2)^c$  ist, folgt dass die Differenz  $X_1 \setminus X_2$   $\mu^*$ -messbar ist, wenn  $X_1$  und  $X_2$  jeweils  $\mu^*$ -messbar sind.

Damit ist  $\mathfrak{A}$  eine Algebra, wir müssen noch zeigen, dass es tatsächlich eine  $\sigma$ -Algebra ist.

Wir beginnen mit einer Hilfsüberlegung. Wir wollen zunächst die folgende Aussage zeigen. Sei  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare, paarweise disjunkte Menge von Teilmengen von  $\mathfrak{A}$  und  $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ . Dann ist für jede Menge  $Z \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu^*(Z \cap S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap Y_n). \quad (12.4)$$

Der Beweis dieser Aussage erfolgt in zwei Schritten, zunächst wird eine entsprechende Aussage für eine endliche Folge von paarweise, disjunkten Mengen durch vollständige Induktion gezeigt, danach folgt der Beweis der eigentlichen Aussage durch Grenzübergang.

Wir beweisen durch vollständige Induktion mit  $S_n = \bigcup_{j=1}^n Y_j$  und  $Z \in \mathcal{P}(\Omega)$  die Gleichung

$$\mu^*(Z \cap S_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap Y_j).$$

Der Induktionsanfang ist offenkundig (also ist nichts zu zeigen). Der Induktionsschritt basiert auf der Annahme, dass unsere Behauptung für ein  $n \in \mathbb{N}$  gezeigt sei. Wir wollen diese nun für  $n+1$  nachweisen. Da bereits gezeigt ist, dass  $\mathfrak{A}$  eine Algebra ist, ist  $S_n$   $\mu^*$ -messbar. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap S_{n+1}) &= \mu^*((Z \cap S_{n+1}) \cap S_n) + \mu^*((Z \cap S_{n+1}) \cap S_n^c) \\ &= \mu^*(Z \cap S_n) + \mu^*(Z \cap Y_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap Y_j) + \mu^*(Z \cap Y_{n+1}) \quad (\text{Induktionsannahme}) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \mu^*(Z \cap Y_j) \end{aligned}$$

Damit ist die Induktion abgeschlossen und wir zeigen nun die Gleichung (12.4). Aufgrund der Monotonieeigenschaft (AM2) folgt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*(Z \cap S) \geq \mu^*(Z \cap S_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap Y_j).$$

Durch Grenzübergang ergibt sich

$$\mu^*(Z \cap S) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap Y_j).$$

Für die Gleichheit benötigen wir nun noch die umgekehrte Ungleichung, diese folgt sofort aus (AM3).

Wir zeigen nun die Messbarkeit von  $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ , falls jede Teilmenge  $Y_n$  messbar ist und je zwei disjunkt sind. Sei  $Z \subset \Omega$  beliebig. Dann gilt (da  $\mathfrak{A}$  eine

Algebra ist) für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mu^*(Z) &= \mu^*(Z \cap S_n) + \mu^*(Z \cap S_n^c) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap Y_j) + \mu^*(Z \cap S_n^c) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap Y_j) + \mu^*(Z \cap S^c) \text{ wegen (AM2)}.\end{aligned}$$

Durch Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap Y_j) + \mu^*(Z \cap S^c) = \mu^*(Z \cap S) + \mu^*(Z \cap S^c),$$

wobei die Gleichung (12.4) benutzt wurde. Also ist  $S$   $\mu^*$ -messbar.

Insgesamt folgt nun  $\mathfrak{A}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Wir müssen noch zeigen, dass die Einschränkung  $\bar{\mu}$  von  $\mu^*$  auf  $\mathfrak{A}$  ein Maß ist. Ein Maß ist nach Definition ein auf einer  $\sigma$ -Algebra definiertes Prämaß. Nun, nach Konstruktion ist die Einschränkung von  $\mu^*$  auf einer  $\sigma$ -Algebra definiert, die Einschränkung erfüllt offensichtlich  $\mu^*(\emptyset) = 0$  und (PM2) folgt aus der Gleichung (12.4), wenn wir  $Z$  durch  $S$  ersetzen.  $\square$

von Satz 12.2.7. Dies ist nun einfach eine Konsequenz aus Lemma 12.2.11 und Satz 12.2.14 und der Beobachtung  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ . Die Begründung der letzten Aussage kann wie folgt gegeben werden. Sei  $Y \in \mathcal{P}(\Omega)$  und  $X \in \mathfrak{A}$ . Wir müssen zeigen,  $X$  ist  $\mu^*$ -messbar, also

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap X) + \mu^*(Y \cap X^c).$$

OBdA nehmen wir an, dass  $\mu^*(Y) < \infty$ , ansonsten ist nichts zu zeigen. Also nehmen wir an  $\mathcal{D}(Y) \neq \emptyset$ . Sei  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(Y)$ . Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n \cap X) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n \cap X^c).$$

Beachte  $Y_n \cap X^c = Y_n \setminus X \in \mathfrak{A}$ . Die obige Gleichung folgt aus  $X, Y_n \in \mathfrak{A}$ , der endlichen Additivität von  $\mu$  und der absoluten Konvergenz der beteiligten Reihen. Nun ist die Folge

$$\{Y_n \cap X\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(Y \cap X)$$

und die Folge

$$\{Y_n \cap X^c\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(Y \cap X^c).$$

Nun ist  $Y_n = (Y_n \cap X) \cup (Y_n \cap X^c)$  eine disjunkte Vereinigung, also gilt

$$\mu(Y_n) = \mu(Y_n \cap X) + \mu(Y_n \cap X^c).$$

Daraus lesen wir ab

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(Y_n \cap X) + \mu(Y_n \cap X^c)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n \cap X) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n \cap X^c).$$

Damit folgt sofort

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n) \geq \mu^*(Y \cap X) + \mu^*(Y \cap X^c).$$

Da die rechte Seite unabhängig von der Folge  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist, folgt auch

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap X) + \mu^*(Y \cap X^c).$$

Damit ist  $X$   $\mu^*$ -messbar.

Wir setzen  $\tilde{\mu} = \bar{\mu}|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ . Um einzusehen, dass  $\tilde{\mu}(X) = \mu(X)$ , beobachten wir, dass für  $X \in \mathfrak{A}$  gilt  $\mu^*(X) = \mu(X)$ , und damit gilt für die Einschränkung  $\bar{\mu}$  von  $\mu^*$  auf  $\mathfrak{A}$  natürlich auch

$$\mu(X) = \bar{\mu}(X). \quad \square$$

Im ersten Schritt des Beweises von Satz 12.2.14 spielten spezielle Mengen eine Rolle, die hinreichend ist, sie mit einem eigenem Namen zu versehen.

**Definition 12.2.15 (Nullmenge)**

Eine Menge  $N$  mit  $\mu^*(N) = 0$  wird als Nullmenge bezeichnet.

## 12.3 Die Lebesgue-Algebra

Wir wollen eine Klasse von Mengen in  $\mathbb{R}^n$  auszeichnen, mit der die folgenden Überlegungen relativ leicht durchzuführen sind. Man könnte auch mit anderen Klassen von Mengen arbeiten, aber dann würden nicht unerhebliche technische Probleme auftreten.

**Definition 12.3.1 (Intervall)**

1. Für  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ , wenn gilt  $a_i < b_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .
2. Wir nennen eine Menge  $I$  in  $\mathbb{R}^n$  ein halboffenes Intervall, wenn es  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$I = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n \text{ gilt } a_i \leq x_i < b_i \right\}.$$

3. Eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen wird als elementare Menge bezeichnet.  $\mathfrak{E}$  bezeichne die Menge der elementaren Mengen.

**Bemerkung 12.3.2 (Bezeichnungen)**

Im Buch von Bauer [2] werden elementare Mengen als *Figuren* bezeichnet. Wir folgen mit unserer Nomenklatur Rudin [16]. Natürlich kann man auf gleiche Weise auch offene und abgeschlossene Intervalle in  $\mathbb{R}^n$  konstruieren.

**Lemma 12.3.3 (Eigenschaften elementarer Mengen)**

1. Jede elementare Menge lässt sich als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle schreiben.
2. Für zwei halboffene Intervalle  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}^n$  ist  $I_2 \setminus I_1$  eine elementare Menge.

*Beweis.* Siehe Übungen. □

**Definition 12.3.4 ( $\lambda(I)$ )**

1. Für ein halboffenes Intervall  $I = [\mathbf{a}, \mathbf{b})$  setzen wir

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

2. Ist  $E \in \mathfrak{E}$  mit  $E = \bigcup_{j=1}^r I_j$  mit  $I_j$  ein halboffenes Intervall für  $j \geq 1$ , und  $I_j \cap I_k = \emptyset$  für  $j \neq k$ . Wir setzen

$$\lambda(E) = \lambda(I_1) + \cdots + \lambda(I_r).$$

**Lemma 12.3.5 ( $\lambda$  ist Inhalt)**

$\lambda : \mathfrak{E} \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$  ist wohldefiniert und ein Inhalt.

*Beweis.* Siehe Übungen. □

**Lemma 12.3.6 ( $\lambda$  ist Prämaß)**

$\lambda : \mathfrak{E} \rightarrow \mathbb{R}_{erw}^+$  ist ein Prämaß.

*Beweis.* Siehe Übungen. □

Wir erinnern an die Menge der offenen Mengen in  $\mathbb{R}^n$ , die wir mit  $\mathcal{O}$  bezeichnen, in gleicher Weise schreiben wir  $\mathcal{C}$  für die Menge der abgeschlossenen Mengen und  $\mathcal{K}$  für die Menge der kompakten Mengen.

**Satz 12.3.7 (Borel-Algebren und andere erzeugende Mengen)**

Es gilt  $\sigma(\mathfrak{E}) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{K})$ .

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$  und damit

$$\sigma(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}).$$

Das letzten Gleichheitszeichen folgt aus der Definition der abgeschlossenen Mengen als Komplemente der offenen Mengen, vgl. Definition 4.1.1. Da für eine abgeschlossene Menge  $C \in \mathcal{C}$  gilt:

$C$  ist kompakt oder Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen, ist  $C \in \sigma(\mathcal{K})$  und wir haben

$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}).$$

Die Tatsache, dass ein abgeschlossenes, nicht kompaktes  $C$  als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen geschrieben werden kann, ist einfach:

Setze  $K_n = C \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq n \right\}$ . Dann ist  $K_n$  kompakt und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = C$ .

Für unseren Beweis fehlt jetzt nur noch die Aussage  $\sigma(\mathfrak{E}) = \sigma(\mathcal{K})$ . Wir zeigen zunächst

$$\sigma(\mathfrak{E}) \subset \sigma(\mathcal{K}).$$

Ist  $I = [\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ein nichtleeres halboffenes Intervall, gibt es eine Folge  $\{\mathbf{c}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathbf{c}_j \in I$  für alle  $j$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{c}_j = \mathbf{b}$ . Dann ist

$$[\mathbf{a}, \mathbf{c}_j] = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{c}_j \right\}$$

kompakt und

$$I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [\mathbf{a}, \mathbf{c}_j].$$

Also ist  $I \in \sigma(\mathcal{K})$  und damit  $\sigma(\mathfrak{E}) \subset \sigma(\mathcal{K})$ . Als letzter Schritt wird gezeigt:  $\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathfrak{E})$ . Dazu schreiben wir eine beliebige offene Menge als abzählbare Vereinigung halboffener Intervalle. Sei  $O \in \mathcal{O}$  offen. Dann ist die Menge der Punkte mit nur rationalen Koordinaten in  $O$  abzählbar, wir nummerieren diese Punkte durch eine Bijektion  $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^n \cap O$ . Sei

$$U_k = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \xi(k)\|_\infty < \min\{d, k\} \right\},$$

wobei  $d = \inf \left\{ \|\xi(k) - \mathbf{y}\|_\infty \mid \mathbf{y} \in O^c \right\}$  den Abstand in der  $\infty$ -Norm zum Komplement von  $O$  bezeichnet und  $d \in \mathbb{R}_{erw}^+$ . Offenkundig impliziert die Offenheit von  $O$ , dass  $d > 0$  und  $U_k \neq \emptyset$  ist. Dann ist  $O \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$  und jedes  $U_k$  kann von innen durch eine abzählbare Vereinigung halboffener Mengen ausgeschöpft werden, daher ist  $O \in \sigma(\mathfrak{E})$ .  $\square$

**Definition 12.3.8 (vollständiges Maß)**

*Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum. Diesen Raum nennt man vollständig, wenn für jedes Paar von Mengen  $(N, X)$  mit  $N \subset X$ ,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $\mu(X) = 0$  gilt,  $N \in \mathfrak{A}$ . Man spricht in diesem Fall auch von einem vollständigen Maß. Mengen  $X$  mit  $\mu(X) = 0$  werden auch als Nullmengen bezeichnet.*

**Bemerkung 12.3.9 (Nichteindeutigkeit)**

Die Fortsetzung dieses Prämaßes  $\lambda$  auf ein äußeres Maß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  ist nicht eindeutig.

**Definition 12.3.10 (Borel-Lebesguesches äußeres Maß, Lebesgue-Maß)**

1. Wir bezeichnen das durch die Konstruktion im Beweis von Lemma 12.2.11 konstruierte, äußere Maß als das Borel-Lebesguesche äußere Maß  $\lambda^*$ .
2. Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{L}$  der  $\lambda^*$ -messbaren Mengen nennt man die Lebesgue-Algebra.
3. Das aus  $\lambda^*$  konstruierte Maß  $\bar{\lambda}$  wird als das Lebesguesche Maß auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Es ist auf der Lebesgue-Algebra definiert.
4. Die Einschränkung  $\tilde{\lambda}$  auf die Borel-Algebra  $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathfrak{C})$  nennt man Borel-Lebesguesches Maß. Wollen wir die Dimension des Raumes berücksichtigen, so schreiben wir auch  $\mathfrak{B}^n$ , für die Borel-Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ .

Das Lebesgue-Maß ist vollständig, in der Tat erhält man die Lebesgue-Algebra durch Hinzunahme der  $\lambda^*$ -Nullmengen aus dem Borel-Lebesgueschen Maß.

**Satz 12.3.11 (Vollständigkeit)**

*Der Lebesguesche Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}, \bar{\lambda})$  ist vollständig.*

*Beweis.* Jedes Maß, das wie in Satz 12.2.14 angegeben aus einem äußeren Maß konstruiert wurde, ist vollständig, denn nach Teil (i) des Beweises von Satz 12.2.14 sind die Mengen  $X$  mit  $\mu^*(X) = 0$  messbar. Ist  $N \subset X$ ,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $\mu(X) = 0$ , so ist  $\mu^*(X) = 0$ , da  $\mu$  die Einschränkung von  $\mu^*$  auf  $\mathfrak{A}$  ist und damit ist auch  $\mu^*(N) = 0$ , nach (AM2).  $\square$

**Satz 12.3.12 (Lebesgue- und Borel-Algebra)**

Die Lebesgue-Algebra besteht genau aus den Borel-Mengen und den  $\lambda^*$  Nullmengen, d. h. jede Lebesgue-messbare Menge  $X$  lässt sich schreiben als eine Vereinigung einer Borel-Menge  $Y$  mit einer Menge  $F$  mit  $\lambda^*(F) = 0$ .

*Beweis.* Wir benutzen, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jeder Lebesgue-Menge  $X$  eine abgeschlossene Menge  $Z \subset X$  und eine offene Menge  $X \subset Y$  gibt, mit  $\lambda(Y \setminus Z) < \varepsilon$ . Dies wird in den Übungen gezeigt werden.

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann seien  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen abgeschlossener Mengen in  $X$  bzw. offener Obermengen von  $X$  mit

$$\tilde{\lambda}(Y_n \setminus Z_n) < \frac{1}{n},$$

$$Z_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

und

$$Y_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n.$$

Dann sind  $Z_0, Y_0$  in der Borel-Algebra  $\mathfrak{B}^n$  und  $X \setminus Z_0 \subset Y_0 \setminus Z_0$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Dann gilt

$$0 \leq \lambda^*(X \setminus Z_0) \leq \lambda^*(Y_0 \setminus Z_0) = \tilde{\lambda}(Y_0 \setminus Z_0) \leq \tilde{\lambda}(Y_n \setminus Z_n) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Damit ist  $\lambda^*(X \setminus Z_0) = 0$ . □

**Bemerkung 12.3.13 (Borel-Algebra und Lebesgue-Algebra)**

Tatsächlich ist die Borel-Algebra eine echte Teilmenge der Lebesgue-Algebra. Ohne Beweis vermerken wir, dass nicht einmal die Mächtigkeiten gleich sind.

**Satz 12.3.14 (Translationsinvarianz)**

Das Lebesgue-Maß  $\bar{\lambda}$  und das Lebesgue-Borel-Maß  $\lambda$  sind translationsinvariant, d. h. für Lebesgue-Menge (Borel-Lebesgue-Menge)  $X$  und jedes  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\bar{\lambda}(X) = \bar{\lambda}(X + \mathbf{a})$  ( $\lambda(X) = \lambda(X + \mathbf{a})$ ).

*Beweis.* Siehe Übungen. □

**Bemerkung 12.3.15 (Translationsinvariante Maße, Haar Maß)**

Translationsinvariante Maße spielen eine große Rolle in der Theorie der topologischen Gruppen. In sogenannten lokal-kompakten Gruppen kann man die Existenz von translationsinvarianten Borel-Maßen nachweisen, sie sind sogar eindeutig (bis auf multiplikative Vielfache) und werden als *Haar-Maße*<sup>3</sup> bezeichnet.

## 12.4 Messbare Abbildungen und Funktionen

Wir betrachten nun eine Menge  $\Omega$  mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ . Alle Abbildungen in diesem Abschnitt sind auf den jeweiligen Mengen überall definiert, d. h.  $T : \Omega \rightarrow \Omega'$  bedeutet u. a.  $D(T) = \Omega$ .

**Definition 12.4.1 (Messbare Mengen)**

1. Die Mengen  $X \in \mathfrak{A}$  werden messbar genannt, das Paar  $(\Omega, \mathfrak{A})$  Messraum.
2. Sind  $(\Omega, \mathfrak{A})$ ,  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  Messräume und  $T : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Abbildung, so heißt  $T$  messbar, wenn für jede messbare Menge  $X \in \mathfrak{A}'$  gilt

$$T^{-1}(X) \in \mathfrak{A}.$$

Diesen Sachverhalt drücken wir auch durch die symbolische Schreibweise

$$T : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\Omega', \mathfrak{A}')$$

aus. Wir sagen auch  $T$  ist  $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ -messbar.

**Bemerkung 12.4.2 (Methode der Konstruktion)**

Diese Konstruktion ähnelt der Definition der Stetigkeit, vgl. die Charakterisierung der Stetigkeit in Teil (1) von Satz 4.2.6, die ebenso zur Definition hätte herangezogen werden können.

**Satz 12.4.3 (Messbarkeit und erzeugende Mengen)**

Sind  $(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  Messräume,  $\mathcal{E}' \subset \mathfrak{A}'$ , so dass  $\sigma(\mathcal{E}') = \mathfrak{A}'$ . Dann ist  $T : \Omega \rightarrow \Omega'$  genau dann  $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ -messbar, wenn  $T^{-1}(E') \in \mathfrak{A}$  für alle  $E' \in \mathcal{E}'$ .

<sup>3</sup>Alfred Haar (11.10.1885–16.3.1933) war Mathematiker aus Ungarn und zeichnete sich durch seine Beiträge zur Variationsrechnung, Maßtheorie und Funktionalanalysis aus.

*Beweis.* Betrachte

$$\mathcal{A}' = \left\{ Y \in \mathcal{P}(\Omega') \mid T^{-1}(Y) \in \mathfrak{A} \right\}.$$

Das Mengensystem  $\mathcal{A}'$  hat folgende Eigenschaften  $\emptyset \in \mathcal{A}'$ ,  $\Omega' \in \mathcal{A}'$ , dies ist klar. Sind  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}'$ , so ist mit  $\mathfrak{A} \ni X_i = T^{-1}(Y_i)$ ,  $i = 1, 2$  und mit  $X_1 \cup X_2 \in \mathfrak{A}$  ist auch  $Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{A}'$ , denn  $X_1 \cup X_2 = T^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$ . Ganz entsprechend beweist man dies für abzählbare Vereinigungen und  $\mathcal{A}'$  ist eine  $\sigma$ -Algebra. Da für  $Y \in \mathcal{E}'$  gilt  $T^{-1}(Y) \in \mathfrak{A}$  ist  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}'$  und damit

$$\mathfrak{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subset \mathcal{A}'.$$

Also ist  $T$   $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ -messbar.

Umgekehrt ist  $T$   $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$ -messbar, so ist für alle  $Y \in \mathfrak{A}'$   $T^{-1}(Y) \in \mathfrak{A}$  und damit insbesondere  $T^{-1}(E') \in \mathfrak{A}$  für  $E' \in \mathcal{E}'$ .  $\square$

#### Beispiel 12.4.4 (Messbarkeit)

1. Sind  $(\Omega, \mathfrak{A})$ ,  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  Messräume und ist  $T : \Omega \rightarrow \Omega'$  konstant, so ist  $T$  messbar. (Dies sollte offensichtlich sein.)
2. Ist  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig, so ist  $T$   $\mathfrak{B}^n - \mathfrak{B}^m$  messbar. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen offen sind (Satz 4.2.6), der Tatsache, dass  $\mathfrak{B}^m = \sigma(\mathcal{O})$  ist und Satz 12.4.3.

#### Satz 12.4.5 (Kriterium der Messbarkeit)

Sind  $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$  für  $i = 1, 2, 3$  Messräume und für  $i = 1, 2$   $f_i : \Omega_i \rightarrow \Omega_{i+1}$   $\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_{i+1}$ -messbar, so ist  $f_2 \circ f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_3$   $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3$ -messbar.

*Beweis.* Folgt sofort aus der Definition.  $\square$

#### Satz 12.4.6 (Kriterium für reellwertige Funktionen)

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein Messraum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist genau dann  $f$   $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$ -messbar, wenn eine der folgenden (gleichwertigen) Bedingungen erfüllt ist:

$$\text{für jedes } a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \left\{ x \in \Omega \mid f(x) > a \right\} \in \mathfrak{A}$$

$$\text{für jedes } a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \left\{ x \in \Omega \mid f(x) \geq a \right\} \in \mathfrak{A}$$

$$\text{für jedes } a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \left\{ x \in \Omega \mid f(x) < a \right\} \in \mathfrak{A}$$

$$\text{für jedes } a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \left\{ x \in \Omega \mid f(x) \leq a \right\} \in \mathfrak{A}.$$

*Beweis.* Offenbar sind die angegebenen Bedingungen notwendig, denn die Mengen  $X_a = \{r \in \mathbb{R} \mid r > a\}$  (und entsprechend für die anderen) sind Borel-Mengen und damit ist es notwendig für die Messbarkeit, dass die entsprechenden Urbilder messbar sind.

Es bleibt zu zeigen, dass die angegebenen Bedingungen hinreichend sind. Es ist leicht zu sehen, dass jede für jede der angegebenen Mengensysteme  $\mathcal{X}_a = \{X_a \mid a \in \mathbb{R}\}$  gilt  $\sigma(\mathcal{X}_a) = \mathfrak{B}^1$ . Da Vereinigungsbildung, Komplementbildung und Durchschnittsbildung unter der  $f^{-1}$  erhalten bleiben, folgt der Satz.  $\square$

Oft will man Funktionen zulassen, die nach  $\mathbb{R}_{erw}$  abbilden. In diesem Fall muss die Definition der Messbarkeit der Funktion leicht modifiziert werden. Wir nutzen dazu die eben gemachten Aussagen und schreiben die naheliegende Verallgemeinerung.

**Definition 12.4.7 (Messbarkeit von Funktionen nach  $\mathbb{R}_{erw}$ )**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein Messraum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{erw}$  heißt messbar, wenn für jedes  $a \in \mathbb{R}$  die Menge

$$\{x \in \Omega \mid f(x) > a\}$$

messbar ist.

**Bemerkung 12.4.8 (Kriterien für  $\mathbb{R}_{erw}$ -wertige Funktionen)**

Man überzeugt sich leicht, dass eine Funktion nach  $\mathbb{R}_{erw}$  genau dann messbar ist, wenn  $f^{-1}(\infty)$  und  $f^{-1}(-\infty)$  messbar sind und das Urbild jeder Teilmenge der Form  $(a, \infty)$  messbar ist.

**Satz 12.4.9 (Messbarkeit der Betragsfunktion)**

Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -messbar, so ist auch  $|f|$  im gleichen Sinne messbar. Eine entsprechende Aussage gilt für Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{erw}$ .

*Beweis.* Die Menge

$$\{x \in \Omega \mid |f(x)| > a\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \cup \{x \in \Omega \mid f(x) < -a\}$$

ist als Vereinigung zweier messbarer Mengen messbar. Damit haben wir die erste Aussage gezeigt, auch die zweite wird auf ähnliche Weise bewiesen.  $\square$

**Satz 12.4.10 (Messbarkeit von Suprema/Infima)**

Ist  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge  $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -messbarer Funktionen, so sind auch die Funktionen  $g, h$  mit

$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

im gleichen Sinne messbar. Gleiches gilt natürlich auch für das Infimum bzw. den Limesinferior.

Entsprechende Aussagen gelten für messbare Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\text{erw}}$ .

*Beweis.* Wir untersuchen die Menge

$$\left\{ x \in \Omega \mid g(x) > a \right\}$$

auf Messbarkeit. Natürlich ist  $g(x) > a \iff \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) > a$ , also ist

$$\left\{ x \in \Omega \mid g(x) > a \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \Omega \mid f_n(x) > a \right\}.$$

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist die letztgenannte Menge messbar und damit auch die abzählbare Vereinigung.

Für die zweite Aussage setzen wir

$$g_n(x) = \sup_{m > n} f_m(x)$$

und

$$h(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n(x).$$

Dann folgt die Aussage aus der Aussage über die Messbarkeit des Supremums.  $\square$

Eine Spezialisierung der bisher gezeigten Aussagen ergibt das folgende Korollar.

**Korollar 12.4.11 (Messbarkeit-Kriterien)**

Es seien  $f, g, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}^1$ -messbare Funktionen  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind die folgenden Funktionen im gleichen Sinne messbar.

1.  $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$
2.  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , falls dieser Grenzwert existiert.

**Satz 12.4.12 (Hintereinanderausführung)**

Sind  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}^1$ -messbar und ist  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $h$  definiert durch

$$h(x) = F(f(x), g(x))$$

$\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -messbar.

*Beweis.* Natürlich reicht es zu zeigen, dass das Urbild  $U = h^{-1}(V)$  einer offener Menge  $V \subset \mathbb{R}$  in  $\mathfrak{A}$  liegt.  $F$  ist stetig, daher ist nach Satz 4.2.6  $F^{-1}(V)$  offen in  $\mathbb{R}^2$  und demzufolge als abzählbare Vereinigung offener achsenparalleler Intervalle  $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  darstellbar. (Dazu betrachte man einfach die Menge  $Q = \mathbb{Q}^2 \cap F^{-1}(V)$ , welche abzählbar ist und betrachte die Menge der Intervalle  $\left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q, \mathbf{a} < \mathbf{b}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset F^{-1}(V) \right\}$ , welche demzufolge ebenfalls abzählbar ist und  $F^{-1}(V)$  überdeckt, denn ist  $\mathbf{x} \in F^{-1}(V)$ , so gibt es wegen der Offenheit von  $F^{-1}(V)$  ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset F^{-1}(V)$ . Natürlich gibt es in  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$  Punkte  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}^2$  mit  $\mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}$  und  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset F^{-1}(V)$ .) Für jedes solche Intervall  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathbb{R}^2$  sind die Mengen

$$\left\{ x \in \Omega \mid a_1 < f(x) < b_1 \right\} \text{ und } \left\{ x \in \Omega \mid a_2 < g(x) < b_2 \right\} \in \mathfrak{A}.$$

Insbesondere ist

$$\left\{ x \in \Omega \mid a_1 < f(x) < b_1 \right\} \cap \left\{ x \in \Omega \mid a_2 < g(x) < b_2 \right\} \in \mathfrak{A}.$$

Da die abzählbare Vereinigung dieser Mengen wieder in  $\mathfrak{A}$  liegt, ist der Satz gezeigt.  $\square$

**Korollar 12.4.13 (Summen messbarer Funktionen)**

Sind  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}^1$  messbar, so gilt dies auch für  $f + g$ ,  $fg$ .

## 12.5 Treppenfunktionen und ihr Integral

Wir beginnen mit der Wiederholung eines Begriffes, der schon in der Integration reeller Funktionen eine Rolle spielte.

**Definition 12.5.1 (Treppenfunktion)**

Es sei  $\Omega$  eine Menge und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Nimmt  $f$  nur endlich viele Werte an, so sprechen wir von einer Treppenfunktion.

Man vergleiche diese Definition mit der aus Definition 6.1.6. In Teilmengen höher dimensionaler Räume wird natürlich die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Treppenfunktion kompliziert aussehen und es reicht nicht die Punkte einer Zerlegung getrennt zu betrachten. Daher jetzt die neue etwas allgemeinere Definition. Spezielle Treppenfunktionen sind solche, die nur die Werte 0, 1 annehmen.

**Definition 12.5.2 (Charakteristische Funktion)**

Die charakteristische Funktion einer Menge  $X \subset \Omega$  ist die Funktion

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x \notin X \end{cases}$$

**Lemma 12.5.3 (Messbarkeit reellwertiger Treppenfunktionen)**

Ist  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein Messraum, so ist eine Treppenfunktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$ -messbar, wenn für die Werte  $c_1, \dots, c_r$  von  $f$  gilt

$$A_k = \left\{ x \in \Omega \mid f(x) = c_k \right\} \in \mathfrak{A}.$$

*Beweis.* Klar! □

**Satz 12.5.4 (Approximation durch Treppenfunktionen)**

Zu jeder Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es eine Folge  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen, so dass

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

als Grenzwert von Treppenfunktionen geschrieben werden. Ist  $f$  messbar, so können die Funktionen  $g_n$  messbar gewählt werden. Für  $f \geq 0$  kann die Folge monoton steigend gewählt werden.

*Beweis.* Für  $f \geq 0$  und für  $n \in \mathbb{N}$  und  $i = 1, \dots, (n-1)2^n$  schreiben wir

$$X_{i,n} = \left\{ x \in \Omega \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$

und

$$Y_n = \left\{ x \in \Omega \mid |f(x)| > n \right\}.$$

Wir setzen

$$g_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{X_{i,n}} + n \chi_{Y_n}.$$

Dann gilt für  $x \in \Omega$  offenbar  $g_n(x) \rightarrow f(x)$ . Für messbares  $f$  sind die Mengen  $X_{i,n}$  bzw.  $Y_n$  messbar, also ist  $g_n$  messbar.

Hat  $f$  wechselnde Vorzeichen, so setzen wir  $f = f^+ - f^-$  (mit der Bezeichnung von Korollar 12.4.11). Den ersten Teil des Argumentes wenden wir dann auf die beiden Funktionen  $f^+$ ,  $f^-$  an und erhalten die allgemeine Aussage.  $\square$

**Definition 12.5.5 (Integrierbarkeit von Treppenfunktionen)**

Ist  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$ -messbare Treppenfunktion mit Werten  $c_1, \dots, c_k$ , wobei  $Z \in \mathfrak{A}$  sei. Ist  $X_i = f^{-1}(c_i) \cap Z$  und für alle  $c_i \neq 0$   $\mu(X_i) < \infty$ , so nennen wir  $f$  über  $Z$  integrierbar und setzen das Integral als

$$\int_Z f d\mu = \sum_{i=1}^k c_i \mu(X_i).$$

Im weiteren werden wir statt  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^1$ -messbar immer nur den Begriff messbar gebrauchen.

**Satz 12.5.6 (Summen integrierbarer Treppenfunktionen)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und es sei  $Z \in \mathfrak{A}$  messbar. Es seien  $f, g : Z \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Treppenfunktionen. Dann gilt

1.  $f + g$  ist eine integrierbare Treppenfunktion und es gilt die folgende Gleichung

$$\int_Z (f + g) d\mu = \int_Z f d\mu + \int_Z g d\mu.$$

2.  $fg$  ist eine integrierbare Treppenfunktion.
3. Ist  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so ist  $\lambda f$  integrierbare Treppenfunktion und es gilt

$$\int_Z (\lambda f) d\mu = \lambda \int_Z f d\mu.$$

*Beweis.* Man prüft die verschiedenen Bedingungen einfach nach.  $\square$

**Beispiel 12.5.7 (Integrierbarkeit der charakteristischen Funktion von  $\mathbb{Q}$ )**

$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Treppenfunktion, sie ist messbar und integrierbar. Die Messbarkeit folgt aus der von  $\mathbb{Q}$  und die Integrierbarkeit aus der Tatsache, dass  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ .

**Lemma 12.5.8 (Wohldefiniertheit des Integrales von Treppenfunktionen)**

Es seien  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  und  $\{\beta_1, \dots, \beta_t\}$  zwei endliche Mengen von reellen Zahlen,  $\{X_i \mid i = 1, \dots, s\}$ ,  $\{Y_j \mid j = 1, \dots, t\}$  zwei Mengen von messbaren, paarweise disjunkten Mengen im Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  mit den Eigenschaften:  $\mu(X_i) = \infty$  impliziert  $\alpha_i = 0$  und entsprechend  $\mu(Y_j) = \infty$  impliziert  $\beta_j = 0$ . Sind die beiden Funktionen

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \chi_{X_i} = \sum_{j=1}^t \beta_j \chi_{Y_j}$$

gleich, so gilt

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \mu(X_i) = \sum_{j=1}^t \beta_j \mu(Y_j).$$

*Beweis.* Siehe Übungen. □

## 12.6 Integrierbarkeit

Wir kommen jetzt dazu das Integral für größere Klassen von Funktionen zu definieren.

**Definition 12.6.1 (Integrierbarkeit nichtnegativer Funktionen)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{erw}$ ),  $f \geq 0$  und messbar. Sei  $X \in \mathfrak{A}$ .  $f$  heißt integrierbar über  $X$ , wenn jede messbare Treppenfunktion  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \varphi \leq f$  integrierbar ist und

$$\sup \left\{ \int_X \varphi d\mu \mid 0 \leq \varphi \leq f \text{ und } \varphi \text{ ist integrierbar} \right\} < \infty.$$

Als Lebesgue-Integral von  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$  messbar über  $X$  setzen wir

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g d\mu \mid 0 \leq g \leq f \text{ und } g \text{ ist integrierbare Treppenfunktion} \right\},$$

wobei die Ungleichheitszeichen punktweise gemeint sind.

**Bemerkung 12.6.2 (Wert des Integrales)**

Natürlich ist für nichtnegatives messbares  $f$

$$\int_X f d\mu \in \mathbb{R}_{erw}^+,$$

wobei der Wert  $\infty$  zugelassen (und) möglich ist.

Es bleibt noch das Integral für Funktionen nichtkonstanten Vorzeichens zu definieren.

**Definition 12.6.3 (Integrierbarkeit)**

Es sei  $f = f^+ - f^-$ , wie in Korollar 12.4.11. Wir setzen für  $X \in \mathfrak{A}$  im Falle, dass mindestens einer der Werte

$$\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$$

nicht unendlich ist, dass also gilt

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \text{ oder } \int_X f^- d\mu < \infty$$

den Wert des Integrales in  $\mathbb{R}_{erw}$  fest als

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Sind  $f^+$ ,  $f^-$  beide integrierbar, so nennen wir  $f$  integrierbar.

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum. Für die Menge der integrierbaren Funktionen auf  $X \subset \Omega$ ,  $X \in \mathfrak{A}$  schreiben wir  $\mathcal{L}(X, \mu)$ , ist es vom Kontext klar, welches Maß  $\mu$  gemeint ist, so schreiben wir auch  $\mathcal{L}(X)$ .

**Bemerkung 12.6.4 (Betrag)**

Aufgrund der Definitionen findet man sofort:

$$f \text{ ist integrierbar} \iff |f| \text{ ist integrierbar.}$$

**Satz 12.6.5 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrales)**

1. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und beschränkt auf  $X \subset \Omega$ ,  $\mu(X) < \infty$ , so gilt  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ .

2. Genauer gilt: Sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und gilt

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ für alle } x \in X$$

und seien die anderen Voraussetzungen wie in (1), so gilt

$$\alpha\mu(X) \leq \int_X f \, d\mu \leq \beta\mu(X).$$

3. Sind  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar,  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mu)$  und

$$f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in X,$$

so ist

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

4. Ist  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , so ist  $cf \in \mathcal{L}(X, \mu)$  und

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu.$$

5. Gilt  $\mu(X) = 0$ ,  $f$  messbar, so ist  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$  und

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

6. Ist  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ ,  $Y \subset X$  messbar, so ist  $f \in \mathcal{L}(Y, \mu)$  und es gilt für  $f \geq 0$

$$\int_Y f \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

*Beweis.* 1. Wir schreiben  $f = f^+ - f^-$  und zeigen, dass die beiden Funktionen  $f^+, f^-$  endliche Integrale auf  $X$  besitzen. Da  $f$  beschränkt ist, existiert eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq f^+(x) \leq K$ ,  $0 \leq f^-(x) \leq K$  für alle  $x \in X$ . Ist  $g$  eine Treppenfunktion mit  $0 \leq g \leq f^+$ , so sind alle von Null verschiedenen Bildwerte  $c_1, \dots, c_r$  von  $g$  höchstens  $K$ , also  $c_j \leq K$ ,  $j = 1, \dots, r$  und mit

$X_i = g^{-1}(c_i) \cap X$   $i = 1, \dots, r$  erhält man eine endliche disjunkte Vereinigung von  $X$  mit  $\sum_{i=1}^r \mu(X_i) = \mu(X)$ . Also ist

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{i=1}^r c_i \mu(X_i) \leq \sum_{i=1}^r K \mu(X_i) = K \sum_{i=1}^r \mu(X_i) = K \mu(X).$$

Die rechte Seite hängt nicht von  $g$  ab, also bleibt diese Schranke auch für das Supremum bestehen.

Den gleichen Schritt wendet man auf  $f^-$  an. Dann ergibt sich

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \leq \int_X f^+ \, d\mu \leq K \mu(X).$$

2. Offensichtlich ist die Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \alpha$  eine Treppenfunktion auf  $\Omega$  und für  $x \in X$  gilt  $g(x) \leq f(x)$ . Also ist im Falle  $\alpha \geq 0$  die Funktion  $g$  bei der Bildung des Supremums zugelassen und daher ist

$$\int_X f \, d\mu \geq \alpha \mu(X).$$

Ist  $\alpha \leq 0$  nutzt man den ersten Schritt und geht zu  $-f \leq -\alpha$  über. Die Abschätzung nach oben erfolgt wie im ersten Teil des Beweises.

3. Die Definition des Integrals erfolgt über die Bildung eines Supremums. Ist  $0 \leq f \leq g$ , sind bei  $f$  weniger Funktionen zugelassen und damit das Supremum höchstens das von  $g$ . Im allgemeinen Fall schreiben wir  $g = g^+ - g^-$  und  $f = f^+ - f^-$ . Dann ist (und das ist einfach nachzuprüfen)

$$0 \leq f^+ \leq g^+ \text{ und } 0 \leq g^- \leq f^-.$$

Dann ergibt sich unter Verwendung des ersten Schritts

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \leq \int_X g^+ \, d\mu - \int_X g^- \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

4. Ist  $f \geq 0$  und  $0 \leq g$  eine Treppenfunktion und  $c > 0$ , so ist  $cg$  eine Treppenfunktion und  $cg \leq cf$  genau dann, wenn  $g \leq f$ . Wechselt  $f$  Vorzeichen, so betrachtet man  $f^+, f^-$ . Ist  $c$  negativ, betrachtet man zunächst die Multiplikation mit  $-c$  und danach die Multiplikation mit  $-1$ , die die Rollen von  $f^+, f^-$  vertauscht.
5. Ist  $\mu(X) = 0$ , so ist für jede messbare Teilmenge  $Y \subset X$  das Maß  $\mu(Y) = 0$  (beachte in einem vollständigen Maßraum, ist die Voraussetzung  $Y$  messbar überflüssig). Damit ist das Integral jeder Treppenfunktion 0 und das Supremum ist dann natürlich auch Null.

6. Treppenfunktionen  $\varphi$  auf  $Y$  werden trivial zu einer Treppenfunktion  $\bar{\varphi}$  auf  $X$  fortgesetzt. Seien  $c_1, \dots, c_r$  die Werte von  $\varphi$ ,  $Y_i$  die zugehörigen Teilmengen, so ist  $\bar{\varphi} = \sum_i c_i \chi_{Y_i} + 0 \cdot \chi_{X \setminus Y}$  und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_Y f \, d\mu &= \sup \left\{ \int_Y \varphi \, d\mu \mid \varphi \leq f \right\} = \sup \left\{ \int_X \bar{\varphi} \, d\mu \mid \varphi \leq f \text{ in } Y \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_X \psi \, d\mu \mid \psi \text{ Treppenfunktion auf } X, 0 \leq \psi \leq f \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 12.6.6 (Verallgemeinerung von Maßen)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mu)$ .

Dann ist

$$\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \int_X f \, d\mu$$

eine abzählbar ( $\sigma$ -)additive Abbildung.

*Beweis.* Wir beweisen dies zunächst für nichtnegative Funktionen. Zu zeigen ist, sind  $X_j$  abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen mit  $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ , so ist

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X_j} f \, d\mu.$$

Der Beweis dieser Tatsache zerfällt in mehrere Schritte. Im ersten Schritt nehmen wir an,  $f$  sei die charakteristische Funktion einer messbaren Menge  $Y \subset \Omega$ . Dann reduziert sich die Behauptung darauf, die Gleichung

$$\mu(X \cap Y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_j \cap Y)$$

zu beweisen. Dies ist aber gerade die  $\sigma$ -Additivität des Maßes  $\mu$ .

Im zweiten Schritt beweisen wir die Behauptung für Treppenfunktionen. Ist

$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{Y_i}$ , so ist

$$\begin{aligned}
 \int_X f \, d\mu &= \int_X \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{Y_i} \, d\mu \\
 &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(X \cap Y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_j \cap Y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \mu(X_j \cap Y_i) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(X_j \cap Y_i) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X_j} f \, d\mu.
 \end{aligned}$$

Wir kommen zum allgemeinen Fall einer nichtnegativen Funktion  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Sei also  $f \geq 0$  integrierbar. Dann gibt es mit  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  und paarweisen disjunkten  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Treppenfunktion  $\varphi \leq f$  mit

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X_j} \varphi \, d\mu \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X_j} f \, d\mu.$$

Damit ist

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \mid 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ ist Treppenfunktion} \right\} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X_j} f \, d\mu.$$

Damit haben wir die Ungleichung

$$\Phi(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(X_n).$$

Für die Umkehrung nehmen wir oBdA an, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\Phi(X_n) < \infty$ . Zu  $\varepsilon > 0$  finden wir eine Treppenfunktion  $0 \leq \varphi \leq f$  mit

$$\int_{X_1} f \, d\mu \leq \int_{X_1} \varphi \, d\mu + \varepsilon, \quad \int_{X_2} f \, d\mu \leq \int_{X_2} \varphi \, d\mu + \varepsilon.$$

Dann ist

$$\Phi(X_1 \cup X_2) \geq \int_{X_1 \cup X_2} \varphi \, d\mu = \int_{X_1} \varphi \, d\mu + \int_{X_2} \varphi \, d\mu \geq \Phi(X_1) + \Phi(X_2) - 2\varepsilon.$$

Also hat man

$$\Phi(X_1 \cup X_2) \geq \Phi(X_1) + \Phi(X_2).$$

Allgemeiner folgt dann

$$\Phi(X_1 \cup \dots \cup X_n) \geq \Phi(X_1) + \dots + \Phi(X_n).$$

Damit folgt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi(X) \geq \Phi(X_1 \cup \dots \cup X_n) \geq \Phi(X_1) + \dots + \Phi(X_n)$$

und damit

$$\Phi(X) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(X_i).$$

Zuletzt muss noch der allgemeine Fall einer vorzeichenwechselnden Funktion betrachtet werden.

Sei  $f = f^+ - f^-$ , dann gilt die Aussage für  $f^+$  und  $f^-$  jeweils einzeln aufgrund des vorherigen Schrittes, dann gilt sie natürlich auch für  $f$ .  $\square$

**Korollar 12.6.7 (Nullmengen)**

Ist  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $Y \subset X$  mit  $\mu(X \setminus Y) = 0$ . Dann gilt für jede integrierbare Funktion  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$

$$\int_X f \, d\mu = \int_Y f \, d\mu.$$

*Beweis.* Aus  $Y$  und  $X \setminus Y$  messbar,  $X = Y \cup (X \setminus Y)$  folgt unmittelbar

$$\int_X f \, d\mu = \int_Y f \, d\mu + \int_{X \setminus Y} f \, d\mu = \int_Y f \, d\mu.$$

Die letzte Gleichheit begründet sich aus der Tatsache, dass  $X \setminus Y$  nach Voraussetzung eine Nullmenge ist und damit das Integral über  $X \setminus Y$  nach Satz 12.6.5 Punkt 5 verschwindet.  $\square$

**Bemerkung 12.6.8 (Bedeutung der Nullmengen)**

Das Korollar zeigt, dass Nullmengen für die Integrationstheorie keine Rolle spielen, eine Beobachtung von eminenter Bedeutung, die auch viele Beweise technisch schwieriger macht, da wir auch in den Voraussetzungen Nullmengen ignorieren wollen und werden. Den technisch wichtigsten Schritt in diese Richtung macht die folgende Definition.

**Definition 12.6.9 (Äquivalenz und Nullmenge)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum. Sei  $X \in \mathfrak{A}$ . Für Funktionen  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  führen folgende Relation ein:  $f \sim g \iff \left\{ x \in X \mid f(x) \neq g(x) \right\}$  ist Nullmenge, d. h.  $\mu(\left\{ x \in X \mid f(x) \neq g(x) \right\}) = 0$ .

**Definition 12.6.10 (fast überall)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum. Gilt eine Eigenschaft für alle Punkte außerhalb einer Nullmenge, so sagen wir, die Eigenschaft gilt fast überall. Wir schreiben dafür die Eigenschaft gilt (fü).

**Lemma 12.6.11 (Äquivalenzrelation)**

$\sim$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellwertigen Funktionen.

*Beweis.* Zu zeigen sind Symmetrie, Reflexivität und Transitivität. Dabei sind die Symmetrie und Reflexivität offensichtlich und die Transitivität einfach eine Konsequenz aus der Tatsache, dass die Vereinigung von zwei Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.  $\square$

**Aufgabe 12.6.12 (Monotonie des Integrals)**

Seien  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Gilt  $f \leq g$  (fü), so ist für jedes  $X \in \mathfrak{A}$

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

**Satz 12.6.13 (Integral des Betrages einer Funktion)**

Ist  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  messbar und  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Dann gilt

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

*Beweis.* Wir setzen  $Y_+ = \left\{ x \in X \mid f(x) \geq 0 \right\}$  und  $Y_- = \left\{ x \in X \mid f(x) < 0 \right\}$ , so dass  $X = Y_+ \cup Y_-$ .  $|f|$  messbar und es gilt

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_{Y_+} f \, d\mu + \int_{Y_-} (-f) \, d\mu = \int_{Y_+} f^+ \, d\mu + \int_{Y_-} f^- \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu < \infty.$$

Damit ist  $|f| \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Weiter ist  $f \leq |f|$  und  $-f \leq |f|$ , also

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu, \quad -\int_X f \, d\mu = \int_X (-f) \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu$$

und damit

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu. \quad \square$$

**Satz 12.6.14 (Bedeutung einer integrierbaren Schranke)**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\text{erw}}$  messbar. Ist  $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$  und  $|f| \leq g$  ( $f\ddot{u}$ ), so ist  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ .

*Beweis.* Es gilt  $f^+ \leq g$  ( $f\ddot{u}$ ),  $f^- \leq g$  ( $f\ddot{u}$ ), also ist  $X = Y \cup (Y \setminus X)$  mit  $\mu(X \setminus Y) = 0$  und  $f^+, f^- \leq g$  auf  $Y$ . Also ist

$$\int_X f^+ \, d\mu = \int_Y f^+ \, d\mu + \int_{X \setminus Y} f^+ \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu + 0 < \infty,$$

ganz entsprechend

$$\int_X f^- \, d\mu < \infty$$

und  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . □

## 12.7 Konvergenzsätze

Eine wichtige Eigenschaft des Lebesgue-Integrale sind die Sätze zur Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration.

**Satz 12.7.1 (Satz von der monotonen Konvergenz (Lebesgue))**

Ist  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reellwertiger, messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $f_n$  eine ( $f\ddot{u}$ ) monoton steigende Folge, d. h. gilt

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) < \dots \quad (f\ddot{u})$$

auf  $X$ . Sei  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ( $f\ddot{u}$ ). Dann gilt:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Beweis.* Sei  $A \in \mathbb{R}_{erw}$  mit

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Der Grenzwert existiert, da die Folge

$$\left\{ \int_X f_n \, d\mu \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

monoton steigend ist. Da  $f_n \leq f$  ( $f\ddot{u}$ ) gilt auch (nach Aufgabe 12.6.12)

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

und damit

$$A \leq \int_X f \, d\mu.$$

Wir müssen noch die umgekehrte Ungleichung beweisen. Dazu sei  $s$  eine beliebige Treppenfunktion mit  $0 \leq s \leq f$ , wir wollen zeigen, dass

$$\int_X s \, d\mu \leq A.$$

Ist dies gezeigt, dann folgt auch, dass das Supremum über alle solchen  $s$  durch  $A$  abgeschätzt wird. Sei also  $s$  fest gewählt. Dann sei  $c \in (0, 1)$  eine Zahl. Setze

$$Y_n = \left\{ x \in X \mid f_n(x) > cs(x) \right\}.$$

Aufgrund der Monotonie folgt  $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots$ . Weiterhin hat

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

die Eigenschaft  $\mu(X \setminus Y) = 0$ , da die Folge ( $f\ddot{u}$ ) konvergiert. Damit ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{Y_n} cs \, d\mu \leq \int_{Y_n} f_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq A.$$

$Y$  kann als disjunkte abzählbare Vereinigung der  $Z_n = Y_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Y_i$  dargestellt werden, wegen der abzählbaren Additivität der Funktion  $\Phi$  aus Satz 12.6.6 folgt

$$\begin{aligned} \int_Y cs \, d\mu &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n} cs \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Z_n} cs \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_{Z_j} cs \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Y_n} cs \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Y_n} f_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Y_n} f \, d\mu \leq A. \end{aligned}$$

Da  $c \in (0, 1)$  beliebig ist, können wir den Grenzwert  $c \rightarrow 1$  bilden und erhalten

$$\int_Y s \, d\mu \leq A.$$

Damit ist mit der Vorbemerkung der Beweis erbracht.  $\square$

**Satz 12.7.2 (Summen)**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$ . Es seien  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Dann ist  $f = f_1 + f_2 \in \mathcal{L}(X, \mu)$  und es gilt

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu.$$

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass  $f_i \geq 0$  (*f*ü). Nach Satz 12.5.4 gibt es zu  $f_i$ ,  $i = 1, 2$  Treppenfunktionen  $s_i^n$ ,  $i = 1, 2$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_i^n = f_i$ . Da  $f_i \geq 0$  können die Folgen monoton steigend gewählt werden. Dann gilt mit  $s^n = s_1^n + s_2^n$  auch  $s^n \rightarrow f$  und

$$\int_X s^n \, d\mu = \int_X s_1^n \, d\mu + \int_X s_2^n \, d\mu.$$

Der Lebesguesche Satz von der monotonen Konvergenz erlaubt den Übergang zum Grenzwert und beweist den Satz.

Im allgemeinen Fall zerlegen wir  $X$  in vier disjunkte Mengen  $X_1, \dots, X_4$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{ x \in X \mid f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0 \right\} \\ X_2 &= \left\{ x \in X \mid f_1(x) \geq 0, f_2(x) < 0 \right\} \\ X_3 &= \left\{ x \in X \mid f_1(x) < 0, f_2(x) \geq 0 \right\} \\ X_4 &= \left\{ x \in X \mid f_1(x) < 0, f_2(x) < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Die Beweise im ersten und im letzten Fall sind einfach. Der zweite und dritte Fall benötigen eine Idee: Mit  $X_2^+ = \{x \in X_2 \mid f_2(x) \geq 0\}$  und  $X_2^- = X_2 \setminus X_2^+$  und  $f_1 = f + f_2$  auf  $X_2^+$  ergibt der erste Schritt wieder die Aussage. Entsprechendes gilt für  $X_2^-$  und für  $X_3$ .  $\square$

**Satz 12.7.3 (Reihen nichtnegativer integrierbarer Funktionen)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  sei eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen auf  $X \in \mathfrak{A}$ . Dann gilt mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad (\textit{f}ü)$$

die Gleichung

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \int_X f_i \, d\mu.$$

*Beweis.* Die Partialsummenfolge  $s_n = \sum_{j=1}^n f_j$  der  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist (*f*ü) monoton steigend, also können wir den Lebesgueschen Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 12.7.1, anwenden und schließen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

□

**Satz 12.7.4 (Fatou<sup>4</sup>)**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer, nichtnegativer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Setze  $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Dann gilt

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Beweis.* Wir setzen

$$g_n(x) = \inf \left\{ f_j(x) \mid j \geq n \right\}.$$

Dann ist die Folge  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  monoton und jedes  $g_n$  ist messbar. Also konvergiert die Funktionenfolge  $g_n$  mit Grenzwert  $f$  (hier geht die Definition des Limesinferior ein, vgl. Definition 2.7.9). Der Lebesguesche Satz 12.7.1 von der monotonen Konvergenz gibt uns

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Dann ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $g_n \leq f_n$  und daher ist

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu. \quad \square$$

<sup>4</sup>Pierre Joseph Louis Fatou (28.2.1878–10.8.1929) war ein bedeutender französischer Mathematiker, der nach einem Studium an der École Nationale Supérieure eine Position an der Sternwarte in Paris annahm. Dort trieb er seine mathematischen Studien fort und wartete mit bedeutenden Leistungen zur Integrationstheorie und Funktionentheorie auf.

Der letzte Satz in der Reihe unserer Konvergenzaussagen ist der sogenannte Satz von der dominierten Konvergenz. Die wesentliche Aussage ist hier, dass falls eine integrierbare Funktion alle Folgenglieder betragsmäßig dominiert, auch die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung zulässig ist. Das wesentliche Hilfsmittel ist der Satz von Fatou, der auf geschickte Weise zum Einsatz gebracht wird.

**Satz 12.7.5 (Satz von der dominierten Konvergenz (Lebesgue))**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (f\ddot{u}).$$

Gibt es eine Funktion  $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$  mit  $|f_n| \leq g$  ( $f\ddot{u}$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

*Beweis.* Die Voraussetzung impliziert, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $f_n \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Damit ist nach Satz 12.6.14 wegen  $|f| \leq g$  auch  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $f_n + g$  nichtnegativ ( $f\ddot{u}$ ). Nach dem Satz von Fatou ist mithin

$$\int_X (f + g) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n + g) \, d\mu.$$

Daraus folgt aber

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Wir verwenden den gleichen Trick ein zweites Mal und schließen: Aufgrund der Voraussetzung gilt  $g - f_n \geq 0$  ( $f\ddot{u}$ ) und damit

$$\int_X (g - f) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (g - f_n) \, d\mu.$$

Damit ist dann

$$-\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( -\int_X f_n \, d\mu \right).$$

Dies bedeutet

$$\int_X f \, d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Damit ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

und damit existiert der Grenzwert und ist gleich dem Integral von  $f$ .  $\square$

Einen wichtigen Spezialfall wollen wir getrennt formulieren.

**Korollar 12.7.6 (Spezialfall)**

*Ist unter den Voraussetzungen von Satz 12.7.5  $\mu(X) < \infty$  und sind die  $f_n$  fast überall gleichmäßig beschränkt, so ist  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$  und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

## 12.8 Der Vergleich mit dem Riemann Integral

In diesem Abschnitt wollen wir den neuen Integralbegriff, der ja auch ausgehend von der Lebesgue-Algebra auf  $\mathbb{R}$  für Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist, vergleichen mit dem Integralbegriff aus Kapitel 6. Dazu benötigen wir zuallererst eine angemessene Notation. Ist  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, so setzen  $\Omega = [a, b]$ ,  $\mathfrak{A} = \left\{ X \cap [a, b] \mid X \in \mathfrak{L} \right\}$  und  $\lambda$  die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf  $\mathfrak{A}$ . Der Konvention folgend schreiben wir für eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in diesem Fall statt

$$\int_{\Omega} f \, d\lambda$$

den Ausdruck

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

In diesem Abschnitt schreiben wir für das Riemann-Integral einer Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b g(x) \, dx.$$

Für den Satz, der den Vergleich beider Integralbegriffe leistet, benötigen wir noch zwei Lemmata.

**Lemma 12.8.1 (Verschwindendes Integral nichtnegativer Funktionen)**

*Ist  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$ , messbar und gilt*

$$\int_X f \, d\mu = 0,$$

*so ist  $\mu \left( \left\{ x \in X \mid f(x) > 0 \right\} \right) = 0$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass

$$A = \mu \left( \left\{ x \in X \mid f(x) > 0 \right\} \right) > 0$$

ist.

Sei

$$X_k = \left\{ x \in X \mid \frac{1}{k} \geq f(x) > \frac{1}{k+1} \right\} \in \mathfrak{A}.$$

Dann ist

$$\left\{ x \in X \mid f(x) > 0 \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k,$$

die Familie der  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist paarweise disjunkt und damit ist

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(X_k).$$

Damit ist mindestens eine der Summanden  $\mu(X_k) > 0$ . Dann ist aber

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{X_k} f \, d\mu \geq \frac{1}{k} \mu(X_k) > 0.$$

Dieser Widerspruch beweist das Lemma.  $\square$

### Lemma 12.8.2 (Äquivalenz und Messbarkeit)

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann ist eine Funktion  $f$  mit  $f = \varphi \circ f_{\text{ü}}$  messbar.

*Beweis.* Es sei  $N = \left\{ x \in X \mid f(x) \neq \varphi(x) \right\}$ . Nach Voraussetzung ist  $\mu(N) = 0$ . Insbesondere ist dann für  $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ x \in X \mid f(x) > a \right\} = \left\{ x \in X \setminus N \mid \varphi(x) > a \right\} \cup \left\{ x \in N \mid f(x) > a \right\}.$$

Da  $N \in \mathfrak{A}$  ist auch  $X \setminus N \in \mathfrak{A}$  und damit auch  $\left\{ x \in X \setminus N \mid \varphi(x) > a \right\} = X \setminus N \cap \left\{ x \in X \mid \varphi(x) > a \right\}$ . Ebenso ist  $\left\{ x \in N \mid f(x) > a \right\}$  als Teilmenge von  $N$  aufgrund der Vollständigkeit von  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  messbar.  $\square$

### Satz 12.8.3 (Riemann- und Lebesgue-Integral)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in R([a, b], \mathbb{R})$ , so ist  $f \in \mathcal{L}([a, b], \lambda)$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Messbarkeit von  $f$ . Da  $f$  Riemann-integrierbar ist, existieren Zerlegungen  $\mathfrak{Z}_k$  und Folgen von Treppenfunktionen  $\varphi_k, \psi_k : [a, b] \setminus \mathfrak{Z}_k$  mit

$$\varphi_k(x) \leq f(x) \leq \psi_k(x), \quad x \notin \mathfrak{Z}_k$$

mit

$$\int_a^b (\psi_k(x) - \varphi_k(x)) \leq \frac{1}{k}.$$

Zusätzlich kann man  $\mathfrak{Z}_k, \varphi_k, \psi_k$  so wählen, dass

$$\mathfrak{Z}_k \subset \mathfrak{Z}_{k+1} \text{ für alle } k \text{ und } \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ sind monoton auf } [a, b] \setminus \mathfrak{Z},$$

wobei  $\mathfrak{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n$  ist. Aufgrund der Monotonie gilt dort

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi \text{ existiert (f.ü.)} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \psi \text{ existiert (f.ü.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi \leq f \leq \psi \text{ (f.ü.)}.$$

Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b (\psi_k - \varphi_k) dx = 0$$

und aufgrund der Definition des Riemann-Integrals

$$\int_a^b f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k dx.$$

Die Sätze von der monotonen Konvergenz (Satz, 12.7.1) bzw. von der dominierten Konvergenz (Satz 12.7.5) garantieren

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k dx \\ \int_a^b \psi dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_k dx. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi - \varphi) dx &= \int_a^b \psi dx - \int_a^b \varphi dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_k dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_k dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aus Lemma 12.8.1 folgt  $\psi = \varphi (f\ddot{u})$ . Damit ist  $f = \varphi (f\ddot{u})$ , also nach Lemma 12.8.2  $f$  messbar.

Wir müssen noch die Gleichheit der Integrale

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

beweisen. Das rechte Integral ist einfach der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_k \, dx,$$

während die linke Seite als Supremum über die Integrale aller Treppenfunktionen  $\phi \leq f$  sicher größer gleich diesem Grenzwert ist, jedoch auch kleiner gleich jedem Integral über eine Treppenfunktion  $\psi \geq f$ . Damit bleibt nur die Gleichheit.  $\square$

**Korollar 12.8.4 (zum Beweis des Satzes 12.8.3)**

Eine auf dem Intervall  $[a, b]$  definierte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie auf  $[a, b]$  beschränkt und stetig ( $f\ddot{u}$ ) ist, d. h. wenn gilt

$$\lambda \left( \left\{ x \in [a, b] \mid f \text{ ist nicht stetig in } x \right\} \right) = 0.$$

*Beweis.* Wir betrachten  $x \in [a, b] \setminus \mathfrak{Z}$  mit  $\psi(x) = \varphi(x)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\psi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon$  für alle  $k > N$ . Sei ein solches  $k$  gegeben. Dann gibt es  $\zeta_j, \zeta_{j+1} \in \mathfrak{Z}_k$  mit  $x \in (\zeta_j, \zeta_{j+1})$  und  $\psi_k, \varphi_k$  sind konstant auf  $(\zeta_j, \zeta_{j+1})$ . Dann ist aber für  $y \in (\zeta_j, \zeta_{j+1})$  der Funktionswert  $f(y) \in (\varphi_k(x), \psi_k(x))$  und daher

$$|f(y) - f(x)| \leq \max\{\psi_k(x) - f(x), f(x) - \varphi_k(x)\} < \varepsilon.$$

Für die Umkehrung starten wir mit der Wahl von  $\varepsilon > 0$ . Da die Menge  $U$  der Unstetigkeitspunkte von  $f$  eine Nullmenge ist, gibt es eine abzählbare offene Überdeckung von  $U$  mit Intervallen  $I_j$  mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) < \varepsilon.$$

Sei nun  $S$  das Komplement der Vereinigung der  $I_j$ . In jedem Punkt in  $S$  ist  $f$  stetig, da  $f$  nur in Punkten in  $U$  unstetig ist. Ist  $x \in S$ , gibt es zum gewählten  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U(x, \varepsilon) = (x - \delta(x, \varepsilon), x + \delta(x, \varepsilon))$  mit  $y \in U(x, \varepsilon)$  impliziert  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Die Menge  $U(x, \varepsilon)$  überdeckt die Menge  $S$  und

damit insbesondere die kompakte Menge  $[a, b] \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ . Daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $U_j = U(x_j, \varepsilon_j)$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Nun überdecken die Mengen  $I_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  und  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  das Intervall  $[a, b]$ . Wähle nun  $\delta > 0$  die Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung (vgl. Satz 4.1.14). Ist nun  $\mathfrak{Z}$  eine Zerlegung mit Feinheit kleiner als  $\delta$ , so folgt, dass jedes Intervall dieser Zerlegung in einem  $U_k$  oder einem  $I_j$  enthalten ist. Wir schreiben  $L = \left\{ k \mid \exists j \in \mathbb{N} (\zeta_k, \zeta_{k+1}) \subset I_j \right\}$  und  $K = \left\{ k \mid \nexists j \in \mathbb{N} (\zeta_k, \zeta_{k+1}) \subset I_j \right\}$ , dies bedeutet natürlich, dass es ein  $j \in 1, \dots, r$  gibt mit  $(\zeta_k, \zeta_{k+1}) \subset U_j$ . Nun schätzen wir  $M = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  und  $m = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  ab:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathfrak{Z}, f) - \mathfrak{U}(\mathfrak{Z}, f) &= \sum_{j=0}^{|\mathfrak{Z}|} (f(\eta_j) - f(\xi_j))(\zeta_{j+1} - \zeta_j) \\ &\leq \sum_{j \in L} (M - m)(\zeta_{j+1} - \zeta_j) + \sum_{j \in K} (f(\eta_j) - f(\xi_j))(\zeta_{j+1} - \zeta_j) \\ &\leq (M - m)\delta + \varepsilon(b - a) \\ &= (M - m + (b - a))\varepsilon. \end{aligned}$$

Dies beweist die Aussage. □

**Bemerkung 12.8.5 (Uneigentlich Riemann versus Lebesgue)**

Etwas komplizierter ist der Sachverhalt, wenn wir über uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen sprechen, dort folgt aus der Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals nicht die Existenz des Lebesgue-Integrals.

**Aufgabe 12.8.6 (Uneigentlich Riemann aber nicht Lebesgue)**

Man zeige, dass es eine Funktion gibt, die auf  $[1, \infty)$  uneigentlich Riemann-integrierbar ist, deren Lebesgue-Integral aber nicht definiert ist.

Nun wollen wir die Integration komplexwertiger Funktionen beschreiben.

**Definition 12.8.7 (Messbarkeit komplexwertiger Funktionen)**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir schreiben  $f = u + iv$  und nennen  $f$  messbar, wenn  $u, v$  beide messbar sind.

**Bemerkung 12.8.8 (Messbarkeit komplexwertiger Funktionen)**

1. Eine Funktion ist genau dann messbar, im Sinne der eben angegebenen Definition, wenn sie  $\mathfrak{A}$  –  $\mathfrak{B}$ -messbar ist, und hier  $\mathfrak{B}$  die Borel-Algebra auf  $\mathbb{C}$  bedeutet.
2. Summen und Produkte messbarer Funktionen sind messbar. Dies ist leicht nachzuprüfen.

**Definition 12.8.9 (Integrierbarkeit komplexwertiger Funktionen)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  messbar und  $f = u + iv$ .

1. Sind die Werte

$$\int_X u \, d\mu, \int_X v \, d\mu$$

beide definiert, so setzen wir

$$\int_X f \, d\mu = \int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu.$$

2. Wir sagen  $f$  ist integrierbar, wenn beide Funktionen  $u$  und  $v$  integrierbar sind.
3. Mit  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$  bezeichnen wir die Menge, der integrierbaren Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Ist  $\mu$  vom Kontext klar, schreiben wir wieder einfach  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X)$ .

**Bemerkung 12.8.10 (Charakterisierung komplexwertiger integrierbarer Funktionen)**

Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann integrierbar, wenn  $|f|$  integrierbar ist. Dies folgt aus der folgenden Serie von Äquivalenzen, die jede für sich leicht nachprüfbar ist: Sei  $f = u + iv$ ,

$$\begin{aligned} f \text{ integrierbar} &\Leftrightarrow u, v \text{ integrierbar} \Leftrightarrow |u|, |v| \text{ integrierbar} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{u^2 + v^2} \text{ integrierbar.} \end{aligned}$$

Ähnlich wie im Reellen zeigt man, dass  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$  ein komplexer linearer Raum ist, d. h. dass Addition und skalare Multiplikation in diesem Raum möglich sind und den entsprechenden Bedingungen genügen.

Auf den komplexen Fall  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  lassen sich nun die Sätze 12.6.5, Eigenschaften (1,4–6), 12.6.6, 12.6.13, 12.6.14, 12.7.2, 12.7.5 übertragen, d. h. es gelten

die folgenden Sätze.

**Satz 12.8.11 (Komplexwertige integrierbare Funktionen)**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  messbar.

1. Ist  $f$  beschränkt und  $\mu(X) < \infty$ , so ist  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ .
2. Ist  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , so ist  $cf \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$  und  $\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu$ .
3. Gilt  $\mu(X) = 0$ , so ist  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$  und  $\int_X f \, d\mu = 0$ .
4. Ist  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ ,  $Y \subset X$  messbar, so ist  $f \in \mathcal{L}(Y, \mu)$ .
5. Sei  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mu)$ . Dann ist  $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C} : X \mapsto \int_X f \, d\mu$  abzählbar additiv.
6. Ist  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ . Dann gilt  $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$ .
7. Sei  $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\text{erw}}$  messbar,  $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ ,  $|f| \leq g$  (f.ü.), so ist  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ .
8. Seien  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ . Dann ist  $f = f_1 + f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$  und es gilt  $\int_X f \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu$ .
9. Seien  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  messbar,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  (f.ü.). Gibt es ein  $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$  mit  $|f_n| \leq g$  (f.ü.), so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ .

*Beweis.* Während in den meisten Fällen die Übertragung aus einer Anwendung der Regeln auf Real- und Imaginärteil besteht, muss beim Punkt (6), bei der Verallgemeinerung von 12.6.13, ein neues Argument benutzt werden.

Sei also  $f = u + iv$  integrierbar. Dann gibt es ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$  und

$$\alpha \int_X f \, d\mu \in \mathbb{R}_+,$$

(denn, für jede Zahl  $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ , ist  $\frac{\bar{c}}{|c|}$  eine nichtnegative reelle Zahl). Setze

$\alpha f = \tilde{u} + i\tilde{v}$ . Dann folgt

$$\alpha \int_{\tilde{X}} f \, d\mu = \left| \alpha \int_{\tilde{X}} f \, d\mu \right| = |\alpha| \left| \int_{\tilde{X}} f \, d\mu \right| = \left| \int_{\tilde{X}} f \, d\mu \right|.$$

Weiter ist  $|\alpha f| = |\alpha||f| = |f|$  und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{X}} f \, d\mu \right| &= \alpha \int_{\tilde{X}} f \, d\mu = \int_{\tilde{X}} \alpha f \, d\mu = \int_{\tilde{X}} (\tilde{u} + i\tilde{v}) \, d\mu \\ &= \int_{\tilde{X}} \tilde{u} \, d\mu + i \int_{\tilde{X}} \tilde{v} \, d\mu = \int_{\tilde{X}} \tilde{u} \, d\mu \\ &\leq \int_{\tilde{X}} |\tilde{u}| \, d\mu \leq \int_{\tilde{X}} \sqrt{|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2} \, d\mu \\ &= \int_{\tilde{X}} |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

□

## 12.9 Überblick

Dieser Abschnitt will in sehr kompakter Form den Zusammenhang zwischen den wesentlichen Konstruktionen nochmals aufzeigen. Dabei stehen links immer die Konstruktionen für einen allgemeinen Maßraum, rechts die für  $\mathbb{R}^n$ , die dritte Spalte verweist auf die Stelle im Skript, wo der entsprechende Sachverhalt zu finden ist.

Bezeichnung	$\Omega$	$\mathbb{R}^n$	Referenz
$\sigma$ -Algebra	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}, \mathfrak{L}$	12.1.6, 12.1.11, 12.3.10
halboffenes Intervall		$I = [a, b)$	12.3.1
Inhalt	$\mu$	$\lambda$	12.3.4, 12.3.5
Prämaß	$\mu$	$\lambda$	12.2.3, 12.3.6
äußeres Maß	$\mu^*$	$\lambda^*$	12.2.9, 12.2.11, 12.3.10
$\mu^*$ -messbar			
Maß (aus $\mu^*$ )	$\bar{\mu}$	$\bar{\lambda}$	

# Kapitel 13

## Anwendungen des Lebesgue-Integrals

In diesem Kapitel wollen wir die nach Lebesgue benannten Funktionenräume  $L^p(\Omega)$  einführen und einige elementare Eigenschaften beweisen. Danach befassen wir uns mit dem Transformationssatz und seinen Anwendungen und schließlich lernen wir mit dem Satz von Fubini einen Satz mit großer praktischer Bedeutung kennen.

### Inhalt

---

13.1 Räume integrierbarer Funktionen . . . . .	51
13.2 Transformationsformel und Koordinatenwechsel . . .	59
13.3 Der Satz von Fubini . . . . .	73

---

### 13.1 Räume integrierbarer Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Mengen Lebesgue-integrierbarer Funktionen und werden darauf neben einer Vektorraumstruktur eine Struktur eines normierten Raumes definieren.

**Definition 13.1.1 ( $\mathcal{L}^p$ -Räume)**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum. Wir bezeichnen für  $X \in \mathfrak{A}$  und  $p \geq 1$

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar und } |f|^p \text{ ist integrierbar} \right\}.$$

Wir setzen

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p \, d\mu} = \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Lemma 13.1.2 (Charakterisierung von Äquivalenzklassen)**

Sei  $\sim$  die Äquivalenzrelation aus Definition 12.6.9. Dann gilt für Funktionen  $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$   $f \sim g \iff \|f - g\|_p = 0$ .

*Beweis.* Folgt sofort aus den Definitionen. □

**Definition 13.1.3 ( $L^p$ -Räume)**

1. Für  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  sei  $[f]_p = \left\{ g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \mid g \sim f \right\}$ .
2.  $L^p(\Omega, \mu) = \left\{ [f]_p \mid f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \right\}$

Ist aus dem Kontext klar, von welchem Maß die Rede ist, so schreiben wir auch  $L^p(\Omega)$ . Wir unterscheiden im Moment auch nicht zwischen reellwertigen und komplexwertigen Funktionen, in den Fällen, in denen es von Bedeutung ist, ob wir reelle oder komplexe Funktionen betrachten, schreiben wir  $L^p(\Omega, \mu, \mathbb{R})$  bzw.  $L^p(\Omega, \mu, \mathbb{C})$ . Auch hier verzichten wir auf die Angabe von  $\mu$ , wenn dies ohnehin klar ist.

**Aufgabe 13.1.4 (Äquivalenzklassen und Multiplikation)**

Ist  $f_1 \sim f_2$ ,  $g_1 \sim g_2$  so gilt  $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$ .

**Aufgabe 13.1.5 (Produkte in  $L^2$ )**

Man beweise ohne den Hilfssatz 13.1.6 bzw. den Satz 13.1.7 zu verwenden:

1. Für  $a, b \geq 0$  ist  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .
2. Für  $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  ist  $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ .

**Hilfssatz 13.1.6 (Youngsche Ungleichung (Korollar)<sup>1</sup>)**

Für  $p, q \in [1, \infty)$  mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und  $a, b \geq 0$  gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

<sup>1</sup>William Henry Young (20.10.1863–7.7.1942) war ein englischer Mathematiker, verheiratet mit Grace Chisholm Young, der ersten Frau der in Deutschland ein Dokortitel verliehen

*Beweis.* Wir betrachten für  $x \in (0, \infty)$  die Funktion

$$g(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{qx^q}.$$

Dann ist

$$g'(x) = x^{p-1} - x^{-q-1}.$$

Damit ist die Funktion monoton auf den Intervallen  $(0, 1)$  und  $(1, \infty)$ . Die einzige Nullstelle der Ableitung liegt bei  $x = 1$  und liefert den Funktionswert  $g(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Damit ist  $g \geq 1$ .

Setze  $x = \frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}$ . Dies ergibt

$$1 \leq g(x) = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{pb} + \frac{b^{\frac{q}{p}}}{qa}.$$

Multiplikation mit  $ab$  ergibt

$$ab \leq \frac{a^{1+\frac{p}{q}}}{p} + \frac{b^{1+\frac{q}{p}}}{q}.$$

Nun kann man die ursprüngliche Gleichung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

umschreiben zu

$$q + p = pq$$

oder

$$1 + \frac{p}{q} = p, \text{ bzw. } 1 + \frac{q}{p} = p.$$

Dies ergibt die gewünschte Formel

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

---

wurde. Diese war als Mathematikerin in Göttingen promoviert worden. Sie war die Triebfeder für die wissenschaftlichen Unternehmungen Ihres Mannes. Bekannter ist heute der Sohn Laurence Chisholm Young (14.7.1905–24.12.2000) der in Göttingen geboren wurde und bedeutende Beiträge zur Maßtheorie und zur Variationsrechnung erbracht hat. Die im Lemma angegebene Ungleichung ist eine direkte Konsequenz der (deutlich) allgemeineren Youngschen Ungleichung.

**Satz 13.1.7 (Höldersche Ungleichung<sup>2</sup>)**

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $X \in \mathfrak{A}$  und  $p, q \in (1, \infty)$  mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sind  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ ,  $g \in \mathcal{L}^q(X)$ , dann ist

$$fg \in \mathcal{L}(X)$$

und es gilt

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Beweis.* Offenkundig ist  $fg$  messbar, wir müssen noch zeigen, dass  $|fg|$  integrierbar ist, d. h.

$$\int_X |fg| \, d\mu < \infty.$$

Dazu beachten wir die punktweise Ungleichung

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}.$$

Da die rechte Seite integrierbar ist, folgt dies nach Satz 12.6.14 auch für die linke Seite. Um die gewünschte Abschätzung zu erhalten, modifizieren wir den letzten Schritt leicht. Wir setzen

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}.$$

Dann ist

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q}.$$

Integrieren wir nun beide Seiten, so erhalten wir

$$\frac{\int_X |fg| \, d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\int_X |f|^p \, d\mu}{p \|f\|_p^p} + \frac{\int_X |g|^q \, d\mu}{q \|g\|_q^q} = \frac{\|f\|_p^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q \|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Multiplizieren mit  $\|f\|_p \|g\|_q$  ergibt die gewünschte Aussage.  $\square$

<sup>2</sup>Ludwig Otto Hölder (22.12.1859–29.8.1937) arbeitete an den Universitäten Göttingen, Tübingen und Königsberg. Er trug zu vielen Gebieten der Mathematik bei, im Mittelpunkt seines Werkes steht die Algebra mit Untersuchungen spezieller Gruppen. In der Analysis stammen u. a. Arbeiten zur Potentialtheorie und ein Satz über das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe wesentlicher Singularitäten von ihm. In der Mechanik führte er das Hamiltonsche Prinzip für nichtholonome Zwangsbedingungen ein.

**Lemma 13.1.8 (Minkowski<sup>3</sup>)**

Sind  $f, g \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , so ist auch  $f + g \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$  und es gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Beweis.* Für  $p = 1$  folgt dies sofort aus der punktweisen Dreiecksungleichung. Bleibt der Fall  $1 < p < \infty$ . Wir beachten die elementare Abschätzung

$$|f| + |g| \leq \begin{cases} 2|f|, & \text{falls } |f| \geq |g| \\ 2|g|, & \text{falls } |f| < |g|. \end{cases}$$

Durch

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

zeigen wir, dass  $|f + g|^p \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$ . Wir haben punktweise fast überall

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}.$$

Mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

folgt wegen  $q(p-1) = p$ , dass  $|f + g|^{p-1} \in L^q(\Omega, \mathbb{C})$  und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f + g|^p \, d\mu &= \int_{\Omega} |f + g| |f + g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \underbrace{|f|}_{\in L^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in L^q} \, d\mu + \int_{\Omega} \underbrace{|g|}_{\in L^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in L^q} \, d\mu \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int_{\Omega} |f + g|^p \, d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Verschwundet das Integral, so ist nichts zu zeigen, anderweitig dividieren wir durch das Integral rechts und erhalten die Behauptung.  $\square$

Wir erinnern an die Definition des Banachraumes: Ein linearer normierter Raum, der vollständig ist, wird als *Banachraum* bezeichnet.

<sup>3</sup>Herrman Minkowski (22.6.1864–12.1.1909) beschäftigte sich bereits als Gymnasiast in Königsberg mit höherer Analysis. Seine akademische Laufbahn wurde durch David Hilbert geprägt. Sein bedeutsames Lebenswerk umfasst Zahlentheorie, konvexe Geometrie und verschiedene nichteuklidische Geometrien. Nach ihm benannt ist die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt der Relativitätstheorie, die von einer „indefiniten Metrik“ geprägt ist.

**Satz 13.1.9 (Fischer<sup>4</sup>-Riesz)** $L^p(\Omega, \mathbb{C})$  ist ein Banachraum.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Eigenschaften eines normierten Raumes. Da Addition und Multiplikation mit Skalaren nicht aus dem Raum herausführen, sieht man leicht, dass es sich um einen linearen Raum handelt. Als nächstes müssen wir zeigen, dass

$$[f] \mapsto \|f\|_p$$

eine Norm ist. Die Eigenschaft (N1) kann man folgendermaßen einsehen:

$$[f] = 0 \Rightarrow \|[f]\|_p = 0.$$

Andererseits ist

$$\|[f]\|_p = 0, f \in [f] \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = 0,$$

also  $f \sim 0$ , d. h.  $[f] = [0]$ .

(N2) ist eine einfache Übung, wir überlassen diese dem eigenen Fleiß.

(N3) ist gerade die Minkowski-Ungleichung.

Als letztes zeigen wir die Vollständigkeit. Sei also  $\{[f_k]_p\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(X, \mathbb{C})$   $f_k$  jeweils Repräsentanten von  $[f_k]$ , wir müssen zeigen, dass diese Folge in  $L^p(\Omega, \mathbb{C})$  konvergiert. Wir wählen eine Teilfolge  $\{f_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  aus, mit

$$\|f_{k_l} - f_{k_j}\|_p \leq 2^{-i} \text{ für } l, j > i.$$

Solch eine Wahl ist stets möglich, da  $\{[f_k]_p\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, gibt es zu  $\varepsilon_i = 2^{-i}$  ein  $N(i)$ , so dass  $k, j > N(i)$  implizieren

$$\|[f_k]_p - [f_j]_p\|_p < \varepsilon_i.$$

Angenommen es sind bereits gewählt  $f_{k_1}, \dots, f_{k_j}$ , wir wählen

$$k_{j+1} = \max\{k_j + 1, N(j + 1)\}.$$

Mit dieser Wahl, so stellt man durch ein einfaches Nachprüfen fest, sind alle Bedingungen erfüllt.

Dann ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

<sup>4</sup>Ernst Fischer (12.7.1875–14.11.1954) studierte in Wien und Berlin. Er arbeitete bei Minkowski in Zürich und Göttingen. Er war Professor in Brno, Erlangen und Köln. Aufgrund der faschistischen Rassegesetze wurde er vorzeitig in Ruhestand geschickt. Er bewies u. a. die Vollständigkeit von  $L^2$ . Neben der Analysis beschäftigte er sich auch mit Gruppentheorie und anderen algebraischen Fragen.

Setze

$$g_l = \sum_{j=1}^l |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|.$$

Der Satz 12.7.4 von Fatou und die Minkowski-Ungleichung (Lemma 13.1.8) implizieren nun

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lim_{l \rightarrow \infty} g_l^p \, d\mu &\leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_l^p \, d\mu \\ &= \left( \liminf_{l \rightarrow \infty} \|g_l\|_p \right)^p \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p \right)^p \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Damit existiert fast überall der Grenzwert  $\lim_{l \rightarrow \infty} g_l(x)$  und damit ist  $\{f_{k_l}(x)\}_{l \in \mathbb{N}}$  fast überall eine Cauchyfolge, denn für  $l > j$  ist

$$\begin{aligned} &|f_{k_l}(x) - f_{k_j}(x)| \\ &\leq |f_{k_l}(x) - f_{k_{l-1}}(x)| + |f_{k_{l-1}}(x) - f_{k_{l-2}}(x)| + \cdots + |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)| \\ &= |g_{l-1}(x) - g_j(x)|. \end{aligned}$$

und es existiert fast überall der Grenzwert  $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x)$ . Wir müssen nun zeigen, dass  $f$  der  $L^p$ -Grenzwert der Folge ist. Also gilt für  $k_j > k$  und  $k$  hinreichend groß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f - f_k|^p \, d\mu &\leq \int_{\Omega} (|f - f_{k_j}| + |f_{k_j} - f_k|)^p \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} 2(\max\{|f - f_{k_j}|, |f_{k_j} - f_k|\})^p \, d\mu \\ &= 2^{p-1} \int_{\Omega} 2 \max\{|f - f_{k_j}|^p, |f_{k_j} - f_k|^p\} \, d\mu \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\Omega} \inf_{k_j > k} (|f - f_{k_j}|^p + |f_{k_j} - f_k|^p) \, d\mu \\ &\leq 2^{p-1} \left( \int_{\Omega} \inf_{k_j > k} |f - f_{k_j}|^p \, d\mu + \int_{\Omega} \sup_{k_j > k} |f_{k_j} - f_k|^p \, d\mu \right) \\ &\leq 0 + \varepsilon, . \end{aligned}$$

Zur Erläuterung dient vielleicht die Abbildung 13.1. □

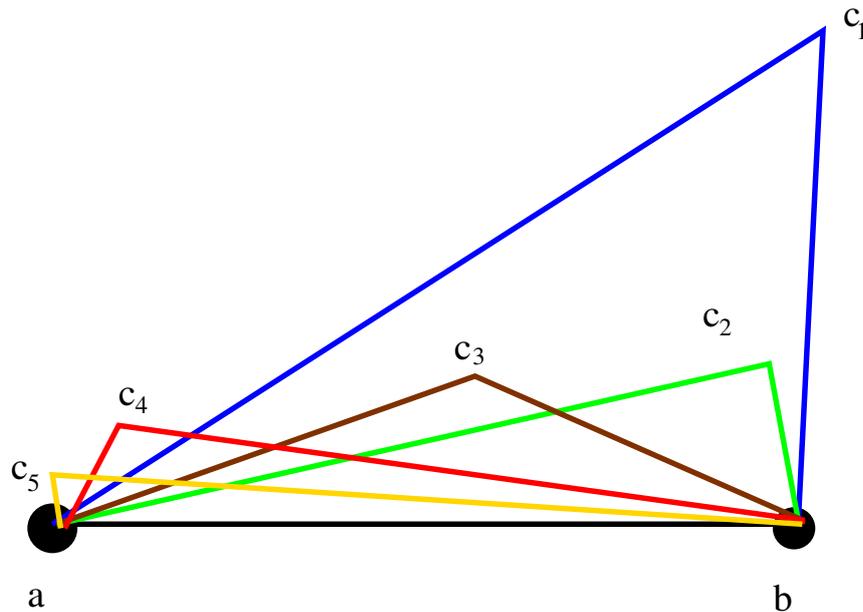


Abbildung 13.1: Für jedes  $k$  gilt  $d(a, b) \leq d(a, c_k) + d(c_k, b)$ . Insbesondere gilt  $d(a, b) \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} (d(a, c_k) + d(c_k, b)) \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} d(a, c_k) + \sup_{k \in \mathbb{N}} d(c_k, b)$ . Insbesondere sieht man, dass bei Konvergenz der  $c_k$  gegen  $a$  folgt  $d(a, b) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} d(c_k, b)$ .

Wir wissen bereits aus der Analysis II, dass ein Banachraum  $B$ , dessen Norm durch ein Skalarprodukt im Sinne von Satz 8.1.10 induziert wird, als *Hilbertraum* bezeichnet wird. Ist  $B$  ein komplexer Hilbertraum, so wird bei der Definition des Skalarproduktes (SP 3) aus Definition 8.1.8 ersetzt durch

$$\text{(SP 3)}_{\mathbb{C}} \quad \langle x, y \rangle_B = \overline{\langle y, x \rangle_B}$$

**Satz 13.1.10 (Hilbertraum)**

Auf  $L^2(X, \mathbb{C})$  wird durch

$$\langle [f]_2, [g]_2 \rangle_{L^2} = \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

ein Skalarprodukt definiert mit

$$\|[f]_2\|_2 = \sqrt{\langle [f]_2, [f]_2 \rangle_{L^2}}.$$

Damit wird  $L^2(X, \mathbb{C})$  zum Hilbertraum.

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass  $L^2(X, \mathbb{C})$  ein Banachraum ist. Offensichtlich ist

auch  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle [f]_2, [f]_2 \rangle_{L^2}}$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $([f]_2, [g]_2) \mapsto \langle f, g \rangle_{L^2}$  ein Skalarprodukt ist. Dies besteht aber aus einem einfachen Nachprüfen der Bedingungen.  $\square$

## 13.2 Transformationsformel und Koordinatenwechsel

Wir beginnen mit einem Eindeutigkeitssatz für das Lebesgue-Maß, der zentral für alle weiteren Betrachtungen ist.

### Satz 13.2.1 (Normierte Translationsinvariante Maße)

Jedes translationsinvariante Maß  $\mu$  auf der Borel-Algebra  $\mathfrak{B}^n$  mit

$$\mu \left( \left[ \left( \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right) \right] \right) = 1$$

ist das Borel-Lebesguesche Maß. Gleiches gilt für das Lebesguesche Maß auf  $\mathfrak{L}$ .

*Beweis.* Wir beweisen nur den ersten Fall, der zweite ist eine einfache Modifikation. Wir beweisen zunächst, dass für jedes halboffene Intervall  $I$  mit rationalen Seitenlängen  $l_i \in \mathbb{Q}$ ,  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$\mu(I) = \lambda(I).$$

Sei  $l_i = \frac{p_i}{q_i}$  und  $q = q_1 \cdots q_n \in \mathbb{N}$ . Sei  $W_q$  der halboffene Würfel mit Kantenlänge  $\frac{1}{q}$ , d. h.

$$W_q = \left[ \left( \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{1}{q} \\ \vdots \\ \frac{1}{q} \end{array} \right) \right].$$

Dann kann  $W = W_1$  als disjunkte Vereinigung von  $q^n$  halboffenen Würfeln der Form  $s + W_q$ ,  $s \in \mathbb{Q}^n$  geschrieben werden. Wegen der Translationsinvarianz ist dann  $\mu(s + W_q) = \mu(W_q)$ . Damit gilt

$$\mu(W_q) = \frac{1}{q^n} = \lambda(W_q).$$

Damit ist auch  $\mu(I) = \lambda(I)$ .

Sei  $\mathcal{E}_{rat}$  die Menge der elementaren Mengen, die eine disjunkte Zerlegung in endlich viele halboffene Intervalle mit rationalen Kantenlängen zulassen. Dann ist klar: Für alle  $E \in \mathcal{E}_{rat}$  gilt

$$\mu(E) = \lambda(E).$$

Schließlich kann jede offene Menge als abzählbare, disjunkte Vereinigung elementarer Mengen in  $\mathcal{E}_{rat}$  geschrieben werden: Sei  $O \subset \mathbb{R}^n$  offen, betrachte

$$\mathcal{I} = \left\{ I = [q_1, q_2) \mid q_i \in \mathbb{Q}^n \text{ und } I \subset O \right\}.$$

Dann ist  $\mathcal{I}$  abzählbar und überdeckt  $O$ , d. h.

$$\mathcal{I} = \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Setze  $E_1 = I_1$  und

$$E_{k+1} = I_k \setminus \left( \bigcup_{j=1}^k I_j \right).$$

Dann ist jedes  $E_m \in \mathcal{E}_{rat}$  und  $\mu(E_m) = \lambda(E_m)$ . Wegen

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = O$$

gilt

$$\mu(O) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_k) = \lambda(O).$$

Damit folgt auch für jede abgeschlossene Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  die Gleichheit  $\mu(K) = \lambda(K)$ . Ist schließlich  $L \in \mathfrak{L}$ , so gibt es zu  $\varepsilon > 0$  eine offene Menge  $O$  und eine abgeschlossene Menge  $C$  mit  $C \subset L \subset O$  und  $\lambda(O) - \lambda(C) = \lambda(O \setminus C) < \varepsilon$ . Nun ist

$$\mu(C) = \lambda(C) \leq \lambda(L) \leq \lambda(O) = \mu(O)$$

und

$$\mu(C) \leq \mu(L) \leq \mu(O).$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt  $\lambda(L) = \mu(L)$ . □

### Korollar 13.2.2 (Translationsinvariante Maße)

Für ein translationsinvariantes Maß  $\mu$  auf der Borel-Algebra  $\mathfrak{B}^n$  mit

$$\mu \left( \left[ \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right] \right) = a > 0$$

gilt  $\mu = a\lambda$ .

*Beweis.* Das Maß  $\tilde{\mu} = \frac{1}{a}\mu$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 13.2.1. □

**Korollar 13.2.3 (Charakterisierung und Eindeutigkeit translationsinvarianter Maße)**

Ein translationsinvariantes Maß  $\mu$  auf der Borel-Algebra  $\mathfrak{B}$  bzw. der Lebesgue-Algebra  $\mathfrak{L}$  ist genau dann ein Vielfaches des Borel-Lebesgueschen bzw. des Lebesgueschen Maßes  $\lambda$ , d. h.  $\mu = a\lambda$ , wenn diese Gleichung für ein Kompaktum  $K$  (und damit für alle Kompakta  $K$ ) gilt mit  $\lambda(K) \neq 0$ .

*Beweis.* Folgt aus dem Beweis zum letzten Korollar. □

**Definition 13.2.4 (Orthogonale Abbildung)**

Eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt orthogonal, wenn für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

**Lemma 13.2.5 (Charakterisierung orthogonaler Abbildungen)**

1. Eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann orthogonal, wenn gilt

$$A^T A = \mathbb{1}.$$

2. Für jede orthogonale Abbildung  $A$  gilt  $|\det(A)| = 1$ .

*Beweis.* 1.  $A^T A = \mathbb{1}$  impliziert

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Umgekehrt ist

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle,$$

so ist

$$\langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\langle A^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Dies heißt aber

$$A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Also  $A^T A = \mathbb{1}$ .

2. Für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$A^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Also hat man

$$\det(A^T A) = \det(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}) = 1.$$

Mit

$$\det(A^T A) = \det(A)^2 = 1$$

folgt  $|\det(A)| = 1$ . □

### Definition 13.2.6 (Gruppen, Drehungen und Bewegungen)

1. Die Menge aller orthogonalen linearen Abbildungen wird als  $\mathbf{O}(n)$  bezeichnet.
2. Die orthogonalen Abbildungen  $A$  mit  $\det(A) = 1$  nennt man speziell orthogonal, die Menge solcher Abbildungen wird mit  $\mathbf{SO}(n)$  bezeichnet. Elemente von  $\mathbf{SO}(n)$  werden auch als Drehungen bezeichnet.
3. Eine affin lineare Abbildung  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die aus der Hintereinanderausführung einer linearen orthogonalen Abbildung und einer Translation entsteht heißt euklidisch, die Menge der euklidischen Abbildungen wird mit  $\mathbf{E}(n)$  bezeichnet. Elemente von  $\mathbf{E}(n)$  werden auch als Bewegungen bezeichnet.
4. Eine Abbildung heißt speziell euklidisch, wenn sie euklidisch ist, und der orthogonale Anteil speziell orthogonal ist, wir schreiben für die Menge der speziell euklidischen Abbildungen  $\mathbf{SE}(n)$ .

### Bemerkung 13.2.7 (Gruppeneigenschaft)

Man prüft leicht nach, dass die Mengen  $\mathbf{O}(n)$ ,  $\mathbf{SO}(n)$ ,  $\mathbf{E}(n)$  und  $\mathbf{SE}(n)$  bezüglich der Hintereinanderausführung jeweils Gruppen sind,  $\mathbf{E}(n)$  wird auch als die Bewegungsgruppe von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Damit meint man, dass es aus der Menge aller Abbildungen besteht, die den metrischen Abstand je zweier Punkte erhalten.

Wir betrachten kurz die abstrakte Situation eines Maßraumes  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  und eines Messraumes  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  und einer messbaren Abbildung  $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ .

### Lemma 13.2.8 (Induziertes Maß)

In der beschriebenen Situation wird für  $A' \in \mathfrak{A}'$  durch

$$\mu'(A') = \mu(T^{-1}(A'))$$

ein Maß auf dem Messraum  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  definiert. Wir sprechen vom induzierten Maß.

*Beweis.* Durch einfaches Nachprüfen zu beweisen.  $\square$

**Definition 13.2.9 (Bildmaß)**

Das Maß, dessen Existenz in Lemma 13.2.8 nachgewiesen wird, heißt das Bildmaß von  $\mu$  unter  $T$ . Wir schreiben dafür  $T(\mu)$ .

**Satz 13.2.10 (Lebesgue-Maß ist bewegungsinvariant)**

Sowohl Borel-Lebesguesche Maß, wie auch das Lebesgue-Maß sind bewegungsinvariant, d. h. für eine Bewegung  $T \in \mathbf{E}(n)$  gilt

$$T(\lambda) = \lambda.$$

*Beweis.* Sei zunächst  $T \in \mathbf{O}(n)$ . Wir zeigen, dass  $T(\lambda)$  ein translationsinvariantes Maß auf der Borel-Algebra bzw. der Lebesgue-Algebra ist und es ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$  gibt, so dass  $\lambda(K) > 0$  und  $\lambda(K) = \mu(K)$  ist.

Zum Beweis der Translationsinvarianz betrachten wir  $B \in \mathfrak{B}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  und rechnen nach:

$$T(\lambda)(B + \mathbf{a}) = \lambda(T^{-1}(B + \mathbf{a})) = \lambda(T^{-1}(B) + T^{-1}\mathbf{a}) = \lambda(T^{-1}B) = T(\lambda)(B).$$

Wegen des Erhalts der Metrik unter  $T$  ist  $T(\overline{B_1(0)}) = \overline{B_1(0)}$ . Damit ist

$$\lambda(\overline{B_1(0)}) = T(\lambda)(\overline{B_1(0)}).$$

Damit ist  $T(\lambda) = \lambda$ .

Im allgemeinen Fall hat  $T$  für  $A \in \mathbf{O}(n)$  die Form  $T\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ . Für  $B \in \mathfrak{B}$  gilt

$$(T\lambda)(B) = \lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(A^{-1}(B) - A^{-1}\mathbf{b}) = \lambda(A^{-1}(B)) = \lambda(B). \quad \square$$

**Definition 13.2.11 (Determinante)**

Die Menge aller invertierbaren linearen Abbildungen  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{GL}(n)$ . Jeder solchen Abbildung ist durch  $\det(T)$  eine reelle Zahl zugeordnet.

**Satz 13.2.12 (Transformation)**

Für jede Abbildung  $T \in \mathbf{GL}(n)$  gilt

$$T(\lambda) = \frac{1}{|\det(T)|} \lambda.$$

Hier bezeichnet  $\lambda$  das Borel-Lebesguesche Maß oder das Borel-Maß.

*Beweis.*  $T(\lambda)$  ist translationsinvariant, also ist  $T(\lambda) = a_T \lambda$ , wobei  $a_T$  eine nicht-negative reelle Zahl ist. Insbesondere folgt aus  $\lambda(A) = \lambda(B)$  die Gleichheit von  $T(\lambda)(A) = T(\lambda)(B)$ . Sind nun  $S, T \in \mathbf{GL}(n)$ , so sei

$$s = |a_S|$$

und

$$W(S) = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt[n]{s} \\ \vdots \\ \sqrt[n]{s} \end{pmatrix} \right] = W_{s^{\frac{1}{n}}}$$

und entsprechend seien  $t$  und  $W(T)$ . Die Konstruktion von  $W(S)$  bzw.  $W(T)$  ist gerade so, dass

$$\lambda(W(S)) = \lambda(S^{-1}(W_1)), \text{ bzw. } \lambda(W(T)) = \lambda(T^{-1}(W_1)).$$

Nun ist  $W(S) = \sqrt[n]{s}W_1$  und  $W_T = \sqrt[n]{t}W_1$ . Für jede messbare Teilmenge  $K$  von  $\mathbb{R}^n$  gilt für  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  und mit  $\alpha K = \left\{ \alpha \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in K \right\}$

$$\lambda(\alpha K) = \alpha^n \lambda(K).$$

Dies sieht man am leichtesten dadurch, dass der linearen Abbildung

$$M_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \mapsto \alpha \mathbf{x}$$

ein Maß  $M_\alpha(\lambda)$  zugeordnet wird, welches translationsinvariant ist, und so dass für  $W_1$  gilt

$$M_\alpha(\lambda)(W_1) = \lambda(W_{\alpha^{-1}}) = \alpha^{-n}.$$

Dann folgt

$$(S \circ T)(\lambda) = a_{S \circ T}(\lambda),$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\lambda)(W_1) &= S(T(\lambda))(W_1) = T(\lambda)(S^{-1}(W_1)) \\ &= T(\lambda)(W(S)) = \lambda(T^{-1}W(S)) \\ &= \lambda(T^{-1}(\sqrt[n]{s}W_1)) \\ &= s\lambda(T^{-1}W_1) \\ &= s\lambda(W_T) \\ &= s\lambda(\sqrt[n]{t}W_1) \\ &= st\lambda(W_1) \\ &= st. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt dann

$$(S \circ T)(\lambda) = ts\lambda$$

und die Abbildung

$$\tau : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : S \mapsto s$$

ist ein *Gruppenhomomorphismus*  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Mit  $\tau(r\mathbb{1}) = |r|^{-n}$  ist dann (vergleiche entsprechende Aussagen aus der Linearen Algebra)  $\tau(S) = \frac{1}{|\det(S)|}$  (beachte  $\tau > 0$ ).  $\square$

Wir sehen nun den Zusammenhang zwischen der Transformation des Lebesgue-Maßes einer Menge unter linearen Abbildungen und der Determinante dieser Abbildung. Wir können damit die Determinante interpretieren als Rauminhalt von  $T(W_1)$ , dies ist für eine **anschauliche Deutung** der Determinante eine zentrale Aussage. Der Zusammenhang zwischen Determinante und der Transformation des Maßes besteht auch infinitesimal: Wir können dies als Transformation eines Maßes unter Diffeomorphismen (vgl. Definition 9.2.8) schreiben, was vielleicht der bisherigen Darstellung am besten entsprechen würde, wir können aber auch gleich die Transformation von Integralen beschreiben, was für tatsächliche Berechnungen von Integralen und auch für Anwendungen die zentrale Formel ergibt. Wir wollen den zweiten Weg gehen.

**Satz 13.2.13 (Transformationsatz)**

*Es seien  $X, Y$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ,  $\psi : X \rightarrow Y$  sei ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann integrierbar, wenn  $(f \circ \psi) |\det \psi'|$  über  $X$  integrierbar ist. Es gilt dann die Transformationsformel*

$$\int_X (f \circ \psi) |\det \psi'| \, d\mathbf{x} = \int_Y f \, d\mathbf{y}.$$

Wir zeigen vorweg einige Teilaussagen und formulieren diese als eigene Resultate in Form von Lemmata und Hilfssätzen.

**Lemma 13.2.14 (Nullmengen und Lipschitz-stetige Abbildungen)**

*Ist  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge und  $L : N \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz-stetig (vgl. Definition 8.2.3.5), so ist auch  $L(N)$  eine Nullmenge.*

*Beweis.* Sei  $K$  die Lipschitzkonstante von  $L$  bezüglich der Metrik  $d_\infty$ , d. h. es gilt

$$\|L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{y})\|_\infty \leq K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty.$$

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine abzählbare Überdeckung  $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $N$  mit halboffenen Intervallen  $Q_k = [a_k, b_k)$  mit

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) < \frac{\varepsilon}{2^n K^n}.$$

Dann ist für  $\mathbf{x} \in N \cap Q_k$  das Bild in  $L(N \cap Q_k)$ , also  $L(x) \in L(N \cap Q_k)$ ,  $d_\infty(L\mathbf{x}, L\mathbf{y}) \leq Kd_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  und  $L(\mathbf{y}) \in B_{Kd_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(L(\mathbf{x}))$ . Damit ist

$$\lambda(L(N \cap Q_k)) \leq 2^n K^n \lambda(Q_k).$$

Insbesondere gilt  $L(N) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L(Q_n \cap N)$ . Damit haben wir

$$\lambda(L(N)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(L(N \cap Q_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n K^n \lambda(Q_n) = 2^n K^n \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(Q_n) = \varepsilon. \quad \square$$

**Korollar 13.2.15 ( $C^1$ -Bilder von Nullmengen sind Nullmengen)**

*Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $N \subset U$  eine Nullmenge und  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung, so ist auch  $\psi(N)$  eine Nullmenge.*

*Beweis.* Wir wählen kompakte Quader (abgeschlossene Intervalle)  $Q_k$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ . (Beachte: Wir verlangen nicht die Disjunktheit der  $Q_k$ , eine solche Kollektion von Quadern erhält man z. B. auf folgende Weise: Wir wissen bereits, dass wir  $U$  mit einer abzählbaren Menge halboffener Intervalle ausschöpfen können, indem wir die Intervalle

$$\left\{ [q_1, q_2) \mid q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^n, [q_1, q_2) \subset U \right\}$$

betrachten. Wir zählen diese ab,  $S_j, j \in \mathbb{N}$  und betrachten nun disjunkte elementare Mengen der Form

$$Z_j = S_j \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} S_i \right).$$

Die  $Z_j$  bilden eine disjunkte, abzählbare Familie halboffener Mengen. Jede dieser halboffenen Mengen kann wieder als endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen geschrieben werden. Seien  $P_j, j \in \mathbb{N}$  diese halboffenen Intervalle mit

$$U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_j.$$

Setze  $Q_k = \overline{P_k}$ .) Dann ist

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \cap N$$

und  $\psi_k|_{Q_k}$  sind auf  $Q_k$  Lipschitzstetig mit einer Lipschitzkonstanten

$$K = \sup \left\{ \|D\psi(\mathbf{x})\| \mid \mathbf{x} \in Q_k \right\}.$$

Dann ist  $\psi_k(Q_k \cap N)$  eine Nullmenge und damit  $N$  als abzählbare Vereinigung solcher Mengen.  $\square$

Der Schlüssel zum eigentlichen Beweis liegt in den beiden folgenden Lemmata, die uns beschreiben, wie wir das Maß des Bildes von kompakten Würfeln unter Diffeomorphismen abschätzen können.

**Lemma 13.2.16 (Maßänderung unter Diffeomorphismen, Abschätzung)**

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus, und  $W \subset U$  ein kompaktes, abgeschlossenes Intervall, d. h.  $W = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  für ein Paar  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ . Dann gilt

$$\lambda(\psi(W)) \leq \sup \left\{ |\det(D\psi(\mathbf{x}))| \mid \mathbf{x} \in W \right\} \lambda(W).$$

*Beweis.* Es ist  $\psi(W)$  kompakt, insbesondere messbar. Ist  $\lambda(W) = 0$ , so ist aufgrund des Korollars 13.2.15 nichts zu zeigen. Falls  $\lambda(W) \neq 0$  ist, gibt es eine Zahl  $c > 0$  mit

$$\lambda(\psi(W)) = c\lambda(W).$$

Sukzessive unterteilen wir  $W$  durch Hyperebenen, die jeweils auf Koordinatenachsen  $x_k$  senkrecht stehen in  $2^n$  Quader. Unter den entstehenden Quadern gibt es mindestens einen, sagen wir  $W_1$  mit

$$\lambda(\psi(W_1)) \geq c\lambda(W_1).$$

(Ansonsten hat man die umgekehrte Ungleichung.) Wir iterieren diesen Prozess und erhalten eine Folge  $\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von Quadern mit  $W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_k \supset$  mit

$$\lambda(\psi(W_i)) \geq c\lambda(W_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es einen Punkt  $\tilde{\mathbf{a}} \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i$  (Existenz ist klar!) und setze  $\tilde{\mathbf{b}} = \psi(\tilde{\mathbf{a}})$ . In jedem  $W_k$  gibt es einen Mittelpunkt  $\mathbf{m}_k$  und

$$W_k = \left\{ \mathbf{x} \in U \mid |x_i - m_k^i| < 2^{-k} d_i \right\},$$

wobei  $d_i$  die Kantenlänge von  $W$  in der  $i$ -ten Koordinate ist. Wir setzen oBdA  $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{b}} = 0$  und haben damit  $m_k^i < 2^{-k} d_i$ .

$D\psi$  ist invertierbar, daher kann man  $\psi$  in der folgenden Form darstellen

$$\psi(\mathbf{x}) = D\psi(0)(\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|r(\mathbf{x})),$$

wobei  $r(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ , wenn  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ .

Nun gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Index  $k(\varepsilon)$ , so dass gilt

$$V_k = \left\{ \mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|r(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in W_k \right\}$$

ist in

$$W_k^\varepsilon = \left\{ \mathbf{u} \mid |u^i - m_k^i| < 2^{-k} d_i (1 + \varepsilon) \right\}.$$

Nun folgt aus  $V_k \subset W_k^\varepsilon$ , dass

$$\psi(W_k) = D\psi(0)(V_k) \subset D\psi(W_k^\varepsilon).$$

Daraus folgt dann

$$\lambda(\psi(W_k)) \leq (1 + \varepsilon)^n |\det D\psi(0)| \lambda(W_k).$$

Ist unsere ursprüngliche Behauptung falsch, so ist

$$c > \sup \left\{ |\det D\psi(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in W \right\} \geq |\det D\psi(0)|.$$

Wähle nun  $\varepsilon > 0$  so klein, dass

$$(1 + \varepsilon)^n |\det D\psi(0)| < c.$$

Dann gilt für  $W_{k(\varepsilon)}$

$$\lambda(\psi(W_k)) < c\lambda(W_k). \quad \square$$

**Definition 13.2.17 (Inneres)**

In einem metrischen Raum  $(X, d)$  sei für eine Menge  $Y \subset X$  die Menge  $Y^\circ$  definiert durch

$$Y^\circ = \bigcup \left\{ O \mid O \subset Y, O \text{ ist offen} \right\}.$$

$Y^\circ$  heißt das Innere oder auch der offene Kern von  $Y$ .

**Aufgabe 13.2.18 (Inneres ist offen)**

- (a)  $Y^\circ$  ist offen und umfasst jede offene Menge in  $Y$ . (Es ist die größte offene Menge in  $Y$ .)  
 (b) Es gibt kompakte Mengen  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\lambda(K \setminus K^\circ) \neq 0$ .

**Lemma 13.2.19 (Diffeomorphismus und Maß)**

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus, und  $K \subset U$  eine kompakte Menge mit  $\lambda(K \setminus K^\circ) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \inf \left\{ |\det(D\psi(\mathbf{x}))| \mid \mathbf{x} \in K \right\} \lambda(K) &\leq \lambda(\psi(K)) \\ &\leq \sup \left\{ |\det(D\psi(\mathbf{x}))| \mid \mathbf{x} \in K \right\} \lambda(K). \end{aligned}$$

*Beweis.* Dieses Lemma folgt aus dem vorherigen. Im ersten Teil, wird  $K^\circ$  durch eine abzählbare Folge von kompakten Quadern  $Q_k$  ausgeschöpft, die höchstens längs Kanten schneiden. Dann ist

$$\lambda(K) = \lambda(K^\circ) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k).$$

Nun ist mit  $W = \psi(K)$  auch

$$W^\circ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \psi(Q_k),$$

denn  $W^\circ \subset W$  ist offen und daher  $\psi^{-1}(W^\circ) \subset \psi^{-1}(W) = K$  offen. Damit ist  $\psi^{-1}(W^\circ) \subset K^\circ$ . Da  $\psi$  ein Diffeomorphismus ist, ist auch  $\psi(K^\circ)$  offen und enthalten in  $W$ , also ist  $W^\circ = \psi(K^\circ)$ .

Weiter ist

$$\psi(Q_j) \cap \psi(Q_k) = \psi(Q_j \cap Q_k)$$

eine Nullmenge. Damit ist

$$\lambda(W) = \lambda(W^\circ) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(\psi(Q_k)).$$

Für jeden solchen Würfel schätzen wir nun ab

$$\lambda(\psi(Q_k)) \leq \sup |\det D\psi(\mathbf{x})| \lambda(Q_k), \quad \mathbf{x} \in Q_k.$$

Daraus folgt die rechte Seite der Behauptung. Die linke erhält man durch Übergang zu  $\psi^{-1}$ .  $\square$

### Definition 13.2.20 (Träger)

1. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ) eine Funktion. Der Träger von  $f$  ist die Menge

$$\text{supp } f = \overline{\left\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \right\}}.$$

2. Ist  $\text{supp } f$  kompakt, so sagt man  $f$  habe kompakten Träger
3. Die Menge der stetigen Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  wird mit  $C_0(X, \mathbb{R})$  (oder auch kürzer mit  $C_0(X)$ ) bezeichnet. Entsprechendes gilt für  $C_0(X, \mathbb{C})$ .

### Lemma 13.2.21 (Transformationssatz für Treppenfunktionen)

Der Transformationssatz Satz 13.2.13 gilt für Treppenfunktionen mit kompaktem Träger in  $Y$ .

*Beweis.* Wir beachten zunächst, dass für eine kompakte Menge  $K \subset Y$  gilt,  $\psi^{-1}(K)$  ist kompakt. (Offensichtlich folgt aus der Stetigkeit und dem Charakterisierungssatz 4.2.6, dass  $\psi^{-1}(K)$  abgeschlossen ist und für eine beliebige offene Überdeckung von  $\psi^{-1}(K)$  bildet die Menge der Bildmengen wieder eine Überdeckung von  $K$ , daraus können endlich viele ausgewählt werden, deren Urbilder die Menge  $\psi^{-1}(K)$  überdecken und Elemente der ursprünglichen Überdeckung sind, da ja  $\psi$  injektiv ist.)

Aufgrund der Linearität des Integrals reicht es das Lemma für eine charakteristische Funktion  $\chi_K$  einer kompakten Menge  $K \subset Y$  zu beweisen. Nun ist  $\chi_K \circ \psi \cdot |\det D\psi|$  integrierbar, da es außerhalb von  $\psi^{-1}(K)$  verschwindet und  $|\det D\psi|$  auf dieser Menge stetig ist. Wir müssen also nur zeigen

$$\int_{\psi^{-1}(K)} |\det D\psi(\mathbf{x})| d\lambda = \int_K d\lambda.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben, wegen der Stetigkeit von  $|\det D\psi|$  ist dieses auf  $\psi^{-1}(K)$  gleichmäßig stetig. Sei  $\delta > 0$  so gewählt, dass für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \psi^{-1}(K)$  mit  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$  folgt

$$|\det D\psi(\mathbf{x}) - \det D\psi(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Wähle eine Überdeckung von  $\psi^{-1}(K)$  mit Quadern  $Q_k$ , für die je zwei Punkte Abstand höchstens  $\delta$  haben, so dass bereits die Menge der  $Q_k^o$  die Menge  $\psi^{-1}(K)$  überdeckt. Dann genügen endlich viele  $Q_{k_1}, \dots, Q_{k_m}$  für eine Überdeckung. Nun ist

$$\sup_{\mathbf{x} \in Q_k \cap K} |\det D\psi(\mathbf{x})| - \inf_{\mathbf{x} \in Q_k \cap K} |\det D\psi(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

und damit folgt die oben angegebene Formel. □

**Lemma 13.2.22 (Approximation mit Treppenfunktion mit kompaktem Träger)**

*Zu jeder integrierbaren Funktion  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Treppenfunktion  $\varphi$  mit kompaktem Träger mit*

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon.$$

*Beweis.* Siehe Übungen. □

*Beweis des Transformationssatzes 13.2.13.* Folgt nun einfach aus der Approximation durch Treppenfunktionen. □

**Beispiel 13.2.23 (Polarkoordinaten in Ebene und Raum)**

Der Transformationssatz erlaubt uns die üblichen Koordinaten, durch uns besser für das jeweilig vorliegende Problem zu ersetzen. Ein typischen Beispiel für dieses Vorgehen sind die *Polarkoordinaten*.

1. Der ebene Fall: Wir betrachten die Abbildung

$$\Pi_2 : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x, 0) \mid x \leq 0 \right\} : (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist offenbar differenzierbar, die Jacobi-Matrix ist gegeben durch

$$D\Pi_2(r_0, \varphi_0) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -r_0 \sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & r_0 \cos \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist einfach  $r_0$  und ist überall im Definitionsbereich von 0 verschieden. Damit ist  $\Pi_2$  überall (lokal) invertierbar. Die Abbildung ist im angegebenen Bereich injektiv und auf das angegebene Bild surjektiv, damit ein Diffeomorphismus. Der Schnitt einer kompakten Menge mit  $N = \left\{ (0, y) \mid y \leq 0 \right\}$  ist eine Nullmenge, damit besagt der Transformationssatz, dass für eine integrierbare Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ ) gilt

$$\int_K f \, d\lambda = \int_{K \setminus N} f \, d\lambda = \int_{\Pi_2^{-1}(K \setminus N)} r f \circ \Pi_2(r, \varphi) \, d(r, \varphi).$$

Die Notation deutet darauf hin, dass wir das letzte Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes auf  $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$  integrieren.

2. Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ : In diesem Fall definieren wir  $\Pi_3$  folgendermaßen: Seien

$$Q = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

und

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid t \geq 0, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Setze

$$\Pi_3 : Q \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{N} : (r, \varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \psi \\ r \sin \varphi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Hier ist die Jacobi-Matrix der Ableitung gegeben durch

$$D\Pi_3(r_0, \varphi_0, \psi_0) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \cos \psi_0 & -r_0 \sin \varphi_0 \cos \psi_0 & -r_0 \cos \varphi_0 \sin \psi_0 \\ \sin \varphi_0 \cos \psi_0 & r_0 \cos \varphi_0 \cos \psi_0 & -r_0 \sin \varphi_0 \sin \psi_0 \\ \sin \psi_0 & 0 & r_0 \cos \psi_0 \end{pmatrix}$$

und für deren Determinante erhält man

$$\det D\Pi_3(r_0, \varphi_0, \psi_0) = r_0^2 \cos \psi_0.$$

Diese ist im angegebenen Bereich nirgends 0, daher ist  $\Pi_3$  lokal invertierbar. Auf dem angegebenen Bereich rechnet man leicht die Injektivität von  $\Pi_3$  aus, damit hat man die Umkehrbarkeit und schließlich die Surjektivität auf die angegebene Menge. Entsprechend der oben angegebenen Formel kann man jetzt auch Integrale auf dem  $\mathbb{R}^3$  umschreiben in Integrale bezüglich der Polarkoordinaten.

Veranschaulicht werden die Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$  durch die Koordinaten auf der Erde. Ist  $r > 0$  konstant hat man eine Kugel vor sich, festes  $\psi$  ergibt die Breitenkreise, wobei  $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Festes  $\varphi$  ergibt die Längengrade  $\varphi \in (\pi, -\pi)$ . Auf der Kugel werden mit dieser Wahl keine Orte auf 180sten Längengrad (*Datumsgrenze*) angegeben, dafür muss  $\varphi$  auch den Wert  $\pi$  oder  $-\pi$  annehmen können, für die Integration spielt dies jedoch keine Rolle.

3. Polarkoordinaten im allgemeinen Fall: Wir wollen nun Polarkoordinaten auf dem  $\mathbb{R}^n$  einführen. Dazu nehmen wir an, dass wir Polarkoordinaten

$$\Pi_{n-1} : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-3} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$

mit  $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \Pi_{n-1}((0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-3})$  ist Nullmenge auf dem  $\mathbb{R}^{n-1}$ , bereits kennen. Im allgemeinen Fall definieren wir Polarkoordinaten rekursiv, d. h. wir betrachten  $\mathbb{R}^{n-1}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$

und setzen

$$\begin{aligned} \Pi_n &: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ &: \Pi_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} \Pi_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Jacobi-Matrix zu

$$\begin{aligned} &D\Pi_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ &= \begin{pmatrix} D\Pi_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cos \varphi_{n-1} & -\Pi_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \sin \varphi_{n-1} \\ \sin \varphi_{n-1} & 0 & \dots & 0 & r \cos \varphi_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion (Aufgabe!) zeigt man

$$|\det D\Pi_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})| = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \cos^{j-1} \varphi_j.$$

$\Pi_n$  ist injektiv und surjektiv auf  $\mathbb{R}^n \setminus N$ , dabei ist  $N$  die oben genannten Nullmenge.

### 13.3 Der Satz von Fubini

Der Satz von Fubini macht eine sehr wichtige theoretische Aussage für Integrale auf Maßräumen, welche Produkte von anderen Maßräumen sind. Wir beschränken uns auf den Fall, dass beide Räume Teilmengen eines euklidischen Raumes sind.

Wir beginnen mit einem wichtigen Satz über parameterabhängige Integrale.

Im Folgenden sei  $(X, d)$  ein vollständiger, metrischer Raum,  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Abbildung. Für jedes  $x \in X$ ,  $y \in \Omega$  setzen wir die Funktionen

$$f_x : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto f(x, y) \text{ und } f^y : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x, y).$$

Für jedes  $x \in X$  sei  $f_x$  integrierbar. Wir definieren eine Funktion

$$F : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\Omega} f_x \, d\mu.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende Satz.

**Satz 13.3.1 (Stetigkeit der bzgl. einer Variablen integrierten Funktion)**

Ist für jedes  $y \in \Omega \setminus N$ , wobei  $N$  eine Nullmenge ist, die Funktion  $f^y : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gibt es eine integrierbare Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$|f_x(y)| \leq g(y) \text{ für alle } x \text{ (f.ü.).}$$

Dann ist  $F$  stetig.

*Beweis.* Wir nutzen das Folgenkriterium aus Satz 4.2.6. Sei  $x_0 \in X$  und  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Setze für  $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto f_{x_n}(y).$$

Dann ist für alle  $y \in \Omega \setminus N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{x_n}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y) = f(x_0, y),$$

da  $f^y$  stetig dort ist. Weiterhin ist  $|f_n| \leq g$  (f.ü.). Damit können wir den Satz von der dominierten Konvergenz (Satz 12.7.5) anwenden und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f_0 \, d\mu$$

oder anders formuliert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x_n, \cdot) \, d\mu = \int_{\Omega} f(x_0, \cdot) \, d\mu.$$

Dies heißt aber  $F(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ . □

Dieser Satz hat eine Vielzahl von Anwendungen, auf die wir in den Übungen genauer eingehen werden.

Ein entsprechender Satz gilt auch für die Differenzierbarkeit von  $F$ , wenn  $f$  entsprechend differenzierbar ist. Wir formulieren den Satz und verschieben den Beweis auf die Übungen.

**Satz 13.3.2 (Partiale Integration und stetige partielle Differenzierbarkeit)**

Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $N$  eine Nullmenge und für jedes  $y \in \Omega \setminus N$  die Funktion  $f^y : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell nach  $x_i$  differenzierbar und gibt es

eine integrierbare Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\mathbf{x}}(y) \right| \leq g(y) \text{ f\"ur alle } \mathbf{x} \text{ (f\"u).}$$

Dann ist  $F$  stetig partiell nach  $x_i$  differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} D_{x_i} f \, d\mu.$$

Wir kommen nun zum Satz von Fubini, dem entscheidenden Hilfsmittel, um mehrfache Integrale durch eine Folge von eindimensionalen Integrationen zu berechnen.

**Satz 13.3.3 (Fubini)**

Es seien  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  messbare Mengen. Dann ist  $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  messbar. F\"ur eine integrierbare Funktion  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

1. Es gibt eine Nullmenge  $N \subset Y$ , so dass f\"ur  $y \in Y \setminus N$  die Funktion  $f_y : X \rightarrow \mathbb{R}$  (Bezeichnung wie oben) integrierbar \"uber  $X$  ist.
2. Wir setzen f\"ur  $y \in Y$  die Funktion  $F(y)$  fest durch die Definition:

$$F(y) = \begin{cases} \int_X f_y \, d\lambda_n & \text{f\"ur } y \notin N \\ 0 & \text{f\"ur } y \in N \end{cases}$$

Dann ist  $F$  auf  $Y$  integrierbar und es gilt

$$\int_Y F \, d\lambda_m = \int_{X \times Y} f \, d\lambda_{n \times m}.$$

Bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen, beweisen wir zwei Lemmata, von denen das erste schon wesentliche Erkenntnisse enth\"alt.

**Lemma 13.3.4 (Nullmengen in Produktr\"aumen)**

Zu jeder Nullmenge  $Z \subset X \times Y$  gibt es eine Nullmenge  $N \subset Y$ , so dass f\"ur  $y \notin N$  gilt

$$Z_y = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid (\mathbf{x}, y) \in Z \right\}$$

ist eine Nullmenge in  $X$ .

*Beweis.* Sei  $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver Zahlen  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  mit  $j \rightarrow \infty$  gegeben, dann gibt es eine \"Uberdeckung von  $Z$  mit Quadern  $Q_k^j$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k^j) < \varepsilon_j$ .

Jeder Quader  $Q_k^j$  hat die Form

$$Q_k^j = Q_k^{X,j} \times Q_k^{Y,j}.$$

Offenkundig ist es nicht klar, dass die Lebesgue-Maße in  $X$  bzw.  $Y$  dieser Menge klein sein müssen, denn wir betrachten ja Produkte. Wie kommen wir nun dazu, dass bis auf eine Nullmenge die Menge  $Z_{\mathbf{y}}$  eine Nullmenge ist (dass hier die Formulierung mit der Nullmenge  $N$  in der angeführten Weise nötig ist, beweist bereits die Nullmenge  $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$ ). Sei  $\mathbf{y} \in Y$ . Setze  $f(\mathbf{y}) = \lambda_X^*(Z_{\mathbf{y}})$ . Dann ist  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}_{\text{erw}}$ ,  $f \geq 0$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  gilt

$$\chi_{Z_{\mathbf{y}}} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{Q_k^{X,j}} \chi_{Q_k^{Y,j}}(\mathbf{y}), \quad (13.1)$$

denn  $\chi_{Z_{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$  und  $\chi_{Z_{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}) = 1$  impliziert, dass  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z$ , dann ist aber  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Q_k^j$  für ein  $k$  und  $\chi_{Q_k^{X,j}}(\mathbf{x}) \chi_{Q_k^{Y,j}}(\mathbf{y}) = 1$ , also folgt die Abschätzung (13.1). Die Funktion  $h = \inf_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(Q_k^{X,j}) \chi_{Q_k^{Y,j}}$  ist messbar (als Infimum messbarer Funktionen),  $f \leq h$  und für  $j \in \mathbb{N}$  gilt

$$h(\mathbf{y}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{Q_k^{Y,j}}(\mathbf{y}) \lambda_n(Q_k^{X,j}).$$

Dann ist (monotone Konvergenz)

$$\int_Y h \, d\lambda_m \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(Q_k^{X,j}) \lambda_m(Q_k^{Y,j}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k^j) < \varepsilon_j.$$

Daraus folgt die Integrierbarkeit von  $h$ . Da dies für jedes  $\varepsilon_j > 0$  gilt, folgt

$$\int_Y h \, d\lambda_m = 0.$$

Also ist  $h = 0$  (f.ü.). Dann ist  $f = 0$  (f.ü.). Sei  $N$  die Menge der  $\mathbf{y}$  mit  $\lambda(Z_{\mathbf{y}}) \neq 0$ . Dann ist für  $\mathbf{y} \in Y \setminus N$  der Wert  $\lambda^*(Z_{\mathbf{y}}) = 0$ . Damit ist die Aussage gezeigt.  $\square$

### Lemma 13.3.5 (Produkte, Algebren und Maße)

Seien  $\mathfrak{B}^{n+m}$  die Borel-Algebra auf  $\mathbb{R}^{n+m}$  und  $\mathfrak{B}^n$  bzw.  $\mathfrak{B}^m$  die Borel-Algebren auf  $\mathbb{R}^n$  bzw. auf  $\mathbb{R}^m$ , entsprechend seien  $\lambda_{n+m}, \lambda_n, \lambda_m$  das Borel-Lebesguesche Maß bzw. das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$ . Dann gilt

1.  $\mathfrak{B}^{n+m} = \sigma(\mathfrak{B}^n \times \mathfrak{B}^m)$ .  $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m \neq \mathcal{L}^{n+m}$ .
2. Ist  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$   $\mathfrak{B}$ -messbar, so sind für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  bzw. alle

$y \in \mathbb{R}^m$  die Mengen

$$A_{\mathbf{x}} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \right\}, \quad A^{\mathbf{y}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \right\}$$

Borel-messbar.

3. Die Funktionen  $\mathbf{x} \mapsto \lambda_m(A_{\mathbf{x}})$  bzw.  $\mathbf{y} \mapsto \lambda_n(A^{\mathbf{y}})$  sind messbar und

4.  $\nu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(A_{\mathbf{x}}) d\lambda_n$  bzw.  $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(A^{\mathbf{y}}) d\lambda_m$  sind Maße auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und es gilt

$$\lambda_{n+m} = \nu = \mu.$$

*Beweis.* 1. Klar ist  $\mathfrak{B}^n \times \mathfrak{B}^m \subset \mathfrak{B}^{n+m}$ . Um zu zeigen, dass  $\mathfrak{B}^{n+m} \subset \sigma(\mathfrak{B}^n \times \mathfrak{B}^m)$ , reicht es zu zeigen, dass halboffene Intervalle  $I = I_n \times I_m$  in  $\mathbb{R}^{n+m}$  als Produkte von halboffenen Intervallen  $I_n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $I_m \subset \mathbb{R}^m$  geschrieben werden können und dass  $\sigma(\mathfrak{C}) = \mathfrak{B}$  in jeder Dimension gilt. Die zweite Aussage ist einfach zu sehen: Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  nicht messbar,  $Y \in \mathcal{L}^m$ ,  $\lambda_m(Y) = 0$ , so ist  $\mathcal{L}^{n+m} \ni X \times Y \notin \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ .

2. Wir betrachten die Menge  $\mathfrak{A} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^{n+m} \mid \forall y : A^y \in \mathfrak{L}^n \right\}$  aller Teilmengen von  $\mathbb{R}^{n+m}$ , so dass für alle  $y \in \mathbb{R}^m$  gilt  $A^y \in \mathfrak{L}^n$ . Darin sind alle halboffenen Intervalle in  $\mathbb{R}^{n+m}$  enthalten. Man prüft leicht nach, dass  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist und damit ist  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}^{n+m}$ .

3. Wir betrachten alle Mengen  $R \in \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ , so dass für  $R$  die Aussagen aus Teil 3 des Lemmas gelten und darüber hinaus mit den Maßen  $\nu, \mu$ , die im Teil 4 definiert werden, gilt

$$\int_X \nu(R_{\mathbf{x}}) d\mu = \int_Y \mu(R^{\mathbf{y}}) d\nu.$$

Die Menge aller solchen Mengen  $R$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}$ . Im ersten Schritt überlegen wir, dass jedes Produkt  $R = A \times B$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$ ,  $A, B \in \mathcal{L}^n$ - (bzw.  $\mathcal{L}^m$ -messbar) in  $\mathcal{F}$  ist. Dies ist aber elementar.

Der zweite Schritt besteht darin, dass endliche Vereinigungen von solchen Produkten in  $\mathcal{F}$  sind. Dies ist aber ebenfalls elementar.

Nun betrachten wir aufsteigende Ketten  $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}$  mit  $R_j \subset R_{j+1}$  und  $R = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$ . Dann ist  $\mathbf{x} \mapsto \nu((R_j)_{\mathbf{x}})$  messbar und damit auch das Supremum. Gleiches gilt für  $\mu$ . Die Gleichheit der Integrale ist wiederum unmittelbar einsichtig. Gleiches gilt für absteigende Ketten.

Nun überlegt man sich noch: Ist  $\mathcal{A}$  eine Algebra, dann ist  $\sigma(\mathcal{A})$  aus allen Vereinigungen aufsteigender und Schnitten absteigender Ketten in  $\mathcal{A}$ .

4. Wir zeigen nur einen Fall, die anderen gehen daraus durch Abschreiben hervor: zunächst ist  $\nu$  ein Maß, wir müssen nur die  $\sigma$ -Additivität zeigen. Seien  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine disjunkte Folge von messbaren Mengen mit  $X = \bigcup_k X_k$  in  $\mathbb{R}^{n+m}$ , so ist für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  die Menge

$$X_{\mathbf{x}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X_k)_{\mathbf{x}}$$

und damit

$$\begin{aligned} \nu(X) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(X_{\mathbf{x}}) \, d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m\left(\bigcup_k (X_k)_{\mathbf{x}}\right) \, d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_k \lambda_m((X_k)_{\mathbf{x}}) \, d\lambda_n \\ &= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m((X_k)_{\mathbf{x}}) \, d\lambda_n \text{ monotone Konvergenz} \\ &= \sum_k \nu(X_k). \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\nu$  translationsinvariant, denn mit  $\mathbb{R}^{n+m} \ni \mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_m$ ,  $\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\begin{aligned} \nu(X + \mathbf{a}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m((X + \mathbf{a})_{\mathbf{x}}) \, d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m((X + \mathbf{a}_m)_{\mathbf{x} - \mathbf{a}_n}) \, d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m((X + \mathbf{a}_m)_{\mathbf{x}}) \, d\lambda_n \text{ Transformationsformel} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(X)_{\mathbf{x}} \, d\lambda_n \\ &= \nu(X). \end{aligned}$$

Da  $\nu(W_1) = 1$  ist  $\nu = \lambda$ . □

*Beweis des Satzes 13.3.3.* Sei  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar.

Aufgrund des Beweises des Satzes 13.1.9 gibt es eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_k$ , so dass außerhalb einer Nullmenge diese Treppenfunktion punktweise gegen  $f$  konvergieren mit  $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$ . Aufgrund des vorherigen Lemmas gibt es eine Nullmenge  $N_1 \subset Y$ , so dass für  $\mathbf{y} \in Y \setminus N_1$  die Folge

$$\{\varphi_k(\cdot, \mathbf{y})\}_{k \in \mathbb{N}}$$

punktweise ( $f\ddot{u}$ ) als Funktion von  $\mathbf{x}$  gegen  $f(\cdot, \mathbf{y})$  konvergiert. Setze für  $\mathbf{y} \in Y \setminus N_1$

$$g_k(\mathbf{y}) = \int_X |\varphi_{k+1}(\cdot, \mathbf{y}) - \varphi_k(\cdot, \mathbf{y})| d\lambda_X.$$

An dieser Stelle wollen wir schließen

$$\int_Y g_k d\lambda_Y = \int_{X \times Y} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| d\lambda_{X \times Y}, \quad (13.2)$$

denn der zuletzt genannte Ausdruck kann durch  $\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1$  abgeschätzt werden. Warum gilt die erste Gleichheit?

Treppenfunktionen sind Linearkombinationen charakteristischer Funktionen. Deshalb reicht es diese Gleichung (13.2) für charakteristische Funktionen zu beweisen, dann gilt wegen Teil 4 des vorigen Lemmas

$$\int_{X \times Y} \chi_K d\lambda_{n+m} = \int_{X \times Y} \chi_K d\lambda_{X \times Y} = \int_X \lambda_m(K_{\mathbf{x}}) d\lambda_n = \int_X \left( \int_Y \chi_{K_{\mathbf{x}}} d\lambda_m \right) d\lambda_n.$$

Also ist, da  $g$  durch Treppenfunktionen approximiert werden kann,

$$\int_Y g_k(\mathbf{y}) d\lambda_m = \int_{X \times Y} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| d\lambda_{X \times Y} \leq \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1.$$

Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_Y g_k d\lambda.$$

Die Folge der Partialsummen ist monoton steigend und die Integrale sind beschränkt, daher ist

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} g_k$$

integrierbar auf  $Y$ . Insbesondere gibt es eine Nullmenge  $N_2$  mit  $\sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\mathbf{y}) < \infty$  für  $\mathbf{y} \notin N_2$ . Sei  $N = N_1 \cup N_2$ . Die Folge der  $\{\varphi_k(\cdot, \mathbf{y})\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist für  $\mathbf{y} \notin N$  eine Cauchyfolge in  $L^1(X)$ . Nach dem Satz von Riesz-Fischer (Satz 13.1.9) konvergiert diese gegen eine Funktion  $h$  auf  $X$ . Dann gilt  $f = h$  ( $f\ddot{u}$ ). Insbesondere ist  $f(\cdot, \mathbf{y})$  integrierbar. Damit ist für  $y \notin N$  eine Funktion

$$F(\mathbf{y}) = \int_X f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

definiert, die gleichzeitig als Grenzwert

$$F(\mathbf{y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

geschrieben werden kann.

Damit haben wir punktweise Konvergenz der Funktionen

$$\Phi_k(\mathbf{y}) = \int_X \varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}$$

gegen  $F$ . Weiterhin ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_1$$

konvergent.

Damit ist die Folge  $\{\Phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge und konvergiert punktweise fast überall gegen eine integrierbare Funktion auf  $Y$ . Diese stimmt nach dem zuvor Gesagtem mit  $F$  überein,  $F$  ist daher integrierbar und wir erhalten die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_Y F \, d\lambda_m &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y \Phi_k \, d\lambda_m \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_k \, d\lambda_{n+m} \\ &= \int_{X \times Y} f \, d\lambda_{n+m}. \end{aligned}$$

□

# Kapitel 14

## Flächen im $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel definieren wir  $k$ -dimensionale Flächen im  $\mathbb{R}^n$ , Volumina von solchen Flächen und bestimmen Integrale auf den Flächen. Wir definieren Tangential- und Normalenräume und sprechen über Kompakta mit glattem Rand.

### Inhalt

---

14.1 Orientierung und Flächen . . . . .	81
14.2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten . . . . .	93
14.3 Tangentialräume . . . . .	101
14.4 Kompakta mit glattem Rand . . . . .	105

---

### 14.1 Orientierung und Flächen

In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff einer  $k$ -dimensionalen Fläche oder einer  $k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Es wäre natürlich auch über Mannigfaltigkeiten als abstrakte Objekte zu sprechen, denn vieles von dem, was hier gesagt wird, bleibt im allgemeineren Kontext richtig. Wir wollen aber, auch aus Zeitgründen, auf diese Form der Allgemeinheit verzichten.

Wir beginnen mit einem Begriff, der zwar anschaulich ist, dessen präzise mathematische Fassung jedoch einen Teil der Anschaulichkeit aufgibt. Er soll uns helfen den Unterschied zwischen dem Möbiusband und einem Zylindermantel zu verstehen.

**Definition 14.1.1 (Basis)**

Sei  $X$  ein reeller linearer Raum.

1. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt linear unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge  $\{u_1, \dots, u_r\} \subset U$  und Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$

*gilt*

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, r\} : \lambda_j = 0.$$

2. Eine Teilmenge  $V \subset X$  heißt erzeugend, falls für alle  $x \in X$  eine endliche Teilmenge  $\{v_1, \dots, v_{\#(V_x)}\} = V_x \subset V$  und Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\#(V_x)}$  existieren, so dass

$$x = \sum_{j=1}^{\#(V_x)} \lambda_j v_j.$$

3. Ist  $\mathcal{B} \subset X$  linear unabhängig und erzeugend, so nennen wir  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $X$ .

### Satz 14.1.2 (Mächtigkeit von Basen)

1. Jeder reelle lineare Raum  $X$  besitzt eine Basis.
2. Je zwei Basen von  $X$  sind gleichmächtig.

*Beweis.* 1. Folgt aus dem Lemma von Zorn.

2. Austauschsatz, vgl. Lineare Algebra. □

### Definition 14.1.3 (Dimension)

Die Mächtigkeit  $\#(\mathcal{B})$  nennen wir die Dimension von  $X$  und schreiben  $\dim(X) = \#(\mathcal{B})$ . Ist  $\dim X < \infty$ , so nennen wir  $X$  endlich dimensional.

### Satz 14.1.4 ( $\mathbb{R}^n$ )

Ist  $\dim X = n \in \mathbb{N}$ , so ist  $X$  isomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

### Definition 14.1.5 (geordnete Basis)

Ist  $\dim X = n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $X$ . Es sei  $\mathbf{e} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Bijektion, dann nennen wir das Paar  $(\mathcal{B}, \mathbf{e})$  eine geordnete Basis. Wir schreiben  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}(i)$ .

**Definition 14.1.6 (Prähilbertraum)**

1. Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein reeller, normierter, linearer Raum. Gibt es ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  mit

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle_X)^{\frac{1}{2}},$$

dann nennen wir das Triple  $(X, \|\cdot\|_X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  einen Prähilbertraum.

2. Mit  $d_X(x, y) = \|x - y\|_X$  bezeichnen wir die von der Norm induzierte Metrik. Ist der metrische Raum  $(X, d_X)$  vollständig, so nennen wir  $(X, \|\cdot\|_X)$  einen Banachraum.
3. Ist der metrische Raum  $(X, d_X)$  vollständig, so bezeichnen wir den Prähilbertraum  $(X, \|\cdot\|_X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  als Hilbertraum.

**Satz 14.1.7 (Gram-Schmidt)**

Sei  $X$  ein Prähilbertraum,  $\mathcal{E}$  linear unabhängig und höchstens abzählbar und sei für  $S \subset \mathbb{N}$   $e : S \rightarrow \mathcal{E}$  eine Abzählung ( $S = \mathbb{N}$  oder  $S = \{1, \dots, n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ ). Setze induktiv

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\|e_1\|_X} e_1$$

und

$$e_{n+1}^{\tilde{}} = \frac{1}{\|e_{n+1} - \sum_{j=1}^m \langle \tilde{e}_j, e_{n+1} \rangle_X\|_X} \left( e_{n+1} - \sum_{j=1}^m \langle \tilde{e}_j, e_{n+1} \rangle_X \tilde{e}_j \right).$$

Dann ist  $\{\tilde{e}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem.

**Definition 14.1.8 (Äquivalenz von geordneten Basen)**

Wir nennen zwei Basen  $B_1 = \{e_1^1, \dots, e_n^1\}$  und  $B_2 = \{e_1^2, \dots, e_n^2\}$  äquivalent, wenn die Determinante der linearen Abbildung  $L$  mit gibt mit

$$Le_k^1 = e_k^2 \text{ für } k = 1, \dots, n$$

positiv ist.

**Lemma 14.1.9 (Äquivalenzrelation zu geordneten Basen)**

1. Die in Definition 14.1.8 angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation.
2. Zwei Basen sind genau dann äquivalent, wenn gilt

$$\operatorname{sgn} \det \left( (e_1^1 \ \dots \ e_n^1) \right) = \operatorname{sgn} \det \left( (e_1^2 \ \dots \ e_n^2) \right).$$

3. Die Menge der Basen besteht aus genau zwei Klassen, die durch das Vorzeichen der Determinante aus dem vorherigen Teil unterschieden werden.

*Beweis.* 1. Reflexivität und Symmetrie sieht man sofort, die Transitivität erhält man durch Hintereinanderausführung der entsprechenden Abbildungen.

2. Folgt aus der Formel  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

3. Folgt aus dem zweiten Schritt. □

**Definition 14.1.10 (Orientierung)**

1. Die Äquivalenzklasse, für die  $\det(e_1 \ \dots \ e_n) > 0$  ist, nennt man positiv.
2. Wir nennen eine solche Klasse Orientierung.
3. Das Paar  $(\mathbb{R}^n, [\{e_1, \dots, e_n\}])$  heißt orientierter Raum, ist die angegebene Klasse positiv, so sprechen wir vom positiv orientierten Raum.

**Definition 14.1.11 (Untermannigfaltigkeit)**

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^s$  der Dimension  $k \leq n$ , falls es zu jedem  $x_0 \in M$  eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x_0 \in U$  und eine  $s$ -fach stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  gibt mit

1.  $M \cap U = \left\{ \mathbf{x} \in U \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \right\}$  und
2.  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  hat maximalen Rang, d. h. Rang  $n - k$ .

Eine Untermannigfaltigkeit ohne Spezifizierung meint eine der Klasse  $C^1$ .

**Beispiel 14.1.12 (Unterraum und Sphäre)**

1. Ein linearer Unterraum  $H$  der Dimension  $k$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^s$  für jedes  $s \in \mathbb{N}$ . Wir wählen eine Orthonormalbasis  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  von  $H$  und ergänzen diese durch  $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$  zu einer Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Abbildung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-k} \end{pmatrix}$$

mit

$$f_j(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_{k+j} \rangle$$

eine Abbildung, die beliebig oft differenzierbar ist auf  $U = \mathbb{R}^n$  und mit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  genau dann, wenn  $x \in H$ . Für  $\mathbf{x}_0 \in H$  ist  $D_{k+i}f_j = \delta_{ij}$ . Diese Matrix hat Rang  $n - k$ .

2. Die Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \right\}$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ , denn

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 - 1$$

ist beliebig oft differenzierbar und  $f(\mathbf{x}) = 0$  genau dann, wenn  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Für  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  ist  $Df(\mathbf{x}_0) = 2\langle \mathbf{x}_0, \cdot \rangle$ , dies hat natürlich vollen Rang 1.

Zum Rechnen auf Untermannigfaltigkeiten der Dimension  $k$  würde man diese gerne, entsprechend unseren Betrachtungen bei Kurven, durch  $k$  Parameter beschreiben, d. h. man möchte gerne Abbildungen  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  finden, so dass das Bild gerade die gegebene Untermannigfaltigkeit ist. Schon am Beispiel der Sphäre  $\mathbb{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  erkennt man, dass es im Allgemeinen keine bijektive bistetige Abbildung einer offenen Teilmenge  $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{S}^2$  geben kann. ( $\mathbb{S}^2$  ist kompakt, das Urbild ebenso, als Teilmenge des metrischen Raumes  $\mathbb{S}^2$  ist  $\mathbb{S}^2$  auch offen, dann gilt das auch für das Urbild, also ist das Urbild eine offene und abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , also  $\emptyset$  oder  $\mathbb{R}^2$ , Ersteres ist nicht gleichmächtig zu  $\mathbb{S}^2$ , Letzteres nicht kompakt. Also muss man sich mit weniger zufrieden geben.) Genauer geben die nächsten Sätze.

**Satz 14.1.13 (Untermannigfaltigkeit als Graph)**

Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es zu jedem  $\mathbf{x}_0 \in M$  einen  $k$ -dimensionalen Unterraum  $\mathbb{R}^k$ , einen entsprechenden Raum  $\mathbb{R}^{n-k}$  und offene Teilmengen  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$  bzw.  $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{g} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , so dass  $M \cap (\mathbf{x}_0 + U_1 \times U_2) = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{g}(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in U_1 \right\}$ .

*Beweis.* Sei  $\mathbf{x}_0 \in M$ ,  $\mathbf{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  wie in der Definition verlangt. Dann ist  $\ker \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$  ein  $k$ -dimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ , den wir als  $\mathbb{R}^k$  bezeichnen. OBdA nehmen wir an, dass  $\mathbf{x}_0 = 0$ .

Sei  $\mathbb{R}^{n-k}$  das orthogonale Komplement zu  $\mathbb{R}^k = \ker \mathbf{Df}(0)$ . Wähle  $U_1 \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  offen (in  $\mathbb{R}^k$ ), so dass  $\bar{U}_1$  kompakt und  $U_1 \subset U$  ist. Wähle ferner  $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$  offen mit  $U_1 \times U_2 \subset U$ . (Eine solche Wahl ist möglich.) Schreibe  $\mathbf{u}$  für die Variable in  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{v}$  für die Variable in  $\mathbb{R}^{n-k}$ . Setze für  $\mathbf{u} \in U_1$  und  $\mathbf{v} \in U_2$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Dann ist

$$\mathbf{F}(0, 0) = f(0) = 0$$

und

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(0, 0) : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

regulär, denn wegen

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(0) = (D_{\mathbf{u}}\mathbf{F}(0, 0) \ D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(0, 0)) = (0 \ D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(0, 0))$$

ist

$$\text{rang } D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(0) = \text{rang } D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(0, 0).$$

Der Satz über implizite Funktionen 9.2.2, 9.2.4 garantiert die Existenz einer  $C^s$ -Funktion  $\mathbf{g} : U_1 \rightarrow U_2$  mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{g}(\mathbf{u})) = 0,$$

wobei die Umgebungen eventuell nochmals verkleinert werden. Dies bedeutet, dass  $\mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  genau dann, wenn  $\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ .  $\square$

**Beispiel 14.1.14 (Sphäre als Untermannigfaltigkeit)**

Wir betrachten die Sphäre  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  und darin den Punkt  $(0, 0, 1)$ . Durch  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  erhalten wir eine Parametrisierung einer Umgebung von  $(0, 0, 1)$ , ja sogar von der oberen Halbkugel. Durch entsprechende weitere Parametrisierungen von weiteren Halbkugeln erhalten wir schließlich eine Überdeckung der gesamten Sphäre  $\mathbb{S}^2$ .

**Satz 14.1.15 (Satz vom lokalen Geradebiegen)**

Es sei  $R_k = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0 \right\}$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $M$  genau dann eine  $k$ -dimensionale  $C^s$ -Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem  $\mathbf{x}_0 \in M$  eine Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}_0$  gibt und einen  $C^s$ -Diffeomorphismus  $\mathbf{F} : U \rightarrow V$ ,  $\emptyset \neq R_k \cap V$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen, so dass  $\mathbf{F}(U) \subset V$  und  $\mathbf{F}(U \cap M) = R_k \cap V$ .

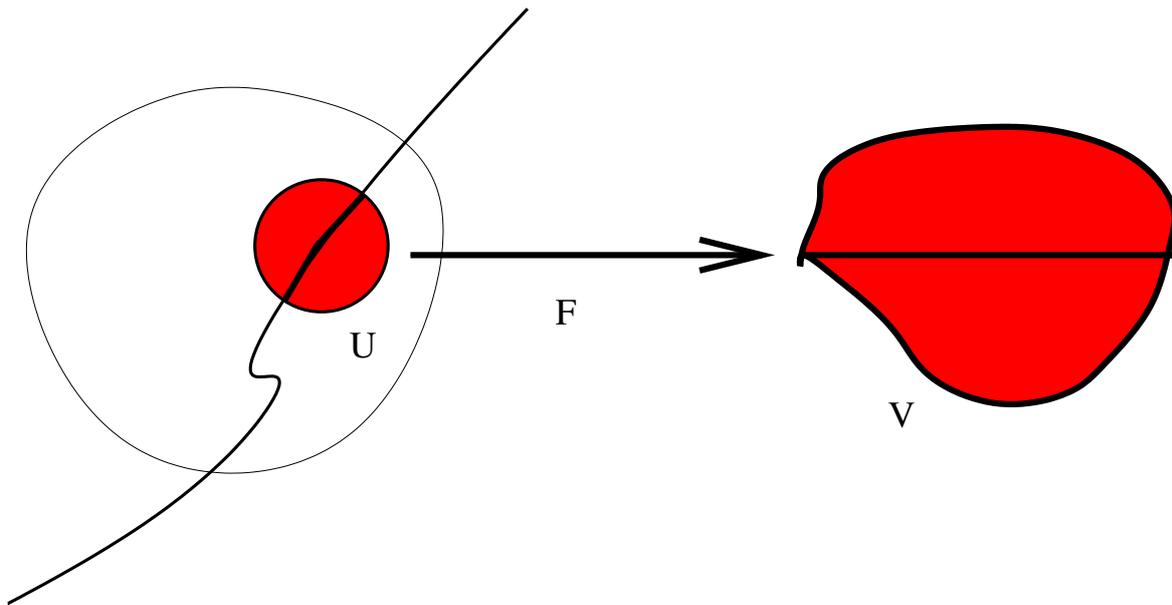


Abbildung 14.1: Geradebiegen von Untermannigfaltigkeiten

*Beweis.* Nach dem vorigen Satz können wir  $M \cap U$  als Graph einer Abbildung  $\mathbf{g} : U_1 \rightarrow U_2$ ,  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$  auffassen. Setze für  $U \subset U_1 \times U_2$  und  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-k}$  mit  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{g}(\mathbf{u})).$$

$\mathbf{F}$  hat die gewünschten Eigenschaften.

Die Umkehrung ist auch fast offensichtlich, denn hat  $\mathbf{F}$  die angegebene Form, so ist die Nullstellenmenge von  $F_{k+1} = 0, \dots, F_n = 0$  lokal gerade  $M$ .  $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  hat vollen Rang, denn  $F$  ist ein Diffeomorphismus, damit hat auch

$$D_x(F_{k+1}, \dots, F_n)^T(\mathbf{x}_0)$$

den Rang  $n - k$  und damit ist auch die Rangbedingung erfüllt und  $M$  ist eine Untermannigfaltigkeit.  $\square$

**Definition 14.1.16 (Orientierbare Untermannigfaltigkeit)**

Sind im letzten Satz alle Räume positiv orientiert und ist  $\operatorname{sgn} \det D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  (als Funktion von  $\mathbf{x}_0$ ) konstant, so heißt die Untermannigfaltigkeit orientierbar.

**Beispiel 14.1.17 (Untermannigfaltigkeiten normierter Räume, Nichtorientierbarkeit)**

- Wir betrachten den Raum  $L(\mathbb{R}^n)$  der linearen Selbstabbildungen des  $\mathbb{R}^n$  mit der Norm

$$\|L\|_{L(\mathbb{R}^n)} = \sup \left\{ \|L\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} = 1 \right\}.$$

In diesem Raum sei

$$M = \left\{ L \in L(\mathbb{R}^n) \mid 0 \text{ ist algebraisch einfacher Eigenwert von } L \right\}.$$

Dann ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $L(\mathbb{R}^n)$  der Dimension  $n^2 - 1$ .

Dies kann man wie folgt einsehen: Die Eigenwerte hängen stetig von  $L$  ab (für Matrizen ist das charakteristische Polynom eine stetige Funktion von  $L$ , die Nullstellen hängen stetig vom Polynom ab). Sei  $L_0 \in M$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $\|L - L_0\|_{L(\mathbb{R}^n)} < \delta$  impliziert, dass  $L$  genau einen algebraische einfachen Eigenwert  $\sigma$  vom Betrag  $|\sigma| < \varepsilon$  hat und alle anderen Eigenwerte von  $L$  einen Betrag  $> 2\varepsilon$  haben. Dann ist  $M \cap B_\varepsilon(L_0) = \left\{ L \in B_\varepsilon(L_0) \mid \det(L) = 0 \right\}$ . Daher ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $L(\mathbb{R}^n)$ .

- $\mathbf{SO}(3)$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $L(\mathbb{R}^3)$  der Dimension 6 der Klasse  $C^s$  für jedes  $s$ . Diese Untermannigfaltigkeit ist nicht orientierbar. Eine Begründung werden wir später erarbeiten.

**Definition 14.1.18 (Immersion)**

Ist  $X \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung mit

$$\operatorname{rang} D\psi(\mathbf{x}) = k \quad \forall \mathbf{x} \in X,$$

so nennt man  $\psi$  eine Immersion.

Die Rangbedingung kann natürlich nur erfüllt sein, wenn  $n \geq k$  ist.

**Definition 14.1.19 (Homöomorphie metrischer Räume)**

Sind  $(X, d)$ ,  $(Y, d')$  metrische Räume,  $U \subset X$  und  $V \subset Y$  heißen homöomorph, wenn es eine stetige Bijektion  $T : (U, d) \rightarrow (V, d')$  gibt, deren Umkehrung ebenfalls stetig ist.

**Satz 14.1.20 (Bilder von Immersionen als lokale Untermannigfaltigkeiten)**

Es sei  $X \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion der Klasse  $C^s$ . Dann gibt es zu jedem  $\mathbf{x}_0 \in X$  eine offene Umgebung  $U \subset X$ , so dass  $\psi(U)$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $k$  und der Klasse  $C^s$  ist.

*Beweis.* Der Umkehrsatz garantiert uns die Existenz von Umgebungen  $U \subset X$  von  $\mathbf{x}_0$  und  $V \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  von  $\psi(\mathbf{x}_0)$ , so dass (nach geeigneter Nummerierung der Koordinaten)

$$(\psi_1, \dots, \psi_k) : U \rightarrow V$$

ein  $C^s$ -Diffeomorphismus ist. Setze

$$\Psi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} \psi_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ \psi_k(x_1, \dots, x_k) \\ x_{k+1} + \psi_{k+1}(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ x_n + \psi_n(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix}.$$

$D\Psi(\mathbf{x}_0)$  ist regulär und damit umkehrbar, d. h.  $\Psi$  ist ein  $C^s$ -Diffeomorphismus und  $\Psi(U \times 0) = \psi(U)$  und mit  $\mathbf{F} = \Psi^{-1}$  auf einer Umgebung  $W$  von  $\psi(\mathbf{x}_0)$  ist

$$\mathbf{F}(\Psi(U) \cap W) \subset U \times \{0\} \subset \mathbf{F}(W) \cap \mathbb{R}^k.$$

Damit ist  $\psi(U)$  eine Untermannigfaltigkeit nach dem Satz vom lokalen Geradenbiegen, Satz 14.1.15.  $\square$

**Satz 14.1.21 (Parameterdarstellung)**

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^s$  des  $\mathbb{R}^n$ , wenn es zu jedem  $\mathbf{x}_0 \in M$  eine offene Menge  $V \subset (M, d_2)$  und eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^k$  und eine  $C^s$ -Immersion  $\psi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, die ein Homöomorphismus  $U \rightarrow V$  ist.

*Beweis.* Ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale  $C^s$ -Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ , so können wir zu  $\mathbf{x}_0 \in M$  eine Umgebung  $\mathbf{x}_0 \in W \subset \mathbb{R}^n$  nach Satz 14.1.15 vom lokalen Geradebiegen und einen Diffeomorphismus  $\Psi : W \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  finden, so dass  $\Psi(W \cap M) = Z \cap \mathbb{R}^k$ . Dann ist

$$\Psi^k = \Psi|_{M \cap W} : M \cap W \rightarrow U = Z \cap \mathbb{R}^k$$

ein Homöomorphismus und  $(\Psi^k)^{-1} : U \rightarrow M \cap W = V$  ein Homöomorphismus, ja sogar eine stetig differenzierbare Abbildung, wobei der Rang der Ableitung in jedem Punkt natürlich höchstens  $k$  ist. Sind  $p_j$  die Komponentenfunktionen von  $\Psi^{-1}$ , so ist für  $\mathbf{y}_0 \in V$

$$D\Psi^{-1}(\mathbf{y}_0) = \left( \frac{\partial p_j(\mathbf{y}_0)}{\partial y_m} \right)_{j=1, \dots, n, m=1, \dots, n}.$$

Dann ist  $(\Psi^k)^{-1} = (p_1|_{V_k}, \dots, p_n|_{V_k})$  und

$$D(\Psi^k)^{-1}(\mathbf{y}_0) = \left( \frac{\partial p_j(\mathbf{y}_0)}{\partial y_m} \right)_{j=1, \dots, n, m=1, \dots, k}.$$

Dies sind genau die ersten  $k$  Spalten der Matrix  $D\Psi^{-1}(\mathbf{y}_0)$ . Diese sind natürlich linear unabhängig, ansonsten könnte  $D\Psi^{-1}$  nicht vollen Rang haben.

Die Umkehrung ist gerade der letzte Satz. □

**Definition 14.1.22 (Karte)**

Ein Paar  $(U, \psi_U)$  aus Satz 14.1.21 heißt Karte. Wir bezeichnen  $\psi_U(U)$  als Kartengebiet der Karte  $(U, \psi_U)$ .

**Bemerkung 14.1.23 (Verkleinern von Karten)**

Ist  $(U, \psi_U)$  eine Karte und  $\tilde{U} \subset U$  offen, so ist  $(\tilde{U}, \psi_{U|_{\tilde{U}}})$  wiederum eine Karte. Oft sagt man durch Verkleinern kann man erreichen, dass ... Damit meint man genau den hier angesprochenen Vorgang.

**Satz 14.1.24 (Kartenwechsel)**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^s$  des  $\mathbb{R}^n$ , seien  $\psi_1 : U_1 \rightarrow M$ ,  $\psi_2 : U_2 \rightarrow M$  Karten mit  $\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2) \neq \emptyset$ . Dann ist

$$\psi_2^{-1}\psi_1 : \psi_1^{-1}(\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)) \rightarrow \psi_2^{-1}(\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2))$$

ein Diffeomorphismus.

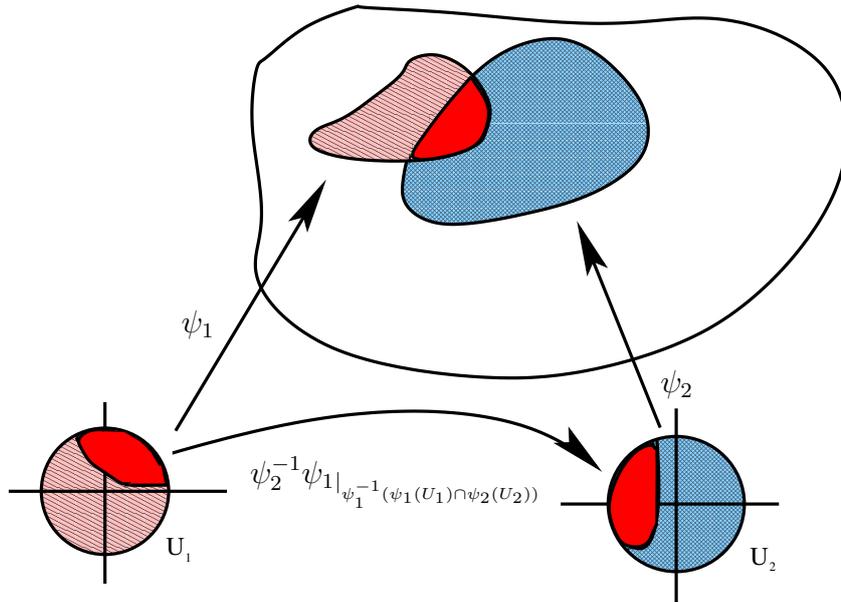


Abbildung 14.2: Kartenwechsel auf einer Mannigfaltigkeit

*Beweis.* Es folgt sofort aus den Definitionen, dass die Mengen  $\psi_i(U_i)$  offen sind, dass deren Schnitt offen ist und damit auch  $\psi_i^{-1}(\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2))$  für  $i = 1, 2$ . Weiterhin sind die Abbildungen  $\psi_i$  Bijektionen und in beide Richtungen stetig, damit folgt sofort, dass die angegebene Abbildung ein Homöomorphismus ist. Die Eigenschaft eines Diffeomorphismus ist etwas schwerer zu beweisen, da wir nichts über die Glattheitseigenschaften von  $\psi_i^{-1}$  sagen können, da diese Abbildung ja nicht auf einer offenen Menge im Raum  $\mathbb{R}^n$  definiert ist und daher Differenzierbarkeitseigenschaften nicht definiert sind.

Dazu nutzen wir wiederum den Satz vom lokalen Geradebiegen, wie es Abbildung 14.3 andeutet. Es sei  $\mathbf{x}_0 \in W \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $M \cap W \subset \psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)$  und  $\mathbf{F} : W \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  ein Diffeomorphismus mit  $\mathbf{F}(M \cap W) \subset \mathbb{R}^k$ . Dann ist

$$\mathbf{F}^k : M \cap W \rightarrow \mathbb{R}^k : \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ \Psi_k(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

eine Abbildung, so dass

$$\mathbf{F}^k \circ \psi_1 : U_1 \cap \psi_1^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

differenzierbar ist und an der Stelle  $\psi_1^{-1}(\mathbf{x}_0)$  den Rang  $k$  hat. Gleiches gilt für

$$\mathbf{F}^k \circ \psi_2 : U_2 \cap \psi_2^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Damit gibt es  $\tilde{U}_i \subset U_i \cap \psi_i^{-1}(W \cap M)$  und  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^k$ , so dass die Abbildungen  $\mathbf{F}^k \circ \psi_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}$  Diffeomorphismen sind. Dann ist

$$\psi_2^{-1} \psi_1 = (\mathbf{F}^k \circ \psi_2)^{-1} (\mathbf{F}^k \circ \psi_1)$$

ein Diffeomorphismus.

$\mathbb{R}^{n-k}$

□

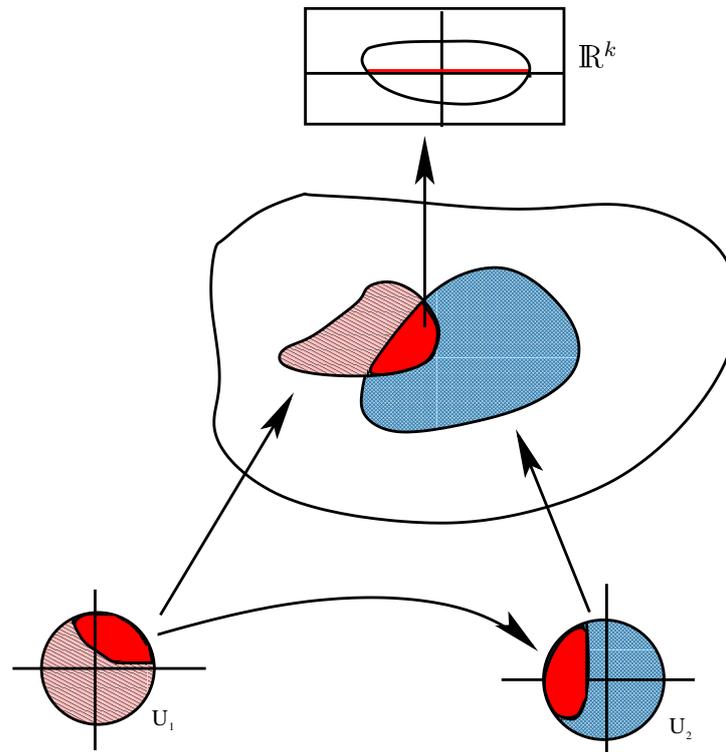


Abbildung 14.3: Ausnutzen des lokalen Geradebiegens

**Definition 14.1.25 (Kartenwechseldiffeomorphismus)**

Sind  $(U, \psi_U)$ ,  $(V, \psi_V)$  zwei Karten mit überlappenden Kartengebieten. Den Diffeomorphismus  $\psi_{UV} = \psi_V^{-1} \circ \psi_U : \psi_U^{-1}(\psi_U(U) \cap \psi_V(V)) \rightarrow \psi_V^{-1}(\psi_U(U) \cap \psi_V(V))$  nennen wir den Kartenwechseldiffeomorphismus.

## 14.2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  und für eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^k$  sei  $(U, \psi_U)$  eine Karte. Wir definieren eine Matrix

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \psi_\ell}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_\ell}{\partial x_j}(\mathbf{x}), i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k.$$

Unter Ausnutzung eines inneren Produktes lässt sich diese Matrix schreiben als (man beachte, die auftretende partielle Ableitung ist ein Spaltenvektor)

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right\rangle.$$

### Definition 14.2.1 (Gramsche Determinante)

Die Determinante  $\det(G)$  der Matrix  $G$ , wie sie eben definiert wurde, wird als Gramsche Determinante<sup>1</sup> bezeichnet. Ist es wesentlich bzgl. welcher Karte  $(U, \psi_U)$  diese Determinante definiert wurde, schreiben wir  $G_{\psi_U}$  für die entsprechende Matrix und  $g(\mathbf{x}) = \det G(\mathbf{x})$ .

Wir wollen zwei Fragen klären:

1. Wie verhält sich die Gramsche Determinante unter Kartenwechsel?
2. Kann man die Gramsche Determinante explizit berechnen?

### Lemma 14.2.2 (Gramsche Determinante und Kartenwechsel)

Ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale  $C^s$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sind  $(U, \psi_U), (V, \psi_V)$  zwei Karten mit überlappenden Kartengebieten, so gilt für  $\mathbf{x} \in U$  und  $\mathbf{y} \in V$  mit

$$\psi_U(\mathbf{x}) = \psi_V(\mathbf{y}),$$

dass

$$\det(G_{\psi_U}(\mathbf{x})) = (\det(D\psi_{UV}))^2 \det(G_{\psi_V}(\mathbf{y}))$$

*Beweis.* Einsetzen in die Definition und nachrechnen! □

<sup>1</sup>Jorgen Pedersen Gram (27.6.1850–29.4.1916) war ein dänischer Mathematiker, der u. a. in der Versicherungswirtschaft arbeitete. Er war aktiv als Mitherausgeber einer dänischen Fachzeitschrift. Eine seine wesentlichen Arbeiten beschäftigte sich mit Gewinnmaximierung in der Forstwirtschaft.

Wir wollen nun für  $1 \leq k \leq n$  quadratische  $k \times k$ -Untermatrizen einer  $n \times k$  Matrix auswählen. Am naheliegendsten ist eine Angabe von  $k$  Zeilen mit den Nummern  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , die dann genau eine  $k \times k$  Matrix ergeben. Formal sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix, für einen Vektor  $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^k$  mit

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

sei

$$A_{\mathbf{i}} = A_{(i_1, \dots, i_k)}$$

die  $k \times k$ -Matrix, die man durch Auswahl der Zeilen  $i_1, \dots, i_k$  erhält. Das folgende Lemma stammt aus der Linearen Algebra.

**Lemma 14.2.3 (Determinante von Produkten nichtquadratischer Matrizen)**

Sind  $A, B$   $n \times k$ -Matrizen, so ist

$$\det(A^T B) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^k \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \det(A_{\mathbf{i}}) \det(B_{\mathbf{i}}).$$

*Beweis.* Siehe Lehrbücher über Lineare Algebra oder auch Forster, [6]. □

**Korollar 14.2.4 (Determinante von  $A^T A$ )**

Ist  $A$  eine  $n \times k$ -Matrix, so ist

$$\det(A^T A) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^k \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (\det(A_{\mathbf{i}}))^2 \geq 0.$$

*Beweis.* Folgt sofort aus dem Lemma zuvor. □

**Korollar 14.2.5 (Gramsche Determinante, Berechnung)**

Ist  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $(U, \psi_U)$  eine Karte,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  die zugehörige Gramsche Determinante, so gilt

$$g = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^k \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (\det(D\psi_{\mathbf{i}}))^2.$$

*Beweis.* Wir können  $G$  schreiben als  $G = D\psi^T D\psi$ . □

Wir wollen nun Integrale über Untermannigfaltigkeiten definieren, d. h. sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir wollen ein Integral

$$\int_M f \, dS$$

erklären. Dazu nutzen wir die Darstellung der Mannigfaltigkeit durch Karten aus.

**Definition 14.2.6 (Atlas)**

Eine Familie  $\mathcal{A}$  von Karten, deren Kartengebiete  $M$  überdecken, wird als Atlas bezeichnet.

**Definition 14.2.7 (Integrierbar auf Untermannigfaltigkeiten)**

Es sei  $\mathcal{A}$  ein Atlas für die Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $g_U$  die einer Karte  $(U, \psi_U)$  zugeordnete Gramsche Determinante.

Gilt für jede Karte  $(U, \psi_U) \in \mathcal{A}$ , dass die Funktion

$$f \circ \psi \sqrt{g_U}$$

auf  $U$  integrierbar ist, so nennen wir  $f$  lokal integrierbar. Wir schreiben

$$\int_{\psi_U(U)} f \, dS = \int_U f \circ \psi \sqrt{g_U} \, d\lambda_k,$$

wobei  $S$  hier für das Maß auf der Oberfläche steht, die Bezeichnung stammt von lat. *superficies* (vgl. engl.: *surface*).

**Lemma 14.2.8 (Kartenunabhängigkeit des Integrales)**

Haben zwei Karten gleiches Kartengebiet  $K$ , so ist

$$\int_K f \, dS$$

unabhängig von der Karte, die zur Definition herangezogen wird.

*Beweis.* Es seien  $(U, \psi_U), (V, \psi_V)$  Karten mit  $\psi_U(U) = \psi_V(V)$  und  $\psi_{UV} : U \rightarrow V$

der Kartenwechseldiffeomorphismus. Dann ist nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_V f \circ \psi_V \sqrt{g_V} \, d\lambda_k &= \int_U f \circ \psi_V \circ \psi_{UV} \sqrt{g_V \circ \psi_{UV}} |\det(D\psi_{UV})| \, d\lambda_k \\ &= \int_U f \circ \psi_U \sqrt{g_U (\det(D\psi_{UV})^{-2})} |\det(D\psi_{UV})| \, d\lambda_k \\ &= \int_U f \circ \psi_U \sqrt{g_U} \, d\lambda_k. \quad \square \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Integration auf der ganzen Mannigfaltigkeit definieren. Dazu üben wir einen Grundbegriff moderner Analysis, den wir später noch ausführlicher brauchen werden.

**Definition 14.2.9 (Teilung der Eins)**

Es sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A}$  sei ein Atlas. Es sei  $\mathcal{K}$  eine Klasse von Funktionen (z. B.  $C^\infty$ ,  $L^p$ ,  $C$ ). Dann heißt eine Menge  $\{\sigma_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{K}$  mit  $0 \leq \sigma_j \leq 1$  für alle  $j$  eine der Überdeckung  $\{\psi_U(U)\}_{(U, \psi_U) \in \mathcal{A}}$  subordinierte  $\mathcal{K}$ -Teilung der Eins (engl. *partition of unity*), wenn

1. für jedes  $j \in J$  ein  $U \in \mathcal{U}$  existiert mit  $\text{supp}(\sigma_j) \subset \psi_U(U)$  (Subordination),
2. es für jedes  $\mathbf{x} \in M$  höchstens endlich viele  $j \in J$  gibt mit  $\mathbf{x} \in \text{supp}(\sigma_j)$  (lokale Endlichkeit) und
- 3.

$$\sum_{j \in J} \sigma_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (\text{Teilung der Eins}).$$

(Man beachte, dass in der Summe für jedes  $\mathbf{x} \in M$  höchstens endlich viele Summanden ungleich 0 stehen).

Bevor wir integrierbare Teilungen der Eins konstruieren, wollen wir noch ein paar wichtige Begriffe definieren.

**Definition 14.2.10 (Zweites Abzählbarkeitsaxiom)**

Wir sagen ein metrischer Raum genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom (engl. *is second countable*), falls es eine abzählbare Menge offener Mengen  $X_j, j \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für jede offene Menge  $O$  und jedes  $x \in O$  mindestens ein  $j \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x \in X_j \subset O$ .

**Definition 14.2.11 (Lokal kompakt)**

Ein metrischer Raum, heißt lokal kompakt, wenn es zu jedem Punkt eine offene Umgebung  $U$  gibt, so dass  $\bar{U}$  kompakt ist.

**Lemma 14.2.12 (Offene Mengen von Untermannigfaltigkeiten)**

Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

1. Dann ist eine Teilmenge  $V \subset (M, d_2)$  genau dann offen, wenn es eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  gibt, so dass  $V = M \cap U$ .
2. Eine Teilmenge  $K \subset M$  ist als Teilmenge des metrischen Raumes  $(M, d_2)$  genau dann kompakt, wenn sie als Teilmenge von  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  kompakt ist.

*Beweis.* 1. Sei zunächst  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $V = M \cap U$ . Sei  $\mathbf{x}_0 \in V \subset U$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset U$ . Dann ist

$$M \cap U \supset M \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon^{(M, d_2)}(\mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x} \in M \mid d_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \varepsilon \right\}.$$

Wir kommen zur Gegenrichtung,  $V \subset (M, d_2)$  sei offen,  $\mathbf{x}_0 \in V$  und  $\varepsilon_0 > 0$  mit  $B_{\varepsilon_0}^{(M, d_2)}(\mathbf{x}_0) \subset V$ . Dann ist  $B_{\varepsilon_0}^{(M, d_2)}(\mathbf{x}_0) \subset B_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}_0)$ , letztere Menge ist offen in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$U = \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in V} B_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$$

offen und

$$U \cap M = \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in V} B_\varepsilon^{(M, d_2)}(\mathbf{x}_0) = V.$$

2. Ist  $K \subset M$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  kompakt, so betrachten wir eine offene Überdeckung  $\mathcal{V}$  von  $K$  mit Teilmengen  $V \subset M$ . Zu jeder dieser Mengen gibt es eine Menge  $U_V \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $U_V \cap M = V$ . Dann ist  $\mathcal{U} = \left\{ U_V \mid V \in \mathcal{V} \right\}$  eine offene Überdeckung von  $K$  in  $\mathbb{R}^n$ . Es gibt eine endliche Teilüberdeckung  $U_{V_i}, i = 1 \dots r$ . Dann ist  $K \subset \bigcup_{i=1}^r V_i$ . Die Umkehrung ist trivial.  $\square$

**Satz 14.2.13 (Existenz der Teilung der Eins)**

Es sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

1.  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  ist lokal kompakt.
2.  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom.
3. Es gibt eine kompakte Ausschöpfung von  $M$ , d. h. eine Folge  $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  von offenen Teilmengen des metrischen Raumes  $(M, d_2)$  mit  $\overline{X_j}$  ist kompakt,  $\overline{X_j} \subset X_{j+1}$  und

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j = M.$$

4.  $(M, d_2)$  genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom und ist lokal kompakt.
5. Zu jeder Überdeckung von  $M$  mit Kartengebieten gibt es eine subordinierte Teilung der Eins bestehend aus integrierbaren Treppenfunktionen.

*Beweis.* 1. Ist  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $B_1(\mathbf{x})$  eine offene Umgebung und  $\overline{B_1(\mathbf{x}_0)}$  ist kompakt.

2. Wir betrachten die Menge

$$\left\{ B_p(\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n, p \in \mathbb{Q}, p > 0 \right\}.$$

Sei  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $O \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathbf{x}_0 \in O$ . Setze

$$d = \inf \left\{ \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|_2 \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus O \right\} > 0,$$

dann existiert  $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$  mit  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{q}\|_2 < \frac{d}{2}$  und  $\mathbb{Q} \ni p < \frac{d}{2}$ . Dann ist  $\mathbf{x}_0 \in B_p(\mathbf{q}) \subset O$ .

3. Wir beginnen mit einer offenen Menge  $X_1$  in  $M$ , deren Abschluss kompakt ist. Dies ist aufgrund der Definition einer Untermannigfaltigkeit möglich. Die offenen Mengen aus dem zweiten Schritt überdecken  $\mathbb{R}^n$ , also insbesondere auch  $M$ . Insbesondere definiert die Vereinigung der

$$\mathcal{U} = \left\{ M \cap B_p(\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n, p \in \mathbb{Q}, \overline{M \cap B_p(\mathbf{q})} \text{ ist kompakt in } M \right\}$$

eine abzählbare, offene Überdeckung von  $\bar{X}_1$ . Es gibt daraus eine endliche Teilüberdeckung von  $\bar{X}_1$ . Wir nehmen an, die Menge  $\mathcal{U}$  sei abgezählt.

Angenommen wir hätten  $X_j = \bigcup_{k=1}^{r_j} U_k$  mit  $U_k \in \mathcal{U}$  konstruiert. Sei  $r_{j+1}$  der kleinste Index, so dass

$$\bar{X}_j \subset \bigcup_{k=1}^{r_{j+1}} U_k.$$

Setze

$$X_{j+1} = \bigcup_{k=1}^{r_{j+1}} U_k.$$

Die Folge  $X_j$  hat die gewünschten Eigenschaften.

4. Dass  $M$  lokal kompakt ist, zeigt man wie eben, nur wählt man abhängig von  $\mathbf{x}$  die Umgebung, so dass sie in  $U$ , wie es im Satz vom lokalen Geradebiegen auftritt, liegt. Das Argument von eben zeigt auch, dass das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist.
5. Wir haben aus einer vorgegebenen Überdeckung  $\psi_U(U) = K_U$  eine abzählbare Teilüberdeckung  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ausgewählt. Wir konstruieren eine abzählbare, lokal-endliche Verfeinerung dieser Überdeckung. Setze  $X_{-1} = X_0 = \emptyset$  und

$$W_j = X_{j+1} \setminus \overline{X_{j-2}} \text{ für } j \geq 1.$$

Dazu bemerken wir, dass für  $j \geq 3$  gilt  $W_j = X_{j+1} \setminus \overline{X_{j-2}}$  ist offen und hat kompakten Abschluss. Die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i = M$$

und jedes  $\mathbf{x} \in M$  liegt in höchstens 4 der Mengen  $\overline{W_i}$ . Wir wählen aus der Menge

$$R_{i,j} = W_i \cap U_j, \quad i \geq 3, j \in \mathbb{N}$$

für jedes  $\overline{X_j} \setminus X_{j-1}$  eine endliche Teilüberdeckung aus. Schließlich wählen wir aus den Mengen  $W_i \cap X_3$  noch eine endliche Überdeckung für  $\overline{X_2}$  aus. Damit haben wir aus der Menge der  $R_{i,j}$  eine abzählbare, lokal-endliche Verfeinerung der Überdeckung  $U_j$  ausgewählt. Wir bezeichnen diese mit  $\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

Setze

$$\varphi_1 = \chi_{R_1}$$

und induktiv

$$\varphi_{k+1} = \chi_{R_{k+1} \setminus (\bigcup_{j=1}^k R_j)}.$$

Jede dieser Funktionen ist messbar und eine Treppenfunktion mit kompakten Träger. Offenkundig ist

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(\mathbf{x}) = 1. \quad \square$$

#### Definition 14.2.14 (Integrierbarkeit)

Es sei  $\sigma_j, j \in \mathbb{N}$  eine einem Atlas subordinierte Teilung der Eins von integrierbarer Treppenfunktionen. Eine lokal integrierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar, wenn mit  $f = f^+ - f^-$  mindestens einer der Werte

$$\sum_k \int_M (\varphi_k f^+) \, dS, \sum_k \int_M (\varphi_k f^-) \, dS$$

endlich ist. Dabei ist zu beachten, dass die Funktionen  $\varphi_j f^\pm$  Träger in einem Kartengebiet einer Karte aus dem Atlas haben.

**Satz 14.2.15 (Integrierbarkeit unabhängig von der Wahl des Atlas und der Teilung der Eins)**

Die Integrierbarkeit einer Funktion hängt weder von der Wahl der Teilung der Eins noch von der Wahl des Atlases ab.

*Beweis.* Sei oBdA  $f \geq 0$ . Seien ferner  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  zwei Atlanten und  $\varphi_j, \psi_j$  jeweils subordinierte integrierbare Teilungen der Eins. Sei  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ . Sei  $\eta_i$  eine diesem Atlas subordinierte Teilung der Eins. Dann ist  $f\varphi_i\eta_j$  auf jedem Kartengebiet zum Atlas  $\mathcal{A}$  integrierbar. Dann ist

$$\sum_{i=1}^M f\varphi_i\eta_j$$

monoton steigend in  $M$  und die Folge der Integrale konvergiert nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gegen  $\sum_{i=1}^\infty f\varphi_i\eta_j = f\eta_j$ . Gleiches gilt bei einer Summation bezüglich  $j$  und damit sind die Integralwerte gleich.  $\square$

**Definition 14.2.16 ( $L^p(M)$ )**

Ist eine Funktion integrierbar und sind beide Integrale

$$\sum_k \int_M (\varphi_k f^+) \, dS, \sum_k \int_M (\varphi_k f^-) \, dS$$

endlich, so sagen wir die Funktion sei  $f \in \mathcal{L}^1(M)$ . Wir setzen

$$\int_M f \, dS = \int_M f^+ \, dS - \int_M f^- \, dS.$$

Wir führen eine Äquivalenzrelation ein  $f \sim g$ , falls

$$\int_M |f - g| \, dS = 0$$

und definieren wie zuvor  $L^1(M)$ .

Entsprechend definieren wir die Räume  $L^p(M)$  für  $p \in [1, \infty)$ .

**Satz 14.2.17 (Kartenunabhängigkeit des Integrales)**

Der Wert des Integrals hängt nicht von der Teilung der Eins und nicht von den gewählten Karten ab. Insbesondere ist die Definition der Räume  $L^p(M)$  unabhängig von diesen Wahlen.

*Beweis.* Wie Beweis von Satz 14.2.15.  $\square$

**Definition 14.2.18 (Messbarkeit)**

Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt messbar, wenn  $\chi_A$  integrierbar ist. Für messbare Mengen ist das Volumen von  $A$  definiert durch

$$\text{vol}(A) = \|\chi_A\|_1.$$

**Definition 14.2.19 (Integrierbarkeit auf messbaren Teilmengen)**

Es sei  $A$  eine messbare Teilmenge einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar, wenn die triviale Fortsetzung definiert durch

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{für } \mathbf{x} \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist.

**Korollar 14.2.20 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf Kompakta)**

Ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $A \subset M$  kompakt und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  auf  $A$  integrierbar.

*Beweis.* Hat man einen Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$  und eine subordinierte integrierbare Teilung der Eins, so gibt für jedes  $\mathbf{x} \in A$  nur endlich viele  $j$  mit  $\mathbf{x} \in \text{supp } \varphi_j$ . Dann gibt es aber nur endlich viele  $j$  mit  $\text{supp } \varphi_j \cap A \neq \emptyset$ . Damit ist

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^N \varphi_j \tilde{f}.$$

Da  $\text{supp}(\tilde{f}\varphi_j)$  in einem Kartengebiet liegt, ist es integrierbar, denn  $f \circ \psi_U^{-1} \sqrt{g_U}$  ist auf  $\psi_U^{-1}(A)$  stetig und damit integrierbar.  $\square$

## 14.3 Tangentialräume

In diesem Abschnitt wollen wir Tangentialvektoren an Untermannigfaltigkeiten definieren und damit einen ersten Schritt auf unserem Weg zur Integration von Differentialformen gehen. Gleichzeitig vertiefen wir das Verständnis der Umgebung eines Punktes in einer Untermannigfaltigkeit.

**Definition 14.3.1 (Kurve)**

Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma((-a, a)) \subset M$  heißt Kurve auf  $M$  durch  $\mathbf{x}_0 = \gamma(0)$ .

**Definition 14.3.2 (Tangentialvektor)**

1. Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Ein Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  heißt Tangentialvektor an  $M$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$ , wenn es eine Kurve  $\gamma$  auf  $M$  durch  $\mathbf{x}_0$  gibt mit

$$\gamma'(0) = \mathbf{v}.$$

2. Die Menge der Tangentialvektoren im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in M$  wird als Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  bezeichnet, wir schreiben dafür  $T_{\mathbf{x}_0}M$ .

Der Tangentialraum ist ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  und erbt von diesem ein Skalarprodukt und eine Norm.

**Satz 14.3.3 (Tangentialraum)**

Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in M$ . Ferner sei  $(U, \psi_U)$  eine Karte mit  $0 \in U$ ,  $\psi_U(0) = \mathbf{x}_0 \in \psi_U(U)$ .

1. Der Tangentialraum  $T_{\mathbf{x}_0}M$  ist ein  $k$ -dimensionaler linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .
2. Eine Basis dieses Raumes ist gegeben durch

$$\left\{ \frac{\partial \psi_U(0)}{\partial y_j} \right\}_{j=1, \dots, k}.$$

3. Ist  $\mathbf{x}_0 \in M$ ,  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  eine  $C^1$ -Abbildung mit  $\mathbf{f}(W \cap M) = 0$  mit  $\text{Df}(\mathbf{x}_0)$  hat vollen Rang, so sind die Vektoren

$$\text{grad } \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0), \dots, \text{grad } \mathbf{f}_{n-k}(\mathbf{x}_0)$$

linear unabhängig und orthogonal zu  $T_{\mathbf{x}_0}M$ .

*Beweis.* Da der Rang der Matrix

$$\left( \frac{\partial \psi_j(0)}{\partial y_i} \right)_{j=1, \dots, n, i=1, \dots, k}$$

$k$  ist, sind die Vektoren

$$\left\{ \frac{\partial \psi_U(0)}{\partial y_j} \right\}_{j=1, \dots, k}$$

linear unabhängig und spannen einen  $k$ -dimensionalen Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  auf. Wir bezeichnen diesen mit  $T_{\mathbf{x}_0}$ . Wir wollen zeigen, dass dies der Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  ist.

Dazu zeigen wir, dass  $T_{\mathbf{x}_0} \subset T_{\mathbf{x}_0}(M)$  und umgekehrt. Für die Hinrichtung nehmen wir an,  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}$  sei gegeben. Sei  $(U, \psi_U)$  eine Karte mit  $0 \in U$  und  $\psi_U(0) = \mathbf{x}_0$  (eine solche Karte gibt es immer). Dann hat  $\mathbf{v}$  eine Darstellung

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{\partial \psi(0)}{\partial y_j}.$$

Betrachte die Standardbasis  $\mathbf{y}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  in  $\mathbb{R}^k$  und damit die Abbildung

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k : t \mapsto t \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{y}_j \right).$$

Dann gibt es ein  $a > 0$  mit  $\gamma_1((-a, a)) \subset U$ . Setze für  $t \in (-a, a)$

$$\gamma(t) = \psi_U(\gamma_1(t)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= D\psi_U(\mathbf{0})\gamma_1'(0) \\ &= D\psi_U(\mathbf{0}) \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{y}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j D\psi_U(\mathbf{0})\mathbf{y}_j \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{\partial \psi_U}{\partial y_j}(\mathbf{0}) \\ &= \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Damit ist  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}$  ein Tangentialvektor von  $M$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$ .

Andererseits sei  $\mathbf{v} = \gamma'(0)$  mit  $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$  ein Tangentialvektor. Wir betrachten eine Umgebung  $W$  von  $\mathbf{x}_0$  und ein  $\mathbf{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  mit  $f(W \cap M) = 0$  und  $\text{rang } D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = n - k$ . Sei  $a > 0$  so gewählt, dass  $\gamma((-a, a)) \subset W$ . Dann ist für  $t \in (-a, a)$

$$\mathbf{f}(\gamma(t)) = \mathbf{0}.$$

Insbesondere ist  $\mathbf{f} \circ \gamma$  differenzierbar und

$$(\mathbf{f} \circ \gamma)'(0) = \mathbf{0}.$$

Da  $(\mathbf{f} \circ \gamma)'(0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\gamma'(0)$  ist  $\gamma'(0) \in \ker D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Anders ausgedrückt bedeutet dies

$$\langle \text{grad } f_i(\mathbf{x}_0), \gamma'(0) \rangle = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n - k.$$

Damit haben wir gezeigt

1.  $\dim T_{\mathbf{x}_0} = k$
2.  $T_{\mathbf{x}_0} \subset T_{\mathbf{x}_0}(M)$
3.  $\text{grad } f_i(\mathbf{x}_0) \perp T_{\mathbf{x}_0}(M), i = 1, \dots, n - k$
4.  $\dim \text{span} \left( \left\{ \text{grad } f_i(\mathbf{x}_0) \mid i = 1, \dots, n - k \right\} \right) = n - k.$

Damit ist  $T_{\mathbf{x}_0}(M) \subset T_{\mathbf{x}_0}$  und  $\dim T_{\mathbf{x}_0}(M) \leq k$  und aus den ersten beiden Eigenschaften folgt

$$T_{\mathbf{x}_0} = T_{\mathbf{x}_0}(M) \text{ und } \dim T_{\mathbf{x}_0}(M) = k. \quad \square$$

**Definition 14.3.4 (Normalenvektor)**

Ein Vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  heißt Normalenvektor zu  $M$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$ , falls  $\mathbf{w} \perp T_{\mathbf{x}_0}(M)$  ist, d. h. wenn

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(M).$$

**Satz 14.3.5 (Raum der Normalenvektoren)**

Die Menge der Normalenvektoren zu  $M$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  bildet einen linearen Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - k$ . Eine Basis dieses Unterraums ist durch die Vektoren  $\left\{ \text{grad } f_i(\mathbf{x}_0) \mid i = 1, \dots, n - k \right\}$  gegeben.

*Beweis.* Die Tatsache, dass die Menge der Normalenvektoren einen linearen Unterraum bilden, folgt einfach aus der Definition des Normalenvektors und der Definition des linearen Unterraums: Betrachte

$$N_{\mathbf{x}_0}(M) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(M) \right\}.$$

Sind  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in N_{\mathbf{x}_0}(M)$ , so ist offensichtlich für jedes  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(M)$

$$\langle \mu_1 \mathbf{w}_1 + \mu_2 \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle = \mu_1 \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle + \mu_2 \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Da  $T_{\mathbf{x}_0}(M) \cap N_{\mathbf{x}_0}(M) = \{\mathbf{0}\}$  und gleichzeitig

$$T_{\mathbf{x}_0}(M) + N_{\mathbf{x}_0}(M) = \mathbb{R}^n \quad (14.1)$$

ist, ist die Summe direkt und

$$\dim T_{\mathbf{x}_0}(M) + \dim N_{\mathbf{x}_0}(M) = n.$$

Daraus folgt dann die Dimensionsaussage. Da wir bereits die Gradienten der  $f_i$  aus dem letzten Satz als  $n - k$ -elementige, linear unabhängige Menge kennen gelernt haben, bilden diese eine Basis.  $\square$

#### **Aufgabe 14.3.6 (Direkte Summe)**

Beweisen Sie die Gleichung (14.1).

#### **Definition 14.3.7 (Normalenraum)**

Der Raum  $N_{\mathbf{x}_0}(M)$  wird als Normalenraum zu  $M$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  bezeichnet.

## 14.4 Kompakta mit glattem Rand

In diesem Abschnitt wollen wir spezielle kompakte Mengen im  $\mathbb{R}^n$  betrachten, deren Rand eine  $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

#### **Definition 14.4.1 (Rand)**

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Der Rand  $\partial A$  einer Menge  $A \subset X$  ist  $\bar{A} \setminus A^\circ$ .

#### **Lemma 14.4.2 (Rand, Inneres, Abschluss)**

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $A \subset X$  eine Teilmenge. Dann gilt

1.  $x \in \partial A$  genau, wenn für jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  gilt

$$U \cap A \neq \emptyset, U \cap A^c \neq \emptyset.$$

2.  $\bar{A} = A \cup \partial A$

3.  $A^\circ = A \setminus \partial A$

4.  $\partial A$  ist abgeschlossen.

*Beweis.* Aus der Definition des Abschlusses folgt für  $x \in \bar{A}$ , dass jede offene Umgebung Punkte in  $A$  enthält: Entweder ist  $x \in A$ , so ist  $x \in A \cap U$  oder  $x \notin A$ , dann folgt aus der Existenz einer offenen Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $U \cap A = \emptyset$ , dass  $\bar{A} \subset U^c$  und  $x \notin \partial A$ .

Ist  $A^c \cap U = \emptyset$ , so ist  $U \subset A$  und  $x \in A^\circ$ , was der Definition des Randes widerspricht. Damit ist die erste Aussage gezeigt.

Die zweite Aussage erhält man, da nach Definition  $\partial A \subset \bar{A}$  und damit  $A \cup \partial A \subset \bar{A}$  ist. Die umgekehrte Richtung folgt aus der folgenden Rechnung

$$\partial A \cup A \supset \partial A \cup A^\circ = (\bar{A} \setminus A^\circ) \cup A^\circ = \bar{A}.$$

Für die dritte Aussage benutzen wir die Definition und schließen  $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ . Dann impliziert  $A^\circ \subset A$ , dass  $A^\circ \subset A \setminus \partial A$ . Die umgekehrte Folgerung folgt aus der ersten Aussage dieses Satzes.

Für die vierte Aussage nutzen wir die elementare Formel

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$$

und damit ist  $\partial A$  als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen.  $\square$

#### **Definition 14.4.3 (Kompaktum mit glattem Rand)**

Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Wir sagen  $K$  habe glatten Rand, wenn es zu jedem  $\mathbf{x}_0 \in \partial K$  eine offene Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}_0$  und eine  $C^1$ -Abbildung  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$(i) \quad U \cap K = \left\{ \mathbf{x} \in U \mid \Phi(\mathbf{x}) \leq 0 \right\}$$

und

$$(ii) \quad \text{grad } \Phi(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U \text{ mit } \Phi(\mathbf{x}) = 0.$$

#### **Lemma 14.4.4 (Glatte Rand als Nullstellengebilde)**

Ist  $K$  ein Kompaktum mit glattem Rand und sind  $U, \Phi$  wie in der vorstehenden Definition, so ist

$$\partial K \cap U = \left\{ \mathbf{x} \in U \mid \Phi(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

*Beweis.* Angenommen, es sei  $\mathbf{x} \in U$  mit  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ , wir wollen zeigen  $\mathbf{x} \in \partial K \cap U$ . Da  $\text{grad } \Phi(\mathbf{x}) \neq 0$  ist, ist eine der partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \neq 0$ . O.B.d.A. ist  $j = n$  und wir schreiben  $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1})^T$  und  $y = x_n$ . Dann kann der Satz 9.2.2 über implizite Funktionen angewendet werden, der besagt, dass es Umgebungen  $U' \subset U$  von  $\mathbf{x}'$  und  $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$  von  $x_n \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

es zu  $\Phi : U' \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  eine implizite Funktion  $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  gibt mit  $\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ . Für konstantes  $\mathbf{x}'$  hat  $\Phi(\mathbf{x}', \cdot)$  als Funktion von  $x_n$  in  $g(\mathbf{x}')$  eine Ableitung ungleich 0 und nimmt daher als Funktion von  $x_n$  sowohl positive wie auch negative Werte an, also gibt es in jeder Umgebung sowohl Punkte in  $K$  wie auch Punkte außerhalb von  $K$  und damit ist  $\mathbf{x} \in \partial K$ .

Für die umgekehrte Inklusion überlegen wir uns einfach, dass  $\Phi(\mathbf{x}) \neq 0$  bedeutet, dass  $\Phi$  auf einer ganzen Umgebung nicht Null ist (wegen der Stetigkeit von  $\Phi$ ). Damit ist  $x \notin \partial K$ . Damit folgt aus  $\mathbf{x} \in \partial K$  impliziert  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ .  $\square$

**Korollar 14.4.5 (Glatter Rand als Untermannigfaltigkeit)**

*Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ist eine  $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .*

**Satz 14.4.6 (Kompakta mit glattem Rand)**

*Ist  $K$  ein Kompaktum mit glattem Rand,  $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ , so gilt:*

1.  $N_{\mathbf{x}_0}(\partial K)$  ist eindimensional.
2. In  $N_{\mathbf{x}_0}(\partial K)$  gibt es genau zwei Vektoren  $\mathbf{v}, -\mathbf{v}$  mit  $\|\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = 1$ .
3. Genau einer dieser beiden Vektoren hat die Eigenschaft: Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $0 < t < \varepsilon$  gilt  $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \notin K$ .

*Beweis.* Die erste Aussage folgt sofort aus den allgemeinen Überlegungen zum Normalenraum. Die zweite Aussage ist (fast) trivial: In jedem eindimensionalen linearen Vektorraum über  $\mathbb{R}$  gibt es genau zwei Vektoren der Länge eins, einer ist das Negative vom anderen. Die dritte Aussage ist eine Konsequenz des Beweises des vorherigen Satzes.  $\square$

**Definition 14.4.7 (Äußerer Normalenvektor)**

*Es  $K$  ein Kompaktum mit glattem Rand,  $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ . Der eindeutig bestimmte Vektor  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  aus Satz 14.4.6 heißt äußerer Normalenvektor oder die äußere Normale zu  $\partial K$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$ .*

**Bemerkung 14.4.8 (Normalenfeld)**

Zu einem Kompaktum  $K$  mit glattem Rand gibt es ein  $C^1$ -Vektorfeld, das jedem Punkt auf dem Rand die äußere Normale zuordnet.

Zum Ende dieses kurzen Abschnittes wollen wir noch die äußere Normale für Kompakta mit glattem Rand untersuchen, wenn wir den Rand als Graphen einer

Abbildung  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  nach  $\mathbb{R}$  darstellen. Wir betrachten dazu ein Kompaktum  $K$  mit glattem Rand, einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ . Da der Rand in eine  $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist, können wir ihn lokal als Graphen einer Funktion  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  darstellen, wobei eine offene Menge in  $\mathbb{R}^{n-1}$  ist. OBdA gehen wir davon aus, dass  $\mathbb{R}^{n-1}$  identifiziert wird mit der Menge  $x_n = 0$  in  $\mathbb{R}^n$  und dass  $g : V \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow g(x_1, \dots, x_{n-1})$ . In diesem Fall ist  $K$  lokal gegeben durch  $x_n > g(x_1, \dots, x_{n-1})$  oder auch durch  $x_n < g(x_1, \dots, x_{n-1})$ . OBdA gehen wir davon aus, dass

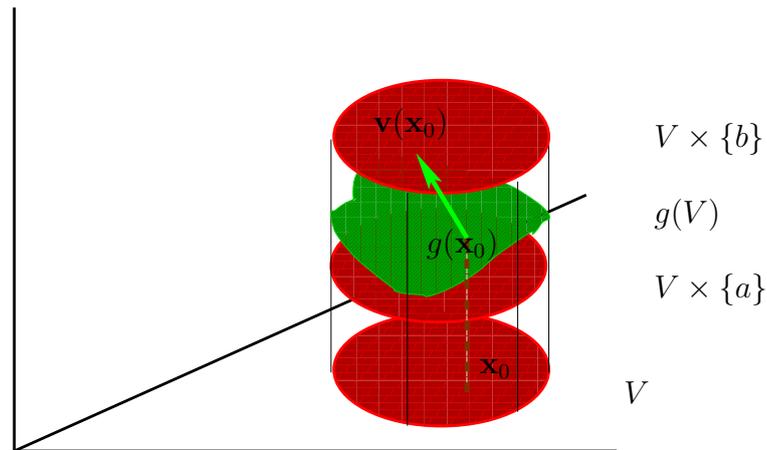


Abbildung 14.4: Der Normalenvektor im Falle einer Darstellung der Fläche als Graph. Unten sieht man (in rot) die offene Menge  $V$ , darüber  $V \times (a, b)$ . Dazwischen (in grün) der Graph von  $g$  über  $V$ . Am Punkt  $(\mathbf{x}_0, g(\mathbf{x}_0))$  ist der Normalenvektor  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  angedeutet.

$$K \cap (V \times I) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \times I \mid x_n < g(x_1, \dots, x_{n-1}) \right\}$$

für ein geeignetes offenes Intervall  $I$ . Unter diesen Umständen hat die äußere Normale die folgende Darstellung:

**Lemma 14.4.9 (Darstellung der äußeren Normalen)**

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|_2^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial g(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-1}} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|_2^2}} \begin{pmatrix} -\text{grad } g \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Nachrechnen!

□



# Kapitel 15

## Integralsätze

Den Höhepunkt der Analyseausbildung stellen traditionell die Integralsätze von Gauß, Greene und Stokes dar. Wir beweisen den Satz zunächst in einem Spezialfall, dann den allgemeinen Fall. Danach führen wir Formen ein und formulieren den Satz von Stokes in dieser Sprache.

### Inhalt

---

15.1 Satz von Gauss . . . . .	111
15.2 Pfaffsche Formen . . . . .	118
15.3 Differentialformen höherer Ordnung . . . . .	129
15.4 Der Satz von Stokes . . . . .	149

---

### 15.1 Der Satz von Gauß

Wir beginnen mit einer einfachen Form des Satzes von Gauß und beweisen danach die allgemeine Form mit einer geeigneten Teilung der Eins.

**Satz 15.1.1 (Satz von Gauß, einfache Version)**

Sei  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen,  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $g : V \rightarrow I$  stetig differenzierbar. Setze

$$K = \left\{ (\mathbf{x}', x_n) \in V \times I \mid a < x_n \leq g(x_1, \dots, x_{n-1}) \right\},$$
$$R = \left\{ (\mathbf{x}', x_n) \in V \times I \mid x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \right\}.$$

Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion  $f : V \times I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\text{supp } f \subset V \times I \text{ ist kompakt}$$

und für  $i = 1, \dots, n$  die folgende Integralidentität

$$\int_K \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\lambda_n = \int_R f(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) dS,$$

wobei  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  die äußere Normale im Punkt  $\mathbf{x}_0$  ist mit Koordinaten laut Lemma 14.4.9.

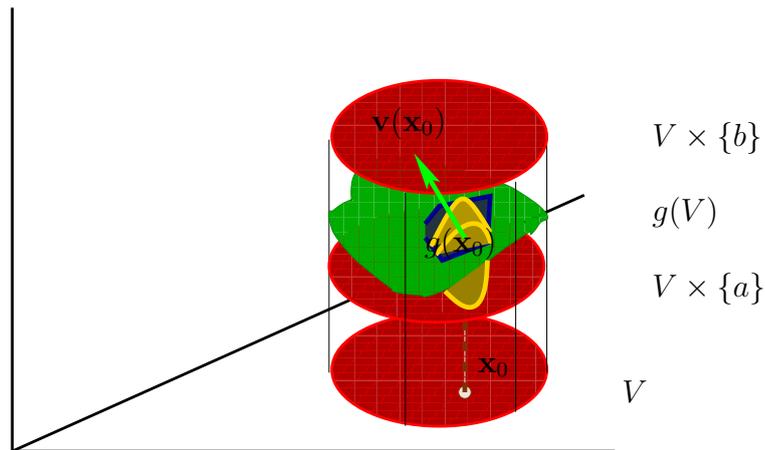


Abbildung 15.1: Die Darstellung entspricht der von Abbildung 14.4. In gelb wird dabei der Träger  $\text{supp } f$  angedeutet.

*Beweis.* Beim Beweis der Integralidentität unterscheiden wir zwei Fälle, erstens  $1 \leq i \leq n-1$  und zweitens  $i = n$ .

Wir beginnen mit dem ersten Fall, sei also  $1 \leq i \leq n-1$ . Wir definieren für  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$  und  $w \in (a, b) \subset \mathbb{R}$  eine neue Funktion

$$F(\mathbf{x}', w) = \int_a^w f(\mathbf{x}', x_n) dx_n.$$

Nach unseren Sätzen über parameterabhängige Integrale bzw. wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergeben sich nun für die verschiedenen partiellen Ableitungen von  $F$  folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}', w)}{\partial x_i} = \int_a^w \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}', x_n) dx_n \text{ für } 1 \leq i \leq n-1$$

und

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}', w)}{\partial w} = f(\mathbf{x}', w).$$

Dann ergibt die Kettenregel für  $1 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}'))}{\partial x_i} = \int_a^{g(\mathbf{x}')} \frac{\partial f(\mathbf{x}', x_n)}{\partial x_i} dx_n + f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial x_i}.$$

Mit dem Satz von Fubini berechnen wir das Integral über  $K$  als iteriertes Integral

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_i} d\lambda_n = \int_V \int_a^{g(\mathbf{x}')} \frac{\partial f(\mathbf{x}', x_n)}{\partial x_i} dx_n d\mathbf{x}'.$$

Wir betrachten zunächst das innere Integral (und erhalten mit der obigen Vorüberlegung) für  $1 \leq i \leq n-1$

$$\int_a^{g(\mathbf{x}')} \frac{\partial f(\mathbf{x}', x_n)}{\partial x_i} dx_n = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{g(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', x_n) dx_n - f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial x_i}.$$

Damit erhalten wir für das iterierte Integral ( $i \leq n-1$ )

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i} d\lambda_n &= \int_V \int_a^{g(\mathbf{x}')} \frac{\partial f(\mathbf{x}', x_n)}{\partial x_i} dx_n d\lambda_n \\ &= \int_V \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{g(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', x_n) dx_n - f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial x_i} \right) d\lambda_{n-1} \\ &= 0 - \int_V f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial x_i} d\lambda_{n-1} \\ &= \int_V f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) v_i(\mathbf{x}) \sqrt{1 + \|\text{grad } g\|_2^2} d\lambda_{n-1} \\ &= \int_R f(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) dS, \end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung aus der Parametrisierung der Randfläche durch

$$\psi_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{x}' \mapsto (\mathbf{x}', g(\mathbf{x}'))$$

mit Gramscher Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 + g_{x_1}^2 & g_{x_1}g_{x_2} & \cdots & \cdots & g_{x_1}g_{x_{n-1}} \\ g_{x_2}g_{x_1} & 1 + g_{x_2}^2 & \cdots & \cdots & g_{x_2}g_{x_{n-1}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ g_{x_{n-1}}g_{x_1} & \cdots & \cdots & g_{x_{n-1}}g_{x_{n-2}} & 1 + g_{x_{n-1}}^2 \end{pmatrix}$$

hervorgegangen ist. Hier ist es nicht unmittelbar klar, wie die Gramsche Determinante aussieht, daher berechnen wir diese mit Korollar 14.2.5. Mit

$$\psi(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(\mathbf{x}') \end{pmatrix}$$

erhält man  $D\psi$  zu

$$D\psi(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (\text{grad } g)^T \end{pmatrix}.$$

Es gibt eine Auswahl von  $n-1 \times n-1$ -Untermatrizen, in der die letzte Zeile nicht auftritt, dies führt auf Determinante 1, jede andere Auswahl streicht eine Reihe mit genau einem Eintrag 1 an der  $k$ -ten Stelle. Dies führt zur Determinante  $\pm g_{x_k}$ , insgesamt erhalten wir

$$g_V = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} g_{x_i}^2 = 1 + \|\text{grad } g\|^2.$$

Damit wird das Flächenelement zu  $dS = \sqrt{g_V} \, d\mathbf{x}'$ .

Für  $i = n$  ergibt sich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^{g(\mathbf{x}')} \frac{\partial f(\mathbf{x}', x_n)}{\partial x_n} \, dx_n = f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')).$$

Damit wird (wieder mit Fubini und dem iterierten Integral)

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\partial f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}'))}{\partial x_n} d\lambda_{n-1} &= \int_V \int_a^{g(\mathbf{x}')} \frac{\partial f(\mathbf{x}', x_n)}{\partial x_n} dx_n d\lambda_{n-1} = \int_V f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) d\lambda_{n-1} \\ &= \int_V f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) v_n(\mathbf{x}) \sqrt{1 + \|\text{grad } g\|_2^2} d\lambda_{n-1} \\ &= \int_R f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) v_n(\mathbf{x}) dS. \quad \square \end{aligned}$$

Um den Satz von Gauß in voller Allgemeinheit zu beweisen, benötigen wir eine Verfeinerung der Technik der Teilung der Eins.

### Aufgabe 15.1.2 ( $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger)

1. Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & , \text{ für } |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

aus  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  ist, d. h.  $f$  ist unendlich oft differenzierbar und hat kompakten Träger.

2. Die Funktion

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k)$$

ist unendlich oft differenzierbar, 1-periodisch und für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $G(x) \neq 0$ , genauer gilt  $G(n) = \frac{2}{e}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $e^{-\frac{4}{3}} \leq G \leq \frac{1}{e}$ .

3. Wir setzen für  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{f(x)}{G(x)}.$$

Dann ist  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  und  $g \leq 1$ . Es gilt  $\text{supp } g = [-1, 1]$ .

4. Es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = 1.$$

5. Für  $\mathbf{b} \in \varepsilon \mathbb{Z}^n$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  setzen wir

$$\sigma_{\mathbf{b}, \varepsilon}(\mathbf{x}) = \prod_{\nu=1}^n g\left(\frac{x_\nu - b_\nu}{\varepsilon}\right).$$

Dann gilt  $\sigma_{\mathbf{b}, \varepsilon} \geq 0$  und

$$\text{supp } \sigma_{\mathbf{b}, \varepsilon} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty \leq \varepsilon \right\}.$$

**Aufgabe 15.1.3 (Verschwinden des Integrales über eine partielle Ableitung)**

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi \in C_0^\infty(U; \mathbb{R})$ . Dann ist für  $j = 1, \dots, n$

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\lambda_n = 0.$$

Wir erinnern an die Definition eines Vektorfeldes (Analysis II Definition 11.3.1) und an den Begriff der Lebesgue-Zahl (Analysis I Beweis zu Satz 4.1.14).

**Definition 15.1.4 (Divergenz)**

Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld, so bezeichnen wir

$$\operatorname{div} v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

als Divergenz des Vektorfeldes  $v$ .

**Satz 15.1.5 ( $C^\infty$ -Teilung der Eins)**

Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $U_j \subset \mathbb{R}^n, j \in J$  eine offene Überdeckung von  $K$ , dann gibt es eine der Überdeckung  $U_j$  subordinierte  $C^\infty$ -Teilung der Eins.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  Lebesgue-Zahl der Überdeckung  $U_j, j \in J$  (vgl. Beweis zu Satz 4.1.14). Betrachte die Überdeckung mit den Trägern der Funktionen  $\sigma_{\mathbf{b}, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}}$ ,  $\mathbf{b} \in \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}\mathbb{Z}^n$ . (Nehme nur solche, die auch  $K$  schneiden.) Dies ergibt eine abzählbare, der vorgegebenen Überdeckung subordinierte Überdeckung (Subordination kommt von der Konstruktion mittels der Lebesgue-Zahl). Auf  $K$  ergeben die Funktionen  $\sigma_{\mathbf{b}, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}}$  eine Teilung der Eins.  $\square$

**Satz 15.1.6 (Gauß<sup>1</sup>)**

Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein Kompaktum mit glattem Rand,  $\mathbf{v} : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äußere Einheitsnormalenfeld und  $U \supset K$  sei offen,  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein  $C^1$ -Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\lambda_n = \int_{\partial K} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle dS.$$

<sup>1</sup>Carl Friedrich Gauß (30.4.1777–23.2.1855) war einer der bedeutendsten, vielleicht der bedeutendste Mathematiker der Geschichte. Seine frühe mathematische Begabung ist legendär. Es bewies nicht nur den Fundamentalsatz der Algebra und entdeckte vieles in der Geometrie.



Abbildung 15.2: Der Zehnmarkschein

*Beweis.* Wir konstruieren zunächst eine Überdeckung von  $K$  mit offenen Mengen, die folgende Eigenschaft besitzt: Jedes Element  $U$  dieser Überdeckung ist entweder in  $K \setminus \partial K$  oder  $U$  kann als Produkt  $V \times (a, b)$  mit  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  geschrieben werden und  $\partial K \cap U$  ist Graph einer Abbildung  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Konstruktion einer solchen Überdeckung kann wie folgt angegeben werden: Zu jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \partial K$  gibt es eine Umgebung  $U$ , die als Produkt in der angegebenen Weise geschrieben werden kann. Daraus entsteht eine Überdeckung von  $\partial K$ . Da  $\partial K$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $U_1, \dots, U_j$  mit den angegebenen Eigenschaften. Dann ist  $K_1 = K \setminus (\cup_{i=1}^j U_i)$  kompakt, es gibt eine offene Überdeckung von  $K_1$  mit offenen Mengen, die  $\partial K$  nicht schneiden (man nehme eine Überdeckung mit  $B_\varepsilon$ -Kugeln und  $\varepsilon < \text{dist}(K_1, \partial K)$ ).

Sei  $\mathcal{U} = U_j$ ,  $j \in J$  eine offene solche Überdeckung von  $K$ . Sei  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine dieser Überdeckung subordinierte  $C^\infty$ -Teilung der Eins.

Dann ist

$$\int_K \text{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\lambda_n = \int_K \text{div} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right) \, d\lambda_n = \sum_{j=1}^{\infty} \int_K \text{div}(\varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x})) \, d\lambda_n.$$

Ganz entsprechend erhalten wir für die rechte Seite

$$\int_{\partial K} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle \, dS = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial K} \langle \varphi_j(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle \, dS.$$

Damit reicht es die entsprechende Gleichheit für festes  $j$  zu beweisen. Ist  $\text{supp} \varphi_j$  in einem Element der Überdeckung enthalten, die  $\partial K$  schneidet, folgt die Behauptung, indem wir Satz 15.1.1 auf die einzelnen Komponenten von  $F$  anwenden und addieren. Ist  $\text{supp} \varphi_j$  einem  $U$  mit  $U \cap \partial K = \emptyset$ , so verschwindet das entsprechende Integral auf der rechten Seite. Die linke Seite ist das Integral über (eine Summe von) Ableitungen von Funktionen mit kompakten Träger. Als solches ergibt es den Wert 0, vergleiche Aufgabe 15.1.3  $\square$

---

Sein Werk ist die Grundlage der Theorie der Modulformen, die Landvermessung wurde von ihm entscheidend geprägt und in der Physik ist ein Maß des Magnetismus nach ihm benannt. Sein bedeutendes wissenschaftliches Werk wurde durch den Zehnmarkschein geehrt.

**Beispiel 15.1.7 (Anwendungen in der Physik)**

Der Satz von Gauß hat wichtige Anwendungen in der Physik:

## 1. Strömungen

Hat man eine Strömung aus durch eine geschlossene Fläche, so muss darin die Quellstärke der Strömung durch die Fläche entsprechen.

## 2. Elektrodynamik

Das elektrische Feld genügt der Maxwell-Gleichung<sup>2</sup>

$$\operatorname{div} E = \rho,$$

wobei  $E$  für das elektrische Feld,  $\rho$  für die Ladungsdichte steht. Der Gaußsche Integralsatz besagt nun, dass

$$\int_K \rho \, d\lambda = \int_{\partial K} \langle E(\mathbf{x}), \nu(\mathbf{x}) \rangle \, dS$$

ist, also die Ladungsdichte integriert über das Innere ergibt den Fluss durch die Oberfläche.

## 3. Magnetismus

Das magnetische Feld ist quellenfrei (Elementarmagneten haben immer sowohl Nord- wie auch Südpol), dies wurde durch Maxwell so formuliert:

$$\operatorname{div} B = 0,$$

wobei  $B$  hier für das magnetische Feld steht.

## 15.2 Pfaffsche Formen

Im Folgenden sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Klasse  $C^\ell$  und  $W$  eine offene Teilmenge von  $M$  (insbesondere ist zugelassen, dass  $k = n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen ist). Für  $\mathbf{x} \in W$  sei  $T_{\mathbf{x}}M$  der Tangentialraum an  $M$ , wie er in Definition 14.3.2 definiert wurde.

**Definition 15.2.1 (Kotangentialraum)**

Der duale Vektorraum  $(T_{\mathbf{x}}M)^*$  heißt Kotangentialraum. Wir schreiben dafür auch  $T_{\mathbf{x}}^*M$ . Die Elemente eines Kotangentialraumes  $T_{\mathbf{x}}^*(M)$  nennen wir Kotangentialvektoren.

<sup>2</sup>James Clark Maxwell (13.6.1831–5.11.1879) war ein bedeutender britischer Physiker. Nach ihm benannt sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik, die das Verhalten elektrischer und magnetischer Felder, beschreiben.

**Definition 15.2.2 (Pfaffsche Form)**

Es sei  $W \subset M$  offen. Eine Abbildung

$$\omega : W \rightarrow \bigcup_{\mathbf{x} \in W} T_{\mathbf{x}}^*M,$$

welches jedem  $\mathbf{x}$  einen Kotangentialvektor zuordnet mit  $\omega(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^*M$ , heißt Pfaffsche Form<sup>3</sup>.

**Definition 15.2.3 (stetig differenzierbar)**

Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig differenzierbar im Punkt  $\mathbf{x} \in M$ , wenn es eine Umgebung  $W \subset M$  von  $x$  gibt, so dass für jede Karte  $(U, \psi_U)$  mit  $\mathbf{x} \in \psi_U(U)$  gilt:  $f \circ \psi_U : \psi_U^{-1}(W) \cap U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar.

**Lemma 15.2.4 (Kartenunabhängigkeit)**

Die Bedingung aus der letzten Definition ist genau dann für jede Karte erfüllt, wenn sie für eine Karte (die den Punkt  $\mathbf{x}$  enthält) gilt.

*Beweis.* Sind  $(U, \psi_U)$ ,  $(V, \psi_V)$  zwei Karten, deren Kartengebiete den Punkt  $\mathbf{x}$  enthalten. Dann ist  $\psi_U^{-1}(W) \cap U \neq \emptyset$  und  $\psi^{-1}(W) \cap V \neq \emptyset$  und

$$f \circ \psi_V|_{\psi_V^{-1}(W) \cap V} = f \circ \psi_U \circ \psi_{UV}|_{\psi_V^{-1}(W) \cap V}.$$

Ist  $f \circ \psi_U$  differenzierbar (auf der entsprechenden Menge), so folgt es jetzt sofort für die Einschränkung von  $f \circ \psi_V$  auf  $\psi_V^{-1}(W) \cap V$ .  $\square$

**Lemma 15.2.5 (Pfaffsche Formen als Differential differenzierbarer Abbildungen)**

1. Sei  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}M$  für ein  $\mathbf{x}_0 \in W$  und  $\gamma_{1,2} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$  seien stetig differenzierbare Kurven mit  $\gamma_i(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\gamma_i'(0) = \mathbf{v}$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist

$$f \circ \gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar und es gilt

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0).$$

<sup>3</sup>Johann Friedrich Pfaff (22.12.1765–21.4.1825) arbeitete vorwiegend über partielle Differentialgleichungen. In diesem Kontext führte er auch die nach ihm benannten Differentialformen ein. Diese wurden später intensiv untersucht und spielen bis heute eine wichtige Rolle.

2. Seien  $\mathbf{x} \in W$  und  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M$  und  $\gamma_{\mathbf{x},\mathbf{v}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma_{\mathbf{x},\mathbf{v}}(0) = \mathbf{x}$  und  $\gamma'_{\mathbf{x},\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ , so definiert

$$\begin{aligned} df & : W \rightarrow \bigcup_{x \in W} T_x^*M : \mathbf{x} \mapsto df(\mathbf{x}) \\ df(\mathbf{x})(\mathbf{v}) & = (f \circ \gamma)'(0) \end{aligned}$$

eine Pfaffsche Form.

*Beweis.* 1. Als erstes zeigen wir die stetige Differenzierbarkeit der angegebenen Abbildungen. Sei zunächst  $\gamma = \gamma_1$  oder  $\gamma = \gamma_2$ . Dazu sei  $\mathbf{x}_0 \in Z \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  und  $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine geradebiegender Diffeomorphismus mit  $F(\mathbf{x}_0) = 0$  und  $F(Z \cap M) \subset \mathbb{R}^k$ . OBdA ist  $W \subset Z$ , ansonsten müssen die Umgebung  $W$  und die Zahl  $\varepsilon > 0$  entsprechend verkleinert werden. Dann sind die ersten  $k$  Komponenten von  $F$ , also mit einer Projektion  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  die Abbildung

$$g = \Pi \circ F,$$

ein Homöomorphismus auf einer Umgebung  $Y \subset M$  und

$$\psi_U : g(Y) \rightarrow W : \psi_U = g^{-1}$$

ist eine Karte von  $M$  am Punkt  $\mathbf{x}_0$ . Dann ist für  $j = 1, 2$

$$f \circ \gamma_j = (f \circ \psi_U) \circ (\psi_U^{-1} \circ \gamma_j)$$

stetig differenzierbar, denn die beiden Abbildungen  $f \circ \psi_U$  und  $\psi_U^{-1} \circ \gamma$  sind beide stetig differenzierbar. Dann sind auch jeweils  $f \circ F^{-1}$  und  $F \circ \gamma$  stetig differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) & = D(f \circ F^{-1})(0)DF(\mathbf{x}_0)\gamma'(0) \\ & = D(f \circ F^{-1})(0)DF(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist daher für beide Kurven gleich.

2. Zu zeigen ist: Für jedes  $\mathbf{x} \in W$  ist  $df(\mathbf{x}) : T_{\mathbf{x}}M \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Abbildung. Seien dazu  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_{\mathbf{x}}M$  und  $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten Kurven  $\gamma_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  auf  $M$  durch  $\mathbf{x}$  mit

$$\gamma'_i(0) = \mathbf{v}_i.$$

Setze

$$\tilde{\gamma}(t) = F^{-1}(\alpha_1 F \circ \gamma_1(t) + \alpha_2 F \circ \gamma_2(t)).$$

Beachte  $F \circ \gamma_i(0) = 0$  und daher kann man durch Verkleinern von  $\varepsilon$  erreichen, dass  $\alpha_1 F \circ \gamma_1(t) + \alpha_2 F \circ \gamma_2(t)$  für  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  in  $F(Z)$ .  $\tilde{\gamma}$  ist differenzierbar und die Ableitung ist durch

$$\tilde{\gamma}'(0) = DF^{-1}(0)(\alpha_1 DF(\mathbf{x})\mathbf{v}_1 + \alpha_2 DF(\mathbf{x})\mathbf{v}_2) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$$

gegeben. Dann ist nach Definition von  $df(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x})(\mathbf{w}) &= (f \circ \tilde{\gamma})'(0) \\ &= (f \circ F^{-1} \circ F \circ \tilde{\gamma})'(0) \\ &= D(f \circ F^{-1})(0)(DF(\mathbf{x})\tilde{\gamma}'(0)) \\ &= D(f \circ F^{-1})(0)(DF(\mathbf{x})(\mathbf{w})) \\ &= \alpha_1 D(f \circ F^{-1})(0)DF(\mathbf{x})\mathbf{v}_1 + \alpha_2 D(f \circ F^{-1})(0)DF(\mathbf{x})\mathbf{v}_2 \\ &= \alpha_1 df(\mathbf{x})\mathbf{v}_1 + \alpha_2 df(\mathbf{x})\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Linearität von  $df(\mathbf{x})$ . □

**Definition 15.2.6 (Totales Differential)**

*df wird als totales Differential von f bezeichnet.*

Wir kommen nun dazu die Differentiale lokaler Koordinaten zu betrachten. Dazu sei  $\mathbf{x}_0 \in M$  ein Punkt auf einer Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $(U, \psi_U)$  eine Karte mit  $0 \in U$   $\psi(0) = \mathbf{x}_0$  im Kartengebiet dieser Karte. Wir bezeichnen für  $1 \leq i \leq k$  die Funktionen

$$y_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{y} = \sum_{j=1}^k y_j \mathbf{e}_j \mapsto y_i$$

als *Koordinatenfunktionen* im  $\mathbb{R}^k$ .

**Definition 15.2.7 (lokale Koordinatenfunktionen)**

*Durch*

$$x_i = y_i \circ \psi_U^{-1}$$

*definieren wir lokale Koordinatenfunktionen auf M im Punkt  $\mathbf{x}_0$ .*

Koordinatenfunktionen hängen von der Wahl der Karte ab, beim Übergang von einer Karte zu einer anderen werden sie entsprechend transformiert. Koordinatenfunktionen erlauben uns die Pfaffschen Formen auf Kartengebieten auf einfachere Weise darzustellen.

**Lemma 15.2.8 (Basis Kotangentialraum)**

Sind  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  die Koordinatenfunktionen zu einer Karte  $(U, \psi_U)$ ,  $0 \in U$ ,  $\mathbf{x}_0 = \psi_U(0)$  und  $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, k$  die Basis von  $T_{\mathbf{x}_0}M$  vermöge

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \psi_U(t\mathbf{e}_i)_{t=0}, \quad i = 1, \dots, k,$$

so sind für  $\mathbf{x} \in U$  die Differentiale  $\{dx_i(\mathbf{x})\}_{i=1, \dots, k}$  eine Basis für den Kotangentialraum  $T_{\mathbf{x}}^*M$ . Es gilt

$$dx_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}.$$

*Beweis.* Es gilt  $y_i = x_i \circ \psi_U$ . Also ist

$$dx_i(\mathbf{v}_j) = x_i(\psi_U(t\mathbf{e}_j))'(0) = y_i(t\mathbf{e}_j)'(0) = \delta_{ij}.$$

Daraus folgt sofort, dass die  $dx_i$  eine Basis bilden. □

**Korollar 15.2.9 (Pfaffsche Form)**

Eine Pfaffsche Form  $\omega$  auf einem Kartengebiet  $\psi_U(U)$  hat die Form

$$\sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}) dx_i.$$

*Beweis.* Die Formen  $dx_i$  bilden an jeder Stelle in dem Kartengebiet  $\psi_U(U)$  eine Basis, also lässt sich  $\omega$  darstellen als

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}) dx_i. \quad \square$$

**Definition 15.2.10 (Stetige Differenzierbarkeit von Formen)**

Eine Form  $\omega$  heißt stetig bzw.  $k$ -fach stetig differenzierbar in  $\mathbf{x}$ , wenn es eine Karte  $(U, \psi_U)$  gibt, deren Kartengebiet  $\mathbf{x}$  enthält, so dass die Koeffizienten der Darstellung

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}) dx_i$$

stetig bzw.  $k$ -fach stetig differenzierbar sind.

**Bemerkung 15.2.11 (Kartenunabhängigkeit der Stetigkeit einer Pfaffschen Form)**

Die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von Pfaffschen Formen hängt nicht von der Wahl der Karte ab.

Wir wollen nun Kurvenintegrale von Pfaffschen Formen definieren. Die allgemeine Situation ist nach wie vor:  $M$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Klasse  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Es sei  $\omega$  eine Pfaffsche Form auf  $W \subset M$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow W \subset M$  eine Kurve auf  $M$ , die auf  $(a, b)$  stetig differenzierbar sei.

**Definition 15.2.12 (Integral einer Form längs eines Weges)**

Es sei  $\omega$  eine stetige Pfaffsche Form. Zu einer Überdeckung von  $\gamma([a, b])$  mit Kartengebieten  $\{\psi_U(U), U \in \mathcal{A}\}$  und einer Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  von  $[a, b]$ , so dass für jedes  $0 \leq i < m$  eine Karte  $(U_i, \psi_{U_i})$  existiert mit

$$\gamma([\zeta_i, \zeta_{i+1}]) \subset \psi_{U_i}(U_i),$$

definieren wir das Integral der Form längs  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \omega$$

mit  $d\omega = \sum_j f_j dx_j$  durch

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^k \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} f_j(\gamma(s)) dx_j(\gamma(s)) \gamma'(s) ds.$$

**Lemma 15.2.13 (Integration Pfaffscher Formen)**

Ist  $\omega$  eine stetige Pfaffsche Form auf der Untermannigfaltigkeit  $M$  und ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine stetige, auf  $(a, b)$  differenzierbare Kurve, so dass  $\gamma'$  bis in die Endpunkte stetig fortgesetzt werden kann, so existiert das Integral

$$\int_{\gamma} \omega.$$

Der Wert des Integrals hängt nicht von der Zerlegung und nicht von der Wahl der Karten ab.

Die Aussage bleibt richtig, wenn die Kurve stetig ist und stückweise stetig differenzierbar und die Ableitungen sich jeweils (halbseitig) stetig in die Unstetigkeitsstellen der Ableitung fortsetzen lassen.

*Beweis.* Zunächst zur Existenz: Wir betrachten für eine Karte  $(U, \psi_U)$  und Zerlegungspunkte  $\zeta_i, \zeta_{i+1}$  mit  $\gamma([\zeta_i, \zeta_{i+1}]) \subset U$  den Integranden

$$\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = \sum_{i=1}^k f_i(\gamma(t)) dx_i(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^k f_i(\gamma(t)) (x_i(\gamma(t)))'.$$

Letzteres ist eine stetige Funktion auf dem Intervall  $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$  und daher existiert das Integral.

Angenommen wir hätten zwei Zerlegungen  $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$  und zu jeder Zerlegung eine Überdeckung  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ , so dass zu  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq m'$  ein  $U \in \mathcal{A}$  bzw. ein  $U' \in \mathcal{A}'$  existiert mit

$$\gamma([\zeta_i, \zeta_{i+1}]) \subset \psi_U(U) \text{ bzw. } \gamma([\zeta'_j, \zeta'_{j+1}]) \subset \psi_{U'}(U').$$

Nach Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung von  $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$  dürfen wir annehmen, dass es ein  $U \in \mathcal{A}$  und ein  $U' \in \mathcal{A}'$  gibt mit

$$\gamma([\zeta_i, \zeta_{i+1}]) \subset \psi_U(U) \text{ und } \gamma([\zeta_i, \zeta_{i+1}]) \subset \psi_{U'}(U').$$

Nun hängt die Definition des Integrals

$$\int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \omega(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

nicht von der Wahl der Karte ab, daher sind diese Integrale gleich.

Die letzte Aussage beweist man einfach, indem man (zusätzliche) Zerlegungspunkte in die Unstetigkeitsstellen der Ableitung legt.  $\square$

**Lemma 15.2.14 (Invarianz unter Reparametrisierung)**

*Der Wert des Integrals ist invariant unter differenzierbaren Parametertransformationen  $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  mit  $\tau(c) = a, \tau(d) = b$ .*

*Gilt umgekehrt  $\tau(c) = b, \tau(d) = a$ , so wechselt das Integral das Vorzeichen.*

*Beweis.* Folgt einfach aus der Transformationsformel für Integrale.  $\square$

Der folgende Satz verallgemeinert den Satz 8.4.6.

**Satz 15.2.15 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals)**

*Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit,  $U \subset M$  offen und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine stetig differenzierbare Kurve, so gilt*

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Beweis.* Wir betrachten eine Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $[a, b]$  und eine Überdeckung von  $\gamma([a, b])$  mit Kartengebieten, so dass  $\gamma([\zeta_i, \zeta_{i+1}])$  jeweils in einem Kartengebiet liegt. Dann ist

$$\int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} dF(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(\zeta_{i+1})) - F(\gamma(\zeta_i)).$$

Summation über die Zerlegung beweist die Aussage.  $\square$

**Korollar 15.2.16 (Kurvenintegrale über geschlossene Kurven)**

*Ist  $\gamma$  eine geschlossene Kurve, so ist unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes*

$$\int_{\gamma} dF = 0.$$

**Beispiel 15.2.17 (Pfaffsche Form im  $\mathbb{R}^2$ )**

In diesem Beispiel betrachten wir eine offene Menge  $U$  in  $\mathbb{R}^2$  als Untermannigfaltigkeit, die Koordinatenfunktionen sind einfach die Standardkoordinaten  $x, y$  und stetige Pfaffsche Formen haben die Gestalt

$$\omega = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy.$$

Wir betrachten  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0\}$  und darauf die Funktionen

$$f_1(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Beide Funktionen sind auf  $U$  stetig differenzierbar. Die Form

$$\omega : U \rightarrow \bigcup_{\{(x,y) \mid x^2+y^2>0\}} T_{(x,y)}^*U : (x, y) \mapsto f_1 dx + f_2 dy$$

ist daher stetig differenzierbar. Wir betrachten als Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$dx(\gamma'(t)) = (x \circ \gamma)'(t) = -\sin t, \quad dy(\gamma'(t)) = \cos t.$$

Damit ist

$$\omega(\gamma'(t)) = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

und damit

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi.$$

Wie ändert sich das Integral, wenn wir  $\gamma$  durch  $r\gamma$ ,  $r > 0$  ersetzen?

Entsprechend der Definition 8.4.2 definieren wir Gebiete auf Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 15.2.18 (Gebiet)**

*Eine offene, zusammenhängende Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt Gebiet auf  $M$ .*

**Satz 15.2.19 (Wegezusammenhang)**

*Ein Gebiet einer Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist wegezusammenhängend.*

*Beweis.* Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf  $M$  durch

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ mit } \gamma \text{ stetig und } \gamma(0) = \mathbf{x}, \gamma(1) = \mathbf{y}.$$

(Es ist klar, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.) Da jeder Punkt eine zu einer offenen Kugel des  $\mathbb{R}^k$  homöomorphe Umgebung besitzt, sind Äquivalenzklassen offen, da eine beliebige Vereinigung offener Mengen offen ist, sind Äquivalenzklassen als Komplement der Vereinigung aller anderen Äquivalenzklassen auch abgeschlossen und damit offen und abgeschlossen. In einer zusammenhängenden Menge ist jede offene und abgeschlossene entweder leer oder die gesamte Menge, also folgt der Satz.  $\square$

**Lemma 15.2.20 (Wegezusammenhang eines Gebietes)**

*In einem Gebiet einer Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  gibt es zu je zwei Punkten eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurve, die diese verbindet.*

*Beweis.* Übung!  $\square$

**Satz 15.2.21 (Verschwindendes totales Differential)**

*Ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $W$  ein Gebiet auf  $M$ . Ist  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $dF = 0$ , so ist  $F$  auf  $W$  konstant.*

*Beweis.* Sind  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$  eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurve (mit rechts- und linksseitigen Grenzwerten an allen Zerlegungspunkten). Dann ist

$$\int_{\gamma} dF = 0,$$

also  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$ . □

**Definition 15.2.22 (Stammfunktion)**

*Es sei  $W \subset M$  ein Gebiet und  $\omega$  eine Pfaffsche Form. Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dF = \omega$ , so nennen wir  $F$  die Stammfunktion von  $\omega$ .*

**Satz 15.2.23 (Stammfunktion und Kurvenintegral)**

*Es sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $W \subset M$  ein Gebiet. Eine stetige Pfaffsche Form  $\omega$  auf  $W$  besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn für jede geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$  gilt*

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

*Beweis.* Wir fixieren einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in W$ . Zu jedem Punkt  $\mathbf{x}$  gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\gamma_{\mathbf{x}} : [0, 1] \rightarrow W$  mit

$$\gamma_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \gamma_{\mathbf{x}}(1) = \mathbf{x}.$$

Wir setzen

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \omega.$$

Gibt es eine weitere solche Kurve  $\gamma$ , die die beiden Punkte verbindet, so verknüpfen wir die beiden Kurven indem wir zunächst  $\gamma_{\mathbf{x}}$  in positiver und danach  $\gamma$  in negativer Weise durchlaufen. Dies ergibt eine geschlossene Kurve  $\alpha$  mit

$$\int_{\alpha} \omega = 0.$$

Dann ist aber

$$\int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \omega = \int_{\gamma} \omega.$$

Es bleibt zu zeigen  $dF = \omega$ . Dazu sei  $(U, \psi_U)$  eine Karte mit  $\mathbf{x} \in \psi_U(U)$  und  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine stetig differenzierbare Kurve mit  $\gamma(0) = \mathbf{x}$ ,  $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ . Wir wollen

$$dF(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \omega(\mathbf{x})(\mathbf{v})$$

nachweisen. Also betrachten wir

$$(F \circ \gamma)'(0).$$

Sei  $\gamma_{\mathbf{x}} : [0, 1] \rightarrow M$  eine Kurve, die  $\mathbf{x}_0$  mit  $\mathbf{x}$  verbindet. Für Punkte  $\gamma(t) = \mathbf{w} \in \gamma((0, \varepsilon))$  schreiben wir

$$\gamma_{\mathbf{w}} : [0, 1 + t] \rightarrow M : s \mapsto \begin{cases} \gamma_{\mathbf{x}}(s) & 0 \leq s \leq 1 \\ \gamma(s-1) & 1 < s \leq 1+t \leq 1+\varepsilon \end{cases}.$$

Entsprechend schreiben wir für Punkte  $\gamma(t) = \mathbf{w} \in \gamma((-\varepsilon, 0))$

$$\gamma_{\mathbf{w}} : [0, 1 + |t|] \rightarrow M : s \mapsto \begin{cases} \gamma_{\mathbf{x}}(s) & 0 \leq s \leq 1 \\ \gamma(1-s) & 1 < s \leq 1+|t| \leq 1+\varepsilon \end{cases}.$$

Diese Kurven sind stückweise stetig differenzierbar und wir erhalten für den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((F \circ \gamma)(t) - (F \circ \gamma)(0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int_{\gamma_{\gamma(t)}} \omega - \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \omega \right).$$

Dann erhalten wir einfach (falls  $t$  so klein ist, dass  $\gamma([0, t])$  bzw.  $\gamma([t, 0])$  jeweils in einem Kartengebiet liegt)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^k f_i(\gamma(t)) dx_i(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Der Integrand ist stetig und wir erhalten einfach den Integranden an der Stelle 0, d. h.

$$\sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}) dx_i(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \omega(\mathbf{v}). \quad \square$$

Wir werden später sehen, dass die Existenz von Stammfunktionen mit der Geometrie eines Gebietes zusammenhängt. Die Bedingung, dass die Integrale über geschlossene Kurven 0 ergeben ist zwar notwendig und hinreichend, aber i. A. schwer nachprüfbar. Deswegen wollen wir einfachere Kriterien finden. Dabei werden wir in Kauf nehmen müssen, dass diese nur noch hinreichend, jedoch nicht notwendig sind.

## 15.3 Differentialformen höherer Ordnung

In diesem Abschnitt benötigen wir noch ein paar Konzepte aus der linearen Algebra.

### Definition 15.3.1 (Alternierende Form)

Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\omega : V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt alternierende  $k$ -Form, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1.  $\omega$  ist in jeder Komponente linear.
2. Gibt es ein Paar  $(v_i, v_j)$  von Argumenten mit  $v_i = v_j$ , so ist

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0.$$

Die Menge aller alternierenden  $k$ -Formen auf  $V$  wird mit

$$\Lambda^k V^* = \left\{ \omega : V^k \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ ist alternierende } k\text{-Form} \right\}$$

bezeichnet.

### Lemma 15.3.2 (Alternierende Formen bilden Vektorraum)

$\Lambda^k V^*$  ist ein Vektorraum.

*Beweis.* Die argumentweise Addition und Multiplikation mit Skalaren macht den Raum offensichtlich zum linearen Raum.  $\square$

### Bemerkung 15.3.3 (Alternierende 1-Formen)

$\Lambda^1 V^* = V^*$ .

Der Begriff der alternierenden Form wird durch das folgende Lemma motiviert.

### Lemma 15.3.4 (Vertauschungseigenschaft)

Vertauscht man ein Paar von Argumenten, so kehrt sich das Vorzeichen von  $\omega$  um:

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n), \quad (15.1)$$

wobei die Notation bedeutet, dass alle anderen Argumente unverändert bleiben.

*Beweis.* Es gilt aufgrund der zweiten Eigenschaft

$$\omega(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n) = 0.$$

Aufgrund der Linearität folgt nun

$$0 = \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n) + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n).$$

Wenden wir dies ein zweites Mal an, so ergibt sich (zweite Eigenschaft)

$$0 = \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Daraus folgt die Behauptung sofort.  $\square$

**Bemerkung 15.3.5 (Vertauschungseigenschaft und Definition)**

Unter der Annahme der Linearität kann man auch die zweite Eigenschaft der Definition 15.3.1 aus der Vertauschungseigenschaft (15.1) schließen.

Wir erinnern an die Definition der *Permutationsgruppe*  $\mathfrak{S}_n$  von  $k$  Symbolen, wie sie in der Vorlesung Lineare Algebra vorgestellt wurde: Sei  $X$  eine  $k$ -elementige Menge

$$\mathfrak{S}_k = \left\{ \pi : X \rightarrow X \mid \pi \text{ ist Bijektion} \right\}.$$

Eine *Transposition* ist eine spezielle Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht. Es gilt der folgende wichtige Satz.

**Satz 15.3.6 (Permutationen als Produkte von Transpositionen)**

*Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden. Für zwei verschiedene Darstellungen einer Permutation als Produkt von Transpositionen gilt, dass die Differenz der Faktoren eine gerade Zahl ist, d. h. hat man  $r_1$  und  $r_2$  Faktoren, so ist*

$$r_1 \cong r_2 \pmod{2}.$$

*Beweis.* Siehe Vorlesung Lineare Algebra.  $\square$

**Definition 15.3.7 (Parität)**

Das Vorzeichen (oder auch die Parität) einer Permutation  $\pi$  ist definiert als

$$\text{sgn}(\pi) = (-1)^r,$$

wobei  $r$  die Anzahl der Transpositionen in einer Darstellung von  $\pi$  als Produkt von Transpositionen ist.

Dieser Satz impliziert nun, dass alternierende  $k$ -Formen sich unter Permutationen wie folgt verhalten.

**Satz 15.3.8 (Permutation der Argumente)**

Sei  $\pi \in \mathfrak{S}_k$  eine Permutation.

$$\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}(\pi)\omega(v_1, \dots, v_k).$$

*Beweis.* Folgt sofort aus dem zuvor Gesagten. □

**Definition 15.3.9 (Dachprodukt)**

Wir betrachten  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$  und definieren eine Abbildung

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}.$$

**Lemma 15.3.10 (Alternierende Formen aus Dachprodukten)**

Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ , so ist

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*,$$

d. h. es ist eine alternierende  $k$ -Form.

*Beweis.* Beide Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen, ist  $v_j = \alpha w_1 + \beta w_2$ , so ist

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k) &= (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, \alpha w_1 + \beta w_2, \dots, v_k) \\
&= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(\alpha w_1 + \beta w_2) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \varphi_2(v_1) & \dots & \varphi_2(\alpha w_1 + \beta w_2) & \dots & \varphi_2(v_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k-1}(v_1) & \dots & \varphi_{k-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) & \dots & \varphi_{k-1}(v_k) \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(\alpha w_1 + \beta w_2) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(\alpha w_1) + \varphi_1(\beta w_2) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \varphi_2(v_1) & \dots & \varphi_2(\alpha w_1) + \varphi_2(\beta w_2) & \dots & \varphi_2(v_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k-1}(v_1) & \dots & \varphi_{k-1}(\alpha w_1) + \varphi_{k-1}(\beta w_2) & \dots & \varphi_{k-1}(v_k) \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(\alpha w_1) + \varphi_k(\beta w_2) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(w_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \varphi_2(v_1) & \dots & \varphi_2(w_1) & \dots & \varphi_2(v_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k-1}(v_1) & \dots & \varphi_{k-1}(w_1) & \dots & \varphi_{k-1}(v_k) \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(w_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(w_2) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \varphi_2(v_1) & \dots & \varphi_2(w_2) & \dots & \varphi_2(v_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k-1}(v_1) & \dots & \varphi_{k-1}(w_2) & \dots & \varphi_{k-1}(v_k) \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(w_2) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dies beweist die erste Eigenschaft. Sind zwei der Argumente gleich, dann entstehen in der Determinante zwei gleiche Spalten und das Resultat ist offensichtlich 0.  $\square$

Die lineare Struktur des Raumes  $\Lambda^k V^*$  lässt sich leicht angeben.

**Satz 15.3.11 (Dimension des Raumes  $\Lambda^k(V^*)$ )**

Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Raum über  $\mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}.$$

Genauer gilt: Bildet die Menge  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  eine Basis von  $V^*$ , so bilden wie Dachprodukte

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von  $\Lambda^k V^*$ .

*Beweis.* Sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$  die zu  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  duale Basis, d. h. für  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$  gilt

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

Dann ist für  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  und  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}) = \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \dots & \delta_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_k j_1} & \dots & \delta_{i_k j_k} \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau dann nicht null, wenn  $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_k = j_k$ . Damit sind die entsprechenden Dachprodukte eine *linear unabhängige Menge* von  $\Lambda^k V^*$ . Die Anzahl der Elemente dieser Menge ist gerade  $\binom{n}{k}$ . Wir müssen noch zeigen, dass diese Menge *erzeugend* ist. Sei  $\omega \in \Lambda^k V^*$ . Setze

$$\lambda_{i_1 \dots i_k} = \omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}).$$

Wir betrachten nun für  $(w_1, \dots, w_k) \in V^k$

$$\left( \omega - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \right) (w_1, \dots, w_k).$$

Jedes der  $w_j$  lässt sich als Linearkombination der  $v_i$  schreiben, danach wenden wir die Linearität in allen  $k$  Einträgen an. Wir erhalten eine Linearkombination aus

$n^k$ -Summanden (wir wollen dies nicht ausschreiben). Jeder dieser Summanden hat einen Vorfaktor und einen Term der Form

$$\left( \omega - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \right) (v_{j_1}, \dots, v_{j_k}).$$

Nun ist jeder dieser Ausdrücke nach Definition 0. □

**Satz 15.3.12 (Transformation von Dachprodukten)**

Es seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ . Ferner sei  $A$  eine  $k \times k$ -Matrix und

$$\psi_i = \sum_{j=1}^k a_{ji} \varphi_j.$$

Dann ist

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \det A \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k.$$

Der Determinantenentwicklungssatz (vgl. Lineare Algebra) ergibt die folgende Darstellung

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{k\pi(k)}.$$

*Beweis.* Nun ist

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k &= \left( \sum_{j=1}^k a_{j1} \varphi_j \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j=1}^k a_{jn} \varphi_j \right) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} (a_{1\pi(1)} \dots a_{k\pi(k)}) \varphi_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\pi(k)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) (a_{1\pi(1)} \dots a_{k\pi(k)}) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \\ &= \det A \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k. \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 15.3.13 (Dachprodukt)**

Es gibt eine Abbildung

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \rightarrow \Lambda^{k+l} V^* : (\omega_k, \omega_l) \mapsto \omega_k \wedge \omega_l$$

mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\omega_k \wedge \omega_l$  ist linear in jedem Faktor, d. h.  $\omega_k = \alpha \omega_k^1 + \beta \omega_k^2$ , so ist

$$\omega_k \wedge \omega_l = \alpha \omega_k^1 \wedge \omega_l + \beta \omega_k^2 \wedge \omega_l.$$

Entsprechendes gilt in der anderen Komponente.

2. Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$  und  $\eta_1, \dots, \eta_l \in V^*$ , so ist

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \wedge (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l) = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l.$$

*Beweis.* Zum Beweis betrachten wir zwei beliebige Formen  $\omega_1 \in \Lambda^k V^*$ ,  $\omega_2 \in \Lambda^l V^*$  mit

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \\ \omega_2 &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n} b_{j_1 \dots j_l} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n}} a_{i_1 \dots i_k} b_{j_1 \dots j_l} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}.$$

Nun sieht man, dass dies die gewünschte Eigenschaft hat. Die Eindeutigkeit dieses Produktes ist klar für Formen der Form

$$(a_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}) \wedge (b_{j_1 \dots j_l} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}).$$

Der Rest folgt aufgrund der Linearität.  $\square$

### Korollar 15.3.14 (Eigenschaften des Dachproduktes)

Es gelten die folgenden Gesetze

1. Sind  $\omega_i \in \Lambda^{k_i} V^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Dann ist

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

2. Sind  $\omega_i \in \Lambda^{k_i} V^*$ ,  $i = 1, 2$ . Dann ist

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{k_1 k_2} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

*Beweis.* Einfache Anwendung der Rechenregeln.  $\square$

### Definition 15.3.15 (Differentialform)

Es sei  $M$  eine offene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $W \subset M$  offen.

Eine Differentialform der Ordnung  $k$  in  $W$  ist eine Abbildung

$$\omega : W \rightarrow \bigcup_{\mathbf{x} \in W} \Lambda^k T_{\mathbf{x}}^* M$$

mit  $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k T_{\mathbf{x}}^* M$ .

**Bemerkung 15.3.16 (Differentialformen niedrigster Ordnung)**

Eine Differentialform der Ordnung 1 ist eine Pfaffsche Form, eine der Ordnung 0 ist einfach eine Funktion  $W \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir betrachten den Fall, dass  $(U, \psi_U)$  eine Karte und  $W = \psi_U(U)$  das zugehörige Kartengebiet ist. Sind  $y_i$  die Koordinatenfunktionen auf  $U$  und  $x_i$  die zugeordneten lokalen Koordinaten auf  $W$ , so bilden für  $x \in W$  die Differentialformen

$$\{dx_i(\mathbf{x})\}_{i=1, \dots, k}$$

eine Basis für  $T_{\mathbf{x}}^* M$ . Also bilden für  $m \leq k$  die Formen

$$dx_{i_1}(\mathbf{x}) \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq k$$

eine Basis für  $\Lambda^m T_{\mathbf{x}}^* M$ .

**Lemma 15.3.17 (Basisdarstellung einer Differentialform)**

Für  $\mathbf{x} \in W$  hat eine Differentialform der Ordnung  $m$  auf  $W$  die Gestalt

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq k} f_{j_1 j_2 \dots j_m}(\mathbf{x}) dx_{j_1}(\mathbf{x}) \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}(\mathbf{x}).$$

*Beweis.* Folgt sofort aus der Darstellung. □

**Definition 15.3.18 (Stetig differenzierbare Differentialformen)**

Eine Form heißt stetig oder stetig differenzierbar oder ..., falls die Funktionen  $f_{j_1 j_2 \dots j_m}$  stetig oder stetig differenzierbar oder ... sind.

Wir wollen bemerken, dass Formen der Ordnung  $m$  punktweise addiert werden können und ebenso mit reellwertigen Funktionen multipliziert werden können, so dass die Resultate nach wie vor  $m$ -Formen sind.

**Definition 15.3.19 (Äußere Ableitung)**

Wir definieren die Ableitung  $d\omega$  einer stetig differenzierbaren  $k$ -Form mittels der Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} f_{j_1 j_2 \dots j_m} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}$$

durch

$$d\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} df_{j_1 j_2 \dots j_m} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}.$$

$d\omega$  heißt die äußere Ableitung oder auch das äußere Differential (engl.: exterior derivative) der Form  $\omega$ .

**Bemerkung 15.3.20 (Eigenschaften der äußeren Ableitung)**

Die äußere Ableitung hat folgende Eigenschaften

1. Ist  $\omega$  eine  $m$ -Form, so ist  $d\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^{m+1}T_{\mathbf{x}}^*M$ . (Klar aufgrund der Definition)
2.  $d\omega(\mathbf{x})$  hängt nur vom Verhalten von  $\omega$  in einer (beliebig) kleinen Umgebung von  $\mathbf{x}$  ab (*Lokalität*).
3. Ist  $\omega_i$  eine  $m_i$ -Form,  $i = 1, 2$ , so gilt

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2)(\mathbf{x}) = d\omega_1(\mathbf{x}) \wedge \omega_2(\mathbf{x}) + (-1)^{m_1} \omega_1(\mathbf{x}) \wedge d\omega_2(\mathbf{x}).$$

Diese Eigenschaft muss aufgrund der Linearität nur für Vielfache der Basisvektoren geprüft werden. Der Rest ist eine kurze Rechnung.

4. Die Ableitung hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab. Für die Begründung verweisen wir im Moment auf die Literatur, z. B. das Buch [10].

**Beispiel 15.3.21 (Äußere Ableitung einer Pfaffschen Form)**

Die äußere Ableitung einer Pfaffschen Form  $\omega = \sum_j f_j dx_j$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum_j f_j dx_j\right) = \sum_j df_j \wedge dx_j \\ &= \sum_j \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Eine der wesentlichsten Aussagen, die Grundlage weitreichender Theorien ist und die weitere Theorien durch formale Ähnlichkeit angeregt hat, ist der folgende Satz.

**Satz 15.3.22 (Zweifache äußere Ableitung)**

Für eine zweimal stetig differenzierbare  $m$ -Form  $\omega$  auf  $M$  gilt

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

*Beweis.* Wir bemerken, dass dies eine lokale Aussage ist (vgl. Punkt 2 der Bemerkung 15.3.20). Wir beginnen mit einer Nullform, d. h. einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion,  $W = \psi_U(U)$  sei eine Kartenumgebung. Dann gilt für  $\mathbf{x} \in W$

$$\begin{aligned} d(df)(\mathbf{x}) &= d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist Null, da nach dem Satz von Schwarz 8.5.1 die beiden partiellen Ableitungen gleich sind.

Zum allgemeinen Fall machen wir eine einfache Vorbemerkung

$$d(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}) = d1 \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}) = 0,$$

wobei nur die Definition von  $d$  benutzt wurde. Wir betrachten nur einen Summanden  $\omega = f_{j_1 j_2 \dots j_m} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}$ , der allgemeine Fall folgt dann wegen der Linearität. Nun ist

$$d\omega = df_{j_1 j_2 \dots j_m} \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m})$$

und

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(df_{j_1 j_2 \dots j_m} \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m})) \\ &= d^2 f_{j_1 j_2 \dots j_m} \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}) - df_{j_1 j_2 \dots j_m} \wedge d(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}) \\ &= d^2 f_{j_1 j_2 \dots j_m} \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 15.3.23 (geschlossene und exakte Formen)**

1. Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $W \subset M$  offen. Eine stetig differenzierbare Differentialform  $\omega$  der Ordnung  $m$  auf  $W$  heißt geschlossen, falls  $d\omega = 0$ .

2. Eine solche Form heißt *exakt* oder *total*, wenn es eine stetig differenzierbare  $m - 1$ -Form  $\tau$  gibt mit  $d\tau = \omega$ .

**Bemerkung 15.3.24 (Exakte Formen)**

Exakte Formen sind geschlossen. (Satz 15.3.22)

Wir wollen nun noch das Verhalten von Differentialformen unter Diffeomorphismen untersuchen.

**Definition 15.3.25 (Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten)**

1. Es seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$  und  $N$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ ,  $V \subset M$  und  $W \subset N$  seien offene Teilmengen. Eine Abbildung  $\Psi : M \rightarrow N$  heißt im Punkt  $\mathbf{x} \in W$   $\mathbf{x} \in \psi_U(U)$  differenzierbar, wenn  $\psi_V^{-1} \circ \Psi \circ \psi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist, wobei  $(V, \psi_V)$  eine Karte ist, deren Kartengebiet den Punkt  $\Psi(\mathbf{x})$  enthält. Entsprechend definieren wir stetig differenzierbar und höhere Differenzierbarkeitsordnungen.
2. Ist  $\Psi$  in jedem Punkt von  $W$  stetig differenzierbar, so nennen wir  $\Psi$  stetig differenzierbar.
3. Ist  $\Psi : W \rightarrow V$  stetig differenzierbar und bijektiv, so ist  $\Psi^{-1} : V \rightarrow W$  definiert. Ist dies auch differenzierbar, so nennen wir  $\Psi$  einen Diffeomorphismus.

**Bemerkung 15.3.26 (Diffeomorphismen zwischen Untermannigfaltigkeiten)**

Die erste Aussage gilt genau dann für je eine Karte  $(U, \psi_U)$  von  $M$  und  $(V, \psi_V)$  von  $N$ , wenn sie für alle Karten gilt. Die Definition erlaubt uns, Diffeomorphismen in lokalen Koordinaten zu beschreiben.

Eine kurze abstrakte Überlegung bereitet ein neues Konzept vor. Seien  $V, W$  endlich dimensionale Vektorräume,  $A : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so gibt es eine Abbildung (*duale Abbildung*)

$$A^* : W^* \rightarrow V^*$$

definiert durch

$$A^* \ell^* = \ell^* \circ A.$$

Man prüft leicht, dass  $A^* \ell^* : V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch

$$A^* \ell^*(v) = \ell^*(Av) \in \mathbb{R}.$$

Natürlich ist diese Abbildung als Hintereinanderausführung linearer Abbildungen linear. Ganz entsprechend definieren wir eine Abbildung

$$A^* : \Lambda^k W^* \rightarrow \Lambda^k V^* : \omega \mapsto A^* \omega$$

mit

$$A^* \omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(Av_1, \dots, Av_k).$$

Entsprechendes kann man auch für Differentialformen durchführen. Wir betrachten nun eine Differentialform  $\omega$  auf einer offenen Teilmenge  $W$  einer Untermannigfaltigkeit  $N$  des  $\mathbb{R}^n$ , eine Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^m$  mit einer offenen Menge  $V \subset M$ .

**Definition 15.3.27 (Zurückholung von Formen)**

Es seien  $M \subset \mathbb{R}^m$ ,  $N \subset \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeiten,  $V \subset M$  und  $W \subset N$  offen,  $\Phi : V \rightarrow W$  stetig differenzierbar und  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $W$ . Wir setzen  $\Phi^* \omega$  als

$$(\Phi^* \omega)(\mathbf{x}) = D\Phi^*(\omega)(\Phi(\mathbf{x})).$$

$\Phi^* \omega$  wird als Zurückholung (engl. und auch in anderen Sprachen üblich **pull back**) bezeichnet.

**Beispiel 15.3.28 (Beispiel einer zurückgeholten Form)**

In Anbetracht der schwierigen Definition wollen wir ein Beispiel für stetig differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$  anführen. Eine solche Abbildung  $\Phi$  hat dann die Gestalt  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ , eine Form die Gestalt

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Dann ist nach Definition

$$\Phi^* \omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega(\Phi(\mathbf{x}))(D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \dots, D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}_k).$$

Dann ist  $dx_k(D\Phi(\mathbf{v})) = d\Phi_k(\mathbf{v})$  und es ergibt sich einfach

$$\Phi^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (f_{i_1 \dots i_k} \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}.$$

**Satz 15.3.29 (Zurückholung von Differentialformen)**

Unter den beschriebenen allgemeinen Voraussetzungen gilt

1.  $\Phi^*(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \Phi^* \omega_1 + \lambda_2 \Phi^* \omega_2.$

$$2. \Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \Phi^*\omega_1 \wedge \Phi^*\omega_2.$$

3. Für eine stetig differenzierbare Form  $\omega$  und ein zweimal stetig differenzierbares  $\Phi$  gilt

$$d(\Phi^*\omega) = \Phi^*d\omega.$$

4. Hat man eine Hintereinanderausführung zweier stetig differenzierbarer Abbildungen, so gilt

$$\Psi^*(\Phi^*\omega) = (\Phi \circ \Psi)^*\omega.$$

*Beweis.* (1), (2) folgen direkt aus der Definition, (4) ebenso. Es bleibt (3). Wir beginnen mit einer Funktion auf  $W$ , dann ist  $\Phi^*f = f \circ \Phi$  und  $df = \sum_i \partial_i f dx_i$ . Dann ist

$$\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi) = d(\Phi^*(f)),$$

denn

$$\Phi^*(df(\mathbf{x}))(\mathbf{v}) = df(\Phi(\mathbf{x}))(D\Phi(\mathbf{v})) = d(f \circ \Phi)(\mathbf{v}),$$

dabei sieht man die letzte Gleichheit aus der Definition. Ist  $\gamma$  eine Kurve tangential an  $\mathbf{v}$ , so ist  $D\Phi(\mathbf{v})$  tangential an  $\Phi \circ \gamma$  und  $f \circ (\Phi \circ \gamma) = (f \circ \Phi) \circ \gamma$ . Allgemein gilt für  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= d \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} df_{i_1 \dots i_k}(\Phi(x)) \wedge d\Phi_{i_1} \dots \wedge d\Phi_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left( \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_i} \circ \Phi \right) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\Phi^* df_{i_1 \dots i_k} \wedge \Phi^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) \\ &= (\Phi^*d\omega). \end{aligned}$$

Damit sind alle Eigenschaften gezeigt.  $\square$

Wir nutzen das Zurückholen von Formen um  $k$ -Formen auf Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  zu integrieren. Dazu betrachten wir zunächst die Situation, dass  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist,  $W = \psi_U(U)$  das Kartengebiet einer Karte  $(U, \psi_U)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen. Ist  $\omega : W \rightarrow \bigcup_{\mathbf{x} \in W} \Lambda^k T_{\mathbf{x}}^*M$  eine  $k$ -Form und  $\psi_U^*\omega$  die Zurückholung auf  $U$ , so ist mit  $\psi_U(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$  die zurückgeholte Form ein Vielfaches  $\psi_U^*(\mathbf{y})\omega = g(\mathbf{y})dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$  der Volumenform.

**Definition 15.3.30 (Integration von  $k$ -Formen auf  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ )**

Wir setzen

$$\int_{\psi_U(U)} \omega = \int_U \psi_U^* \omega = \int_U g dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k = \int_U g d\lambda_n.$$

Wir bezeichnen dies als Integral der  $k$ -Form. Für Formen, die nicht durch ein einziges Kartengebiet beschrieben werden, betrachten wir eine Teilung der Eins, die der Überdeckung durch Kartengebiete subordiniert ist, und schreiben

$$\int_M \omega = \sum_{j \in \mathbb{N}_{K_j}} \int \chi_j \omega = \sum_{j \in \mathbb{N}_{U_j}} \int \psi_U^* (\chi_j \omega).$$

In den folgenden Sätzen werden wir uns auf Untermannigfaltigkeiten einschränken, die offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind. Der folgende Hilfssatz gibt uns ein technisches Hilfsmittel, das zentral für die Beweise der nächsten Ergebnisse sein wird.

**Hilfssatz 15.3.31 (Differenz zweier durch Rückholung entstandener Formen)**

Es sei  $U$  im  $\mathbb{R}^n$  offen,  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$  mit

$$U \times [0, 1] \subset V.$$

Nun seien  $\psi_0, \psi_1 : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definiert durch

$$\psi_i(x) = (x, i), \quad i = 0, 1.$$

Ist  $\omega_1$  ein stetig differenzierbare, geschlossene  $k$ -Form auf  $V$ , so gibt es eine stetig differenzierbare  $k-1$ -Form  $\omega_2$  auf  $U$  mit

$$d\omega_2 = \psi_1^* \omega_1 - \psi_0^* \omega_1.$$

*Beweis.* Wir bezeichnen die Koordinaten auf  $U$  durch  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  und auf  $V$  ergänzen wir diese durch  $x_{n+1}$ .

Die Form  $\omega_1$  wird in üblicher Form in der Basisdarstellung aufgeschrieben, wobei wir die Terme in denen  $dx_{n+1}$  auftaucht von denen ohne diesen Term sorgfältig

trennen, also

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} g_{i_1 \dots i_{k-1}} dx_{n+1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}.\end{aligned}$$

$\omega_1$  ist geschlossen, also  $d\omega_1 = 0$ , also ist

$$\begin{aligned}d\omega_1 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{n+1} \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Wir betrachten nur die Basiselemente die  $dx_{n+1}$  enthalten, deren Summe ist (nach Anwenden von  $d$ ) natürlich auch 0. Damit schließen wir

$$\begin{aligned}&\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x_i} dx_{n+1} \wedge dx_i \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}).\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}&\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_{n+1}} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x_i} dx_i \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}).\end{aligned}\tag{15.2}$$

Integration der Koeffizienten bezüglich  $x_{n+1}$  ergibt

$$\int_0^1 \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = f_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}, 1) - f_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}, 0)$$

und

$$\int_0^1 \frac{\partial g_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x_i} dx_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 g_{i_1 \dots i_{k-1}} dx_{n+1}.$$

Wir setzen

$$\omega_2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \left( \int_0^1 g_{i_1 \dots i_{k-1}} dx_{n+1} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Man beachte, dass dies eine Form auf  $U$  ist, denn die Integration bezüglich der letzten Variablen macht die Koeffizienten zu Funktionen auf  $U$ . Dort sind auch die auftretenden Dachprodukte definiert. Dann ist

$$\begin{aligned}
 d\omega_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \int_0^1 g_{i_1 \dots i_{k-1}} dx_{n+1} \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} g_{i_1 \dots i_{k-1}} dx_{n+1} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \int_0^1 \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_n} dx_{n+1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (\text{verwende Gl. (15.2)}) \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (f(\mathbf{x}, 1) - f(\mathbf{x}, 0)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &= \psi_1^* \omega_1 - \psi_0^* \omega_1. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Definition 15.3.32 (sternförmig)**

Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt sternförmig bezüglich  $\mathbf{x}_0 \in G$ , wenn zu jedem  $\mathbf{x} \in G$  die Menge

$$\left\{ \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mid t \in [0, 1] \right\} \subset G$$

ist.

**Satz 15.3.33 (Poincaré<sup>4</sup>)**

Eine stetig differenzierbare, geschlossene  $k$ -Form  $\omega$  auf einem sternförmigen Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  ist exakt.

*Beweis.* OBdA ist  $U$  sternförmig bezüglich 0. Wir setzen

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (t, \mathbf{x}) \mapsto t\mathbf{x}.$$

Setze  $V = \Phi^{-1}(U)$ . Dann ist  $U \times [0, 1] \subset V$ . Wir definieren  $\psi_0, \psi_1$  wie zuvor. Setze

$$\omega_1 = \Phi^*(\omega)$$

<sup>4</sup>Jules Henri Poincaré (29.4.1854-17.7.1912) war der bedeutendste französische Mathematiker zur Jahrhundertwende. Er arbeitete über partielle und gewöhnliche Differentialgleichungen und führte in bahnbrechenden Arbeiten (Analysis situs) topologische Methoden zum Studium solcher Gleichungen ein. Alle Aspekte moderner Dynamik wurden von seiner Arbeit beeinflusst und geprägt. Er wurde dabei zum Gründer der algebraischen Topologie, einem Gebiet das im 20. Jahrhundert eine eminente Bedeutung erlangte.

auf  $V$ . Der Hilfssatz gewährleistet uns die Existenz von  $\omega_2$  mit

$$d\omega_2 = \psi_1^* \omega_1 - \psi_0^* \omega_1.$$

Nun ist

$$\Phi \circ \psi_1 = \mathbb{1}_U, \quad \Phi \circ \psi_0 = 0.$$

Wir erhalten

$$\psi_1^* \omega_1 = \psi_1^*(\Phi^* \omega) = (\Phi \circ \psi_1)^*(\omega) = \mathbb{1}^* \omega = \omega$$

und

$$\psi_0^* \omega_0 = (\Phi \circ \psi_0)^* \omega = 0.$$

Damit ergibt sich

$$d\omega_2 = \omega_1. \quad \square$$

Wir wollen nun Elemente der klassischen Vektoranalysis betrachten. Dazu sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $f, g \in C^2(U; \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in C^2(U; \mathbb{R}^3)$  seien zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass  $\dim \Lambda^0(\mathbb{R}^3) = \dim \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^* = 1$  und  $\dim \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^* = \dim \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* = 3$ . In lokalen Koordinaten sind daher die Nullformen gerade Funktion, d. h.  $f$  ist eine typische Nullform, die 1-Formen können lokal in der Gestalt

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^3 v_i dx_i = \langle \mathbf{v}, (dx_1, dx_2, dx_3) \rangle$$

geschrieben werden. Mit der Kurzform

$$ds = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

wird dies zu

$$\omega_1 = \langle \mathbf{v}, ds \rangle.$$

Punktweise bilden die drei Elemente  $dx_1 \wedge dx_2$ ,  $dx_1 \wedge dx_3$ ,  $dx_2 \wedge dx_3$  eine Basis für  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ . Die allgemeine 2-Form hat die Gestalt

$$\omega_2 = w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_1 \wedge dx_3 + w_3 dx_2 \wedge dx_3.$$

Mit  $dS = (dx_2 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_3, dx_2 \wedge dx_3)$  wird dies zu

$$\omega_2 = \langle \mathbf{w}, dS \rangle.$$

Die allgemeine Dreiform hat die Gestalt  $gdV$  mit  $dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ . Klassische Differentialoperatoren sind der Laplaceoperator  $\Delta$ , der auf Funktionen wirkt und die Form  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  hat, der Gradient, der Funktionen den Vektor der partiellen Ableitungen zuordnet, die Divergenz, die wie bereits gesehen auf Vektorfeldern  $v$  operiert und die Form

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

hat. Als letztes betrachten wir die Rotation eines Vektorfeldes  $\mathbf{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , das die Form

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

hat. Diese klassischen Formen kann man folgendermaßen mit der Sprache der differentialformen verbinden: Wir bestimmen nun die Wirkung von  $d$  für die allgemeinen Formen der Ordnung,  $k = 0, 1, 2$ . Zunächst ist für  $k = 0$

$$df = \langle \operatorname{grad} f, ds \rangle.$$

Für die allgemeine 1-Form  $\omega_1$  bekommen wir  $d\omega_1$  als

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d\left(\sum_{i=1}^3 v_i dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \dots \\ &= \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, dS \rangle. \end{aligned}$$

Für die allgemeine 2-Form  $\omega_2$  ergibt sich als äußere Ableitung

$$\begin{aligned} d\omega_2 &= d\langle \mathbf{w}, dS \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w_1}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w_2}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \dots \\ &= \frac{\partial w_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \dots \\ &= \operatorname{div} \mathbf{w} dV. \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Formel  $d(d\omega) = 0$ ,

$$d(df) = d\langle \operatorname{grad} f, ds \rangle = \langle \operatorname{rot} \operatorname{grad} f, dS \rangle.$$

Dies impliziert die Formel

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0.$$

Ganz entsprechend ergibt sich

$$0 = d(d\omega_1) = d\langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, dS \rangle = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} dV.$$

Aus dem Poincaréschen Satz folgt dann sofort die folgende Integrabilitätsbedingung.

**Korollar 15.3.34 (Integrabilitätsbedingung)**

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  ein sternförmiges Gebiet und  $\mathbf{v}, \mathbf{w} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbare Vektorfelder.

1. Ist  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ , so existiert ein  $f \in C^1(U; \mathbb{R})$  mit  $\operatorname{grad} f = \mathbf{v}$ .
2. Ist  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ , so gibt es ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{u} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{w}$ .

*Beweis.* Folgt sofort aus der eben diskutierten Darstellung der 1- bzw. 2-Formen mittels der klassischen Differentialoperatoren und dem Poincaréschen Lemma.  $\square$

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch das folgende Lemma zeigen.

**Lemma 15.3.35 (Kartenunabhängigkeit der Integration von Formen)**

Die Definition des Integrales einer  $k$ -Form über eine orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist unabhängig von der Karte.

*Beweis.* Angenommen wir hätten zwei Karten  $(U_i, \psi_{U_i})$ ,  $i = 1, 2$ , für die gilt  $K \subset U_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dann ist

$$\int_{\psi_{U_1}^{-1}(K)} \psi_{U_1}^* \omega = \int_{\psi_{U_1}^{-1}(K)} (\psi_{U_2} \circ \psi_{U_1 U_2})^* \omega = \int_{\psi_{U_1 U_2}^{-1} \psi_{U_1}^{-1}(K)} \psi_{U_1 U_2}^* \psi_{U_2}^* \omega = \int_{\psi_{U_2}^{-1}(K)} \psi_{U_2}^* \omega. \quad \square$$

Hier bietet sich ein kleiner Ausflug in die Welt der sogenannten *Kohomologietheorie* an. Wir betrachten  $C^\infty$ -Differentialformen. Sei  $\Omega^k(U)$  die Menge aller beliebig oft differenzierbaren  $k$ -Formen auf  $U$ .  $\Omega^k(U)$  bildet auf natürliche Weise einen Vektorraum und

$$d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$$

ist eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit

$$B_k(U) = \left\{ \omega \in \Omega^k(U) \mid \omega \in \operatorname{BILD}(d) \right\},$$

$$Z_k(U) = \ker(d).$$

Wir betrachten die folgende *Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^{n-1}(U) \rightarrow \Omega^n(U) \rightarrow 0,$$

wobei der Pfeil jeweils für die Abbildung  $d$  steht. Die Bedingung  $d^2 = 0$  besagt  $B_k(U) \subset Z_k(U)$ .

**Definition 15.3.36 (de Rhamsche Kohomologie)**

Die de Rhamsche Kohomologiegruppe ist gegeben durch

$$H_{dR}^k(U) = Z_k(U)/B_k(U).$$

Dabei ist der Quotient der Quotientenvektorraum im Sinne der Linearen Algebra.

Das Lemma von Poincaré besagt nun gerade, dass für sternförmige Mengen in  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$H^k(U) = \{0\}.$$

Wir kommen zurück zur Untersuchung der Existenz des Kurvenintegrals Pfaffscher Formen. Der Beginn dieser Theorie, die weitreichende Konsequenzen hat, insbesondere auch für die Physik, jedoch auch in der Mathematik, ist ein Begriff, der uns anschaulich sagt, wann zwei Kurven in einem Raum ineinander deformierbar sind. (Deformationen von Bildern sind heute in der Bildbearbeitung wohl bekannt, die genaue Formulierung der Deformation von Bildern ähnelt unserer Definition.) Im Folgenden seien Kurven immer so reparametrisiert, dass sie auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert sind, dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit.

**Definition 15.3.37 (Homotope Kurven)**

Es sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset M$  offen und  $\gamma_{1,2} : [0, 1] \rightarrow M$  seien zwei Kurven auf  $M$  mit  $\gamma_i([0, 1]) \subset U$ ,  $i = 1, 2$ . Gibt es eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$$

mit

$$H(t, i) = \gamma_{i+1}(t), t \in [0, 1], i = 0, 1,$$

so nennen wir  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  homotop in  $U$ . Die Abbildung  $H$  wird als Homotopie bezeichnet.

**Bemerkung 15.3.38 (Homotopie - Veranschaulichung)**

Wählt man eine Zahl  $0 \leq \xi \leq 1$ , so kann man eine Kurve

$$\tilde{\gamma}_\xi(t) = H(t, \xi)$$

definieren. Es gilt dann  $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_1$  und  $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_2$ .

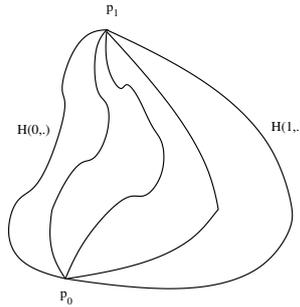


Abbildung 15.3: Homotopie zweier Kurven

**Satz 15.3.39 (Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen)**

Es sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ ,  $W \subset M$  offen,  $\gamma_{0,1} : [0, 1] \rightarrow W$  zwei stetig differenzierbare (stückweise stetig differenzierbare) Kurven mit

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \text{ und } \mathbf{x}_1 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Sind  $\gamma_0, \gamma_1$  homotop und ist  $\omega$  eine Pfaffsche Form auf  $M$  mit  $d\omega = 0$ , so gilt

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

*Beweis.* Wir überdecken die kompakte Menge  $K = H([0, 1] \times [0, 1])$  mit Kartengebieten der Form  $\psi_U(U)$ , endlich viele davon überdecken  $K$ . Wir holen die Form jeweils von einem Kartengebiet zurück auf  $U \subset \mathbb{R}^k$ .  $\square$

## 15.4 Der Satz von Stokes

Wir wollen nochmals über Orientierung sprechen. Wir nennen zwei Karten gleich orientiert, wenn die Determinante der Linearisierung des Kartenwechseldiffeomorphismus positiv ist. Ein Atlas gleich orientierter Karten heißt orientierter Atlas. Gibt es einen orientierten Atlas, so ist  $M$  orientierbar. Wir gehen von einer orientierbaren Mannigfaltigkeit aus, deren Orientierung wir fixieren (beachte zu jeder orientierbaren Mannigfaltigkeit gibt es zwei Orientierungen).

Die Orientierung auf der Mannigfaltigkeit ist via Karten definiert. Ist  $\mathbf{x}_0 \in M$ , so ist der Tangentialraum  $T_{\mathbf{x}_0}M$  isomorph zu  $\mathbb{R}^k$ , ein Isomorphismus ist durch  $D\psi_U(\psi_U^{-1}(\mathbf{x}_0))$  für eine geeignete Karte  $(U, \psi_U)$  gegeben. Wir nennen die Orientierung auf  $T_{\mathbf{x}_0}M$  positiv, wenn  $\det D\psi_U(\psi_U^{-1}(\mathbf{x}_0)) > 0$ . (Aussage über die Basiswahl.) Ist  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und

sind  $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_{\mathbf{x}_0}M$  eine positiv orientierte Basis. Ein Einheitsnormalenfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{T}^n$  heißt positiv orientiert, wenn für alle  $\mathbf{x}_0$  und alle positiv orientierten Basis der Tangentialräume gilt

$$\det(\nu(\mathbf{x}_0), v_1, \dots, v_{n-1}) > 0.$$

Für eine Hypermannigfaltigkeit (d. h. Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n-1$ ) kann man zeigen:

1. Ist  $M$  orientiert, so gibt es ein positiv orientiertes Einheitsnormalenfeld.
2. Besitzt  $M$  ein Einheitsnormalenfeld, so gibt es eine Orientierung auf  $M$ , so dass das Feld positiv orientiert ist.

**Satz 15.4.1 (Stokes<sup>5</sup>, einfache Version)**

*Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $n-1$  Form auf  $U$ . Dann gilt für jedes Kompaktum  $K \subset U$  mit glattem Rand die folgende Formel*

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega.$$

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Raum  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$ , dessen Dimension nach der Dimensionsformel gerade  $n$  ist. Eine Basis erhalten wir, indem wir  $n-1$ -fache Dachprodukte der  $dx_i$  betrachten, dies tun wir gerade dadurch, dass wir jeweils eine der Formen  $dx_i$  weglassen, also bis auf eine Umskalierung erhalten wir

$$(dx)^{(i)} = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Die allgemeine Differentialform erhalten wir dann durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i (dx)^{(i)}.$$

Dann ergibt sich

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge (dx)^{(i)}.$$

Durch  $i-1$  Vertauschungen erhält man die einfache Formel

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

<sup>5</sup>George Gabriel Stokes (13.8.1819–1.2.1903) war ein irischer Mathematiker und Physiker, der in Cambridge wirkte. Seine Beiträge zur mathematischen Physik sind bedeutend. Eine der wichtigsten Gleichungen der Strömungsmechanik ist nach ihm benannt, die Navier-Stokessche Gleichung.

Die Funktionen  $f_i$  können wir nun durch

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

als Vektorfeld auffassen. Schreiben wir gleichzeitig den Vektor (von Formen)

$$d\mathbf{S} = (dS_1, \dots, dS_n)$$

mit

$$dS_i = (-1)^{i-1} (dx)^{(i)},$$

so erhalten wir formal die Form  $\omega$  als Skalarprodukt

$$\omega = \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle.$$

Dann ergibt sich für  $d\omega$  die Darstellung

$$d\omega = \operatorname{div}(\mathbf{f}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Wir betrachten nun das äußere Einheitsnormalenfeld  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nun hat (wie wir zeigen werden) das Integral über den Rand die Form

$$\int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \nu(\mathbf{x}) \rangle dS.$$

Mit der obigen Darstellung von  $d\omega = \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  erhalten wir

$$\int_K d\omega = \int_K \operatorname{div}(f) d\lambda_n.$$

Die Behauptung folgt somit aus dem Gaußschen Integralsatz.  $\square$

#### Beispiel 15.4.2 (Volumenberechnung mit dem Satz von Stokes)

Sei  $\omega$  auf  $\mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i (dx)^{(i)}.$$

Dann ist

$$d\omega = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Für ein Kompaktum  $K$  mit glattem Rand gilt daher

$$\lambda_n(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} d\omega.$$

Im Spezialfall  $n = 2$  folgt

$$\lambda_2(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} xdy - ydx.$$

Für  $K = \overline{B_1(0)}$  erhält man

$$\lambda_2(\overline{B_1(0)}) = \frac{1}{2} \int_{S^1} xdy - ydx.$$

Mit

$$\psi(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

ergibt sich

$$\lambda_2(\overline{B_1(0)}) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi^* \omega = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) d\varphi = \pi.$$

Wir wollen nochmals allgemeinere Bereiche ansehen. Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 15.4.3 (regulärer Bereich)**

Es sei  $B \subset M$  mit  $B = M \cap C$ , wobei  $C \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen ist. Es sei  $H \subset \mathbb{R}^k$  gegeben durch

$$H = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 < 0 \right\}.$$

Wir nennen  $B$  regulären Bereich, wenn zu jedem  $b \in B$  eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^k$  existiert und ein Diffeomorphismus  $\Phi_U : U \rightarrow M$  aus einem orientierten Atlas von  $M$  existiert mit  $b \in \Phi(U)$  und

$$\Phi(U) \cap B = \Phi(U \cap H).$$

Wir bezeichnen als  $\partial B$  die Menge der Punkte für die ein  $(U, \Phi)$  existiert mit  $b \in \Phi(U \cap \partial H)$ .

Ohne Beweis fassen wir wesentliche Eigenschaften zusammen.

**Satz 15.4.4 (Eigenschaften regulärer Bereiche)**

Es sei  $B \subset M$  mit  $\partial B \neq \emptyset$ . Dann gilt:

1. Ist  $M$  orientiert von der Klasse  $C^s$ , so ist  $\partial B$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $k - 1$  und der Klasse  $C^s$ .

2. Die Einschränkungen der Abbildungen  $\Phi$  auf  $\partial H$  parametrisieren  $\partial B$ .
3. Diese bilden einen orientierten Atlas.
4. Für  $b \in \partial B$  ist  $T_b \partial B$  eine Hyperebene in  $T_b M$ .

*Beweis.* Siehe Walter [19] □

**Satz 15.4.5 (Stokes)**

*Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  der Klasse  $C^2$  und  $\omega$  sei eine  $k-1$  Form auf  $M$ . Dann gilt für jeden kompakten regulären Bereich  $B \subset M$  mit  $\partial B \neq \emptyset$*

$$\int_B d\omega = \int_{\partial B} \omega.$$

*Ist  $M$  kompakt, so folgt*

$$\int_M d\omega = 0.$$

*Beweis.* Vgl. Walter [19] □

**Satz 15.4.6 (Stokes, klassische Version)**

*Es sei  $M$  eine 2-dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^2$  der Klasse  $C^2$ ,  $B$  sei ein kompakter regulärer Bereich auf  $M$ . Es sei  $M \subset V \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $\mathbf{w} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei eine  $C^1$ -Abbildung. Dann ist  $\omega = \sum_{i=1}^3 w_i dx_i$  eine Pfaffsche Form auf  $M$  und es gilt*

$$\int_B \langle \text{rot } \mathbf{w}, \nu \rangle dS = \int_{\partial B} \omega.$$

*Dabei ist  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  das geeignet orientierte Einheitsnormalenfeld.*



# Index

- $L^p(\Omega, \mu)$ , 52
- $T(\mu)$ , 63
- $[f]_p$ , 52
- $\mathbf{E}(n)$ , 62
- $\mathbf{GL}(n)$ , 63
- $\mathbf{O}(n)$ , 62
- $\mathbf{SE}(n)$ , 62
- $\mathbf{SO}(n)$ , 62
- $\det(T)$ , 63
- $\int_a^b g(x) dx$ , 43
- $\lambda(I)$ , 19
- $\mathcal{L}(X, \mu)$ , 31
- $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ , 51
- $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ -messbar, 23
- $\mu^*$ -messbar, 14
- $\sigma$ -Ring, 7
- $\sigma$ -Additivität, 9
- $\sigma$ -Algebra, 7
  - erzeugte, 8
- $\sigma(\mathcal{E})$ , 8
  
- Abbildung
  - duale, 139
  - euklidisch, 62
  - messbar, 23
  - orthogonale, 61
  - speziell euklidisch, 62
- Ableitung
  - äußere, 137
- Abzählbarkeitsaxiom
  - zweites, 96
- Algebra, 6
  - Lebesgue, 21
- Atlas, 95
  
- Banachraum, 55, 83
- Basis, 82
- Bewegungen, 62
- Bildmaß, 63
- Borel-Algebra, 8
  
- Datumsgrenze, 72
- Determinante
  - Gramsche, 93
- Diffeomorphismus, 139
- Differential
  - äußeres, 137
  - totales, 121
- Differentialform, 136
  - exakte, 139
  - geschlossene, 138
  - totale, 139
- Dimension
  - Untermannigfaltigkeit, 84
- Divergenz, 116
- Drehungen, 62
  
- Endlichkeit
  - lokale, 96
- erzeugend, 82
  
- fast überall, 37
- Figuren, 19
- Form
  - alternierend, 129
  - Pfaff, 119
  - stetig, 136
  - stetig differenzierbar, 136
- Fortsetzung
  - triviale, 101
- Funktion

- charakteristische, 28
- Gebiet, 126
  - sternförmig, 144
- Gruppenhomomorphismus, 65
- Hilbertraum, 58
- homotop, 148
- Homotopie, 148
- Immersion, 88
- Inhalt, 9
  - Additivität, 9
- Innere, 68
- Integral, 31
- Integral der  $k$ -Form, 142
- integrierbar, 29, 31, 99, 101
  - lokal, 95
  - nichtnegative Funktion, 30
- Intervall
  - halboffen, 18
- Isotonie, 11
- Kartengebiet, 90
- Kartenwechseldiffeomorphismus, 92
- Kern
  - offen, 68
- Kohomologiegruppe
  - de Rham, 148
- Kohomologietheorie, 147
- kompakt
  - lokal, 96
- Koordinatenfunktion
  - lokale, 121
- Koordinatenfunktionen, 121
- Kotangentialraum, 118
- Kotangentialvektor, 118
- Kurve, 102
- Lebesgue-Integral, 30
- linear unabhängig, 81
- Lokalität, 137
- Maß, 11
  - äußeres, 12
- Borel-Lebesguesches, 21
  - äußeres, 21
  - endliches, 11
  - Haar, 23
  - induziertes, 62
  - Lebesguesches, 21
  - vollständig, 21
- Maßraum, 11
  - endlich, 11
  - Lebesguescher, 21
  - vollständig, 21
- Menge
  - elementare, 18
  - messbar, 23
- messbar, 101
  - komplexe Funktion, 47
- Messraum, 23
- Normalenraum, 105
- Normalenvektor, 104
  - äußerer, 107
- Nullmenge, 18, 37
- Nullmengen, 21
- Orientierung, 84
- Parität, 130
- Permutationsgruppe, 130
- Pfaffsche Form, 119
- Polarkoordinaten, 71
- Prämaß, 9–12
- pull back, 140
- Rand, 105
  - glatt, 106
- Raum
  - orientierter, 84
  - positiv orientiert, 84
- Ring, 6
- Sequenz, 147
- Stammfunktion, 127
- stetig
  - Form, 122

- stetig differenzierbar, 119
- Subadditivität, 11
- Subordination, 96
- Subtraktivität, 11
  
- Tangentialraum, 102
- Tangentialvektor, 102
- Teilung der Eins, 96
  - subordiniert, 96
- Träger, 69
  - kompakt, 69
- Transformationsformel, 65
- Transformationsatz, 65
- Transposition, 130
- Treppenfunktion, 27
  - Integral, 29
  
- Untermannigfaltigkeit, 84
  
- Volumen, 101
- Vorzeichen, 130
  
- Wahrscheinlichkeitsraum, 11
  
- Youngsche Ungleichung, 53
  
- Zurückholung, 140



# Literaturverzeichnis

- [1] M. BARNER & F. FLOHR. *Analysis III*. de Gruyter, 1974.
- [2] H. BAUER. *Maß und Integrationstheorie*. de Gruyter, 1990.
- [3] C. BLATTER. *Analysis III*. Springer Verlag, 1974.
- [4] J. DIEUDONNÉ. *Grundzüge der modernen Analysis*. VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [5] K. ENDL & W. LUH. *Analysis III*. AULA-Verlag, Wiebaden, 1989.
- [6] O. FORSTER. *Analysis 3*. Vieweg, Braunschweig, 3. Auflage, 1984.
- [7] A. FRIEDMAN. *Foundations of Modern Analysis*. Holt Rinehart and Winston, New York Chicago, 1972.
- [8] H. HEUSER. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. B. G. Teubner, Stuttgart, 15. Auflage, 2003.
- [9] E. HEWITT & K. STROMBERG. *Real and abstract analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1969.
- [10] K. JÄNICH. *Vektoranalysis*. Springer Verlag, Heidelberg, 1992.
- [11] K. KÖNIGSBERGER. *Analysis II*, Springer Lehrbuch. Springer Lehrbuch. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [12] K. KÖNIGSBERGER. *Analysis I*, Springer Lehrbuch 8. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 4. Auflage, 2004.
- [13] J. PÖSCHEL. *Etwas Analysis*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014.
- [14] J. PÖSCHEL. *Etwas mehr Analysis*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014.
- [15] J. PÖSCHEL. *Noch mehr Analysis*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015.
- [16] W. RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*, International Student Edition. International Student Edition. Mc Graw Hill, Inc, New York, 1976.

- [17] R. WALTER. *Einführung in die Analysis 1*, de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter, 2007.
- [18] R. WALTER. *Einführung in die Analysis 2*, de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter, 2007.
- [19] R. WALTER. *Einführung in die Analysis 3*, de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter, 2009.