Kapitel 3

Lösungen

3.1 Aufgaben aus Kapitel I

Aufgabe 1.2.8:
Ein solches Programm wurde im Kapitel I angegben. Aufgabe 1.2.9:
Vergleichen wir den eulidischen Algorithmus für zwei Paare (a_1, b), (a_2, b) und sind $a_1 \cong a_2 \bmod b$ dann benötigt der Algorithmus die gleiche Anzahl von Schritten. Daran sieht man, daß man jede beliebige Schrittzahl die für beliebiges $a \in \mathbb{Z}$ und gegebenenes $b \in \mathbb{Z}$ schon für Zahlen $a \in [b, 2b]$ realisieren kann. Sucht man also kleine Beispiele mit vielen Schritten reicht es sich auf solche Paare zu beschränken.

Wir beginnen mit solchen Paaren, bei denen der $\mathbf{ggT}(a, b) = 1$ ist. Dann ist der letzte Schritt ein Paar $(c, 1)$. Mit der Vorbemerkung ist das kleinste „teuerste Paar" $(2, 1)$. Das nächste wäre dann $(3, 2)$ wie man leicht sieht. Angenommen (a, b) ist ein solches Paar. Dann ist natürlich im Schritt zuvor ein Paar zu suchen (c, a) mit $c \leq 2a$ und $c \cong b \bmod a$, also $c = a + b$. Damit erhält man die sogenannte Fibonacci-Folge.
Aufgabe 1.2.11: Durch einfaches Nachprüfen vermutet man, daß diese Gleichung immer gelten sollte. Wir wollen diese nun beweisen.

Wir schreiben a, b als Promzahlprodukte

$$
\begin{aligned}
a &= \prod_i = 1^k p_i^{\alpha(p)} \\
b &= \prod_j = 1^m q_j^{\beta(q)}.
\end{aligned}
$$

Durch umschreiben mit Produkten der Form p_i^0, q_j^0 kann man annehmen, daß die gleichen Zahlen in der Zerlegung auftreten. (Oder man schreibt ein formal unendliches Produkt, wobei man fordert, daß jeweils nur endlich viele Exponenten ungleich null sind.) Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{ggT}(a,b) &= \prod_i = 1^k p_i^{\min\{\alpha(p),\beta(p)\}} \\ \mathbf{kgV}(a,b) &= \prod_i = 1^k p_i^{\max\{\alpha(p),\beta(p)\}} \\ a \cdot b &= \prod_i = 1^k p_i^{\alpha(p)+\beta(p)}. \end{aligned}$$

Da für je zwei Zahlen α, β gilt

$$\alpha + \beta = \min\{\alpha,\beta\} + \max\{\alpha,\beta\}.$$

folgt die Behauptung. Aufgabe 1.3.7:

Lösung Preisaufgabe: Ich wünsche mir engagierte Studenten.

3.2 Aufgaben aus Kapitel II

Aufgabe 2.1.6 Man schreibe die Permutation

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

in der Zyklenschreibweise.
Lösung:

$$(1274)(3)(56).$$