Äquivariante Dynamische Systeme

Vorlesung

Freie Universität Berlin

Reiner Lauterbach

WS 1994/95

Kapitel 1

Darstellungen und Äquivarianz

1.1 Einführung

In dieser Vorlesung wollen wir spezielle dynamische Systeme untersuchen. Die Besonderheit kommt daher, daß eine Gruppe auf dem Zustandsraum operiert und das Vektorfeld mit dieser Aktion verträglich ist. Motivieren kann man das Studium solcher Systeme auf zweierlei Weise: zunächst rein inner mathematisch, aber auch mit interessanten Anwendungen. Was zeichnet solche Systeme innerhalb der Theorie dynamischer Systeme aus? Versucht man das Verhalten typischer Systeme zu klassifizieren, so stellt man schnell fest, daß gewisse Phänomene in generischen Systemem nicht auftreten können, d.h. treten sie für ein System auf, so genügt eine kleine Störung, so daß im gestörten System diese Phänomene nicht mehr auftreten. Ein solches Phänomen ist ein *heterokliner Zyklus* eine Folge von Gleichgewichtslagen $e_1, \ldots, e_s$ und Trajektorien $x_i(t)$, so daß $e_i = \alpha(x_i), e_{i+1} = \omega(x_i)$ ist. Hier steht α für die α–Limesmenge und entsprechend ω für die ω–Limesmenge. Mit den Indizes rechnen wir modulo s. Diese Veränderung im typischen Verhalten rechtfertigt die Frage nach der Klassifikation unserer neuen, *äquivariant* dynamischen Systeme. Eine genaue Definition und auch eine genauere Untersuchung der hier angedeuteten Fragestellung wird noch kommen.

Woher kommen solche Systeme in Anwendungen? Gruppen, soviel wissen wir bereits spielen bei unseren dynamischen Systemen eine Rolle. In Anwendungen treten Symmetrien oft als geometrische Symmetrien von Versuchsanordnungen oder als mathematische Idealisierung eines realen Phänomens auf. Letzteres sieht man z.B. bei der Betrachtung unserer Erde: in erster Näherung besitzt sie die Symmetrie einer Kugel, bei genauerem Hinsehen bemerkt man, daß diese Kugel um die eigene Achse rotiert und diese Anordnung besitzt nur noch die Symmetrie einer Kreisscheibe, betrachten wir die Anordnung noch genauer, so sehen wir die Abflachung der Pole, was noch mit der Symmetrie der Kreisscheibe verträglich ist. Bei ganz genauem Studium (oder aus der Sicht eines Lebewesens auf der Erde) ist diese vollkommen unsymmetrisch, Berge und Täler formen ein unübersichtliches Muster.

1.2 Gruppen und Differentialgleichungen

Weshalb spielen Gruppen bei der Betrachtung von Differntialgleichungen eine Rolle. Als Motivation betrachten wir eine partielle Differentialgleichung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Jedem Gebiet kann man auf natürliche Weise eine Gruppe zuordnen: sei $G_\Omega = \{A \in \mathbf{O}(n) \mid A\Omega = \Omega\}$, dabei ist $A\Omega = \{Ax \mid x \in \Omega\}$. Auf Ω betrachten wir ein Anfangsrandwertproblem der Form

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u + g(u) & \text{auf } \Omega \\ B(u) & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u(0,x) & = & u_0(x), & \end{array}$$

wobei g Wachstumsbeschränkungen und Glattheitsbedingungen genüge und B ein geeigneter Randoperator sei, so daß diese Gleichung eine glatte Lösung besitze. Wir definieren $Au(t,x) = u(t, A^{-1}x)$. Dann definiert die obige Gleichung ein dynamisches System, z.B. auf dem Hilbertraum $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Schreiben wir $\mathcal{P}(u) = \Delta u + g(u)$ so hat dieser Operator die Eigenschaft der G_Ω–*Äquivarianz*, d.h.

$$\mathcal{P}(Au) = A\mathcal{P}(u) \quad \forall A \in G_\Omega. \tag{1.2.1}$$

Aufgabe 1.2.1 *Man zeige, daß der Laplace–Operator*[1] *auf* $\mathbb{R}^n$ *bezüglich* $\mathbf{O}(n)$ *äquivariant ist.*

Bemerkung 1.2.2 *Beim Taylor*[2]*–Couette*[3] *Problem betrachtet man eine zwischen zwei konzentrischen, unendlich langen, rotierenden Zylindern eingeschlossene Flüssigkeit. Als* G_Ω *hat* $\mathbb{R} \times \mathbf{O}(2)$. *Schränkt man sich auf in z-Richtung periodische Strömungsfelder, mit fester Periode, ein, so erhält man als Symmetriegruppe* $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{O}(2)$. *Die Navier*[4]*-Stokes'schen*[5] *Gleichungen sind bezüglich dieser Gruppe äquivariant.*

Definition 1.2.3 *Eine topologische Gruppe ist ein topologischer Raum* $(G, \mathcal{T})$ *der zugleich eine Gruppenstruktur trägt, so daß die Abbildung* $G \times G \to G : (g,h) \mapsto gh^{-1}$ *stetig ist.*

[1] nach Pierre Simon Laplace 28.3.1749–5.3.1827, während der französischen Revolution engagiert, danach wechselte er mehrfach die politische Richtung. Seine mathematischen Untersuchungen betreffen partielle Differentialgleichungen, Kugelflächenfunktionen, Himmelsmechanik, Strömungsmechanik und Wahrscheinlichkeitstheorie.

[2] Geoffrey Ingram Taylor, 1886-?? publizierte 1923 eine Arbeit zur Strömung einer Flüssigkeit, die zwischen zwei rotierenden, konzentrischen Zylindern eingeschlossen ist. Er arbeitete über Strömungsmechanik, Meteorologie und die Mechanik fester Körper.

[3] Maurice Couette, 1858–1943, französischer Physiker, versuchte die Zähigkeit von Flüssigkeiten durch die Messung des Drehmomentes zu bestimmen, das durch einen rotierenden Zylinder über eine Flüssgikeitsschicht auf einen zweiten, konzentrischen Zylinder ausgeübt wird.

[4] Claude Lois Marie Henri Navier, 15.2.1875–21.8.1836, Professor für Mechanik, arbeitete in der Elastizitätstheorie, begründete die Elastizität molekulartheoretisch und stellte als erster Gleichungen für die Strömung von Flüssigkeiten auf.

[5] Georg Gabriel Stokes, 13.8.1819–2.2.1903, Physiker und Mathematiker, erweiterte die Gleichungen der Strömungsmechanik auf den Fall zäher, inkompressibler Flüssigkeiten. In der Mathematik erarbeitete er den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz und fand den nach ihm benannten Integralsatz.

Aufgabe 1.2.4 *Man zeige:*

(i) Ist H eine Untergruppe einer topologischen Gruppe, so ist $\overline{H}$ wieder eine Untergruppe.

(ii) Offene Untergruppen topologischer Gruppen sind abgeschlossen.

(iii) Die Zusammenhangskomponente der $\mathbb{1}$ einer topologischen Gruppe ist ein offener Normalteiler.

In dieser Vorlesung spielen vor allem endliche und kompakte Lie[6] Gruppen eine Rolle. Letzteres sind per definitionem kompakte Untergruppen der $\mathbf{GL}(n)$. Als Beispiele für endliche Gruppen werden wir oft $\mathbb{Z}_n$, D_n, $\mathbb{O}$, $\mathbb{T}$ heranziehen. Die Gruppe $\mathbb{Z}_n$ ist zyklisch der Ordnung n, geometrisch realisiert wird sie durch n–Drehungen im $\mathbb{R}^2$ um die Winkel $\frac{2k\pi}{n}$, bei der Gruppe D_n hat man außer $\mathbb{Z}_n$ noch n Spiegelungen dabei. $\mathbb{T}$ ist die Gruppe aller orientierungserhaltenden Bewegungen im $\mathbb{R}^3$, welche ein regelmäßiges Tetraeder in sich abbildet. Entsprechendes gilt für $\mathbb{O}$ und ein regelmäßiges Oktaeder. $\mathbb{T}$ hat zwölf Elemente, $\mathbb{O}$ hat vierundzwanzig Elemente.

Aufgabe 1.2.5 *(i) Jede endliche Gruppe ist eine kompakte Lie Gruppe.*

(ii) Ist G eine kompakte Lie Gruppe, so gilt für jedes Element $A \in G$ $|\det A| = 1$. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 1.2.6 *(i) Man zeige, daß $\mathbb{O}$ auch die Gruppe aller orientierungserhaltenden Bewegungen des regelmäßigen Quaders ist.*

(ii) Man zeige die Existenz und bis auf Konjugation die Eindeutigkeit einer zu $\mathbb{O}$ isomorphen Untergruppe $\mathbb{O}^-$ von $\mathbf{O}(3)$ mit 24 Elementen, wobei $\mathbb{O}^- \cap \mathbf{SO}(3) = \mathbb{T}$ ist.

(iii) Man bestimme die Symmetriegruppe $\mathbb{I}$ des regelmäßigen Ikosaeders und zeige, daß diese auch die Symmetriegruppe des regelmäßigen Dodekaeders ist.

(iv) Man zeige, daß es keine weiteren Platonischen Körper gibt und bestimme daraus die Menge aller abgeschlossenen Untergruppen vom $\mathbf{O}(3)$.

1.3 Darstellungen

Definition 1.3.1 *(i) Eine reelle Darstellung einer kompakten Lie Gruppe G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus*

$$\rho : G \to \mathbf{GL}(n)$$

für ein $n \in \mathbb{N}$.

[6]Marius Sophus Lie, 17.12.1842–18.2.1899, neben seiner bedeutenden Leistung die Theorie der Lie Gruppen und Algebren zu beginnen, stammen von ihm Beitrage zur Integrationstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und Beiträge zur Differentialgeometrie

(ii) Ist $\rho(G) \subset \mathbf{O}(n)$ so nennt man ρ eine orthogonale Darstellung.

(iii) Ist $\rho : G \to \mathbf{GL}(n)$ eine Darstellung, so nennen wir die Abbildung

$$G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g, x) \mapsto \rho(g)x$$

eine Aktion von G auf $\mathbb{R}^n$. Ist ρ durch den Kontext klar, so schreiben wir kurz $(g, x) \mapsto gx$.

(iv) Zwei Darstellungen ρ_1, ρ_2 nennt man äquivalent, falls es eine Matrix $A \in \mathbf{GL}(n)$ gibt mit $A\rho_1(g) = \rho_2(g)A$ für alle $g \in G$.

Entsprechend definiert man eine komplexe Darstellung als Abbildung $\rho : G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Im allgemeinen spielen in dieser Vorlesung nur reelle Darstellungen eine Rolle, da wir ausschließlich reelle dynamische Systeme betrachten wollen. In diesem ersten Abschnitt sind daher Darstellungen, soweit nicht anders vermerkt reell. Die Darstellungstheorie ist aber über $\mathbb{C}$ weitaus klarer zu formulieren und deshalb werden wir auch Sätze für Darstellungen über $\mathbb{C}$ formulieren. Bevor wir tiefer in die Theorie von Darstellungen eindringen, noch eine Verallgemeinerung des Begriffes der Aktion.

Definition 1.3.2 *Sei $(S, \mathcal{S})$ ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe. Eine stetige Abbildung*

$$G \times S \to S : (g, s) \mapsto gs$$

heißt Aktion von G auf S, falls $\mathbb{1}s = s$ und $g(hs) = (gh)s$ ist.

Definition 1.3.3 *(i) Sei ρ eine reelle oder komplexe Darstellung einer Gruppe G. Ein Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ oder $V \subset \mathbb{C}^n$ heißt invariant, falls für alle $g \in G$ und alle $v \in V$ gilt*

$$gv \in V.$$

(ii) Eine reelle oder komplexe Darstellung ρ nennt man irreduzibel, falls die Implikation

$$V \text{ ist invariant} \Rightarrow V = \{0\} \text{ oder } V = \mathbb{R}^n$$

wahr ist.

(iii) Eine Darstellung ρ ist absolut irreduzibel, falls aus $A\rho(g) = \rho(g)A$ für ein $A \in \mathbf{GL}(n)$ $(\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}))$ folgt, daß $A = c\mathbb{1}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ bzw. $c \in \mathbb{C}$ ist.

Um eine beliebige Darstellung in irreduzible Bausteine zu zerlegen, brauchen wir ein Hilfsmittel, eine Integration über G. Darüberhinaus wird an vielen Stellen die Existenz eines invarianten Maßes auf einer Gruppe benötigt. Ohne Beweis zitieren wir den folgenden Satz.

Satz 1.3.4 *Sei G eine kompakte, topologische Gruppe. Dann existiert ein eindeutiges Borelmaß μ auf G mit folgenden Eigenschaften:*

(i) für jede offene, nichtleere Menge $U \subset G$, ist $\mu(U) > 0$;

(ii) für jede offene Menge $U \subset G$ gilt $\mu(gU) = \mu(U)$ (Linksinvarianz);

(iii) $\mu(G) = 1$.

Definition 1.3.5 *Ein Maß μ mit den Eigenschaften (i), (ii) heißt Haar'sches[7] Maß auf G. Genügt μ zusätzlich der Forderung (iii) so sprechen wir vom normalisierten Haar–Maß auf G.*

Mittels des Haar'schen Maßes kann man zeigen, daß jede reelle Darstellung einer kompakten Lie Gruppe äquivalent zu einer orthogonalen Darstellung ist. Entsprechendes gilt für komplexe Darstellungen. Diese sind äquivalent zu unitären Darstellungen.

Satz 1.3.6 *Für jede reelle Darstellung einer kompakten Lie Gruppe G gibt es ein G–invariantes Skalarprodukt, d.h. es existiert ein Skalarprodukt $(.,.)_G$ auf $\mathbb{R}^n$, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $g \in G$ gilt*

$$(gx, gy)_G = (x, y)_G.$$

Entsprechendes gilt für komplexe Darstellungen.

Beweis: Sei $(.,.)$ ein Skalarprodukt. Setze

$$(x, y)_G = \int_G (\gamma x, \gamma y) d\mu(\gamma).$$

Die Invarianz folgt nun aus der Linksinvarianz des Maßes. Alle anderen Eigenschaften eines Skalarproduktes sind klar. □

Satz 1.3.7 *Ist G eine kompakte Lie Gruppe, so ist jede Darstellung ρ äquivalent zu einer orthogonalen Darstellung ρ_2.*

Beweis: Sei

$$H = \sum_{g \in G} \rho(g)^* \rho(g) \text{ oder } H = \int_G \rho(g)^* \rho(g) d\mu(g).$$

Im weiteren beschränken wir uns auf den Fall, daß G endlich ist, der andere Fall folgt dann indem man die Summe jeweils durch das Integral ersetzt. H ist eine symmetrische (Hermite'sche[8] Matrix). Daher ist es möglich eine orthogonale (unitäre) Matrix U zu

[7] Alfred Haar, 11.10.1885–16.3.1933, seine wesentlichen Arbeiten betreffen Variationsrechnung, Funktionensysteme und das nach ihm benannte Maß

[8] nach Charles Hermite 24.12.1822-14.1.1901, einer der bedeutsamsten Analytiker seiner Zeit, seine Arbeitsgebiete waren hyperelliptische Integrale, er beschäftigte sich mit zahlentheoretischen Problemen, Funktionentheorie und deutete noch vor Riemann die Galois Gruppe als Monodromiegruppe. Er zeigte die Transzendenz von e.

finden, so daß $D = U^{-1}HU$ ist. H ist positiv definit, denn

$$\begin{aligned}(v, Hv) &= (v, \sum_{g\in G} \rho(g)^*\rho(g)v) = \sum_{g\in G}(v, \rho(g)^*\rho(g)v) \\ &= \sum_{g\in G}(\rho(g)v, \rho(g)v) > 0.\end{aligned}$$

Damit ist auch D positiv definit und $D^{1/2}$ existiert. Setze

$$\begin{aligned}\rho_1(g) &= U^{-1}\rho(g)U \\ \rho_2(g) &= D^{1/2}\rho_1(g)D^{-1/2}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}D &= U^{-1}\left(\sum_{g\in G} \rho(g)^*\rho(g)\right)U = \sum_{g\in G} U^{-1}\rho(g)^*UU^{-1}\rho(g)U \\ &= \sum_{g\in G} \rho_1(g)^*\rho_1(g)\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\mathbb{1} = D^{-1/2}DD^{-1/2} = D^{-1/2}\sum_{g\in G}\rho_1(g)^*\rho_1(g)D^{-1/2}.$$

Um zu zeigen, daß ρ_2 eine orthogonale Darstellung ist, muß nachgewiesen werden, daß $\rho_2(g)^*\rho_2(g) = \mathbb{1}$ für alle $g \in G$ gilt. Dies sieht man wie folgt

$$\begin{aligned}\rho_2(g)^*\rho_2(g) &= D^{-1/2}\rho_1(g)^*D^{1/2}D^{1/2}\rho_1(g)D^{-1/2} \\ &= D^{-1/2}\rho_1(g)^*D^{1/2} \\ &\qquad \left(D^{-1/2}\sum_{h\in G}(\rho_1(h)^*\rho_1(h))D^{-1/2}\right)D^{1/2}\rho_1(g)D^{-1/2} \\ &= D^{-1/2}\sum_{h\in G}\rho_1(g)^*\rho_1(h)^*\rho_1(h)\rho_1(g)D^{-1/2} \\ &= D^{-1/2}\sum_{h\in G}\rho_1(hg)^*\rho_1(hg)D^{-1/2} \\ &= \mathbb{1}.\end{aligned}$$

□

Lemma 1.3.8 *Sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(n)$ eine Darstellung einer kompakten Lie Gruppe. Zu einem invarianten Unterraum existiert ein invarianter Komplementärraum.*

Beweis: Sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ die gegebene Darstellung und $U \subset V$ ein invarianter Unterraum. Sei $W = U^\perp$ das orthogonale Komplement bezüglich eines G–invarianten Skalarproduktes. Zu zeigen ist, für jedes $w \in W$ und für alle $g \in G$ ist $gw \in W$, also $gw \perp U$. Sei $u \in U$, $g \in G$. Dann gilt

$$0 = (w, g^{-1}u)_G = (gw, gg^{-1}u)_G = (gw, u).$$

$\square$

Korollar 1.3.9 *Jede Darstellung einer kompakten Lie Gruppe läßt sich als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben.*

Beweis: Folgt mittels Induktion aus Lemma 1.3.8. $\square$

Satz 1.3.10 *Jede absolut irreduzible Darstellung ist irreduzibel. Für komplexe Darstellungen gilt auch die Umkehrung, welche für reelle Darstellungen falsch ist.*

Beweis: Sei ρ eine absolut irreduzible Darstellung von G auf dem Vektorraum V. Sei $U \subset V$ invariant und W ein invarianter Komplementärraum von U. Setze

$$A = \begin{pmatrix} c_1 \mathbb{1}_U & 0 \\ 0 & c_2 \mathbb{1}_W \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A\rho(g)u \oplus w &= A(\rho(g)u \oplus \rho(g)w) = c_1\rho(g)u \oplus c_2\rho(g)w \\ &= \rho(g)(c_1 u \oplus c_2 w) = \rho(g)Au \oplus w. \end{aligned}$$

Also ist $\rho(g)A = A\rho(g)$ und damit $A = c\mathbb{1}$, also $c_1 = c_2$.

Die Aktion von $\mathbf{SO}(2)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel, da $\mathbf{SO}(2)$ abelsch[9] ist. Die absolute Irreduzibilität irreduzibler, komplexer Darstellungen ist als Schur'sche[10] Lemma bekannt. Zum Beweis nehmen wir an eine irreduzible komplexe Darstellung ρ sei gegeben. Sei $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Matrix, welche mit der Gruppenaktion vertauscht. Weiter sei c ein Eigenwert mit Eigenvektor v von A. Man sieht leicht, daß $\rho(g)v$ Eigenvektor von A zum Eigenwert c ist. Das Erzeugnis U von $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ ist offensichtlich ein invarianter Unterraum. Da $U \neq \{0\}$, ist $U = V$ und $A = c\mathbb{1}$. $\square$

[9] nach Niels Henrik Abel, 5.8.1802–6.4.1829. Arbeiten zur Auflösungstheorie von algebraischen Gleichungen, insbesondere zeigte er die Nichtauflösbarkeit von Gleichungen von fünfter Ordnung und höher. Er arbeitete über elliptische Funktionen und abelsche Integrale. Er forschte für einige Zeit in Berlin, als Mitarbeiter von Crelle.

[10] Issai Schur, 10.1.1875–10.1.1941, arbeitete vor allem auf dem Gebiet der Darstellungstheorie, arbeitete auch über Lie Gruppen, Zahlentheorie, Invariantentheorie, algebraische Gleichungen. Neben diesen und weiteren algebraischen Problemen widmete er sich auch der Theorie der Integralgleichungen. Er lehrte in Bonn und Berlin, wurde 1935 aus rassistischen Gründen zwangsemeritiert. Er emigrierte 1939 nach Israel.

1.4 Charaktere

Wir wollen uns nun überlegen ob eine kompakte Lie Gruppe endlich viele oder unendlich viele nicht äquivalente irreduzible Darstellungen besitzt, und falls diese Zahl endlich ist, die Anzahl bestimmen.

In diesem Abschnitt wollen wir Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ und einige ihrer Eigenschaften studieren.

Definition 1.4.1 *Es sei G eine kompakte Lie Gruppe und $\rho : G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung. Die Funktion*

$$\chi : G \to \mathbb{C} : g \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

heißt Charakter auf G.

Wir notieren die folgenden einfachen Eigenschaften von Charakteren.

Lemma 1.4.2 *Sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe und χ der zugehörige Charakter. Dann gilt*

(i) $\chi(\mathbb{1}) = n$*;*

(ii) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$*;*

(iii) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$*, d.h. χ ist eine sogenannte Klassenfunktion.*

Beweis:

(i) $\rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ und daher ist $\chi(\mathbb{1}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$.

(ii) Da G endlich ist, gilt für alle Eigenwerte $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ von $\rho(g)$, daß $|\lambda_i| = 1$. Ist λ Eigenwert von $\rho(g)$, so ist damit auch $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$ Eigenwert von $\rho(g^{-1})$. Durch Summenbildung erhält man das gewünschte Ergebnis.

(iii) Dies folgt einfach daraus, daß die Spur invariant unter Konjugation ist.

□

Definition 1.4.3 *Seien $\rho_{1,2}$ zwei (komplexe) Darstellungen einer kompakten Lie–Gruppe G auf den Vektorräumen $V_{1,2}$. Die direkte Summe der Darstellungen ρ_1, ρ_2 ist gegeben durch die Abbildung*

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathbf{GL}(V_1 \oplus V_2) : g \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.4.4 *Der Charakter von $\rho_1 \oplus \rho_2$ ist gegeben durch*

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g) + \chi_{\rho_2}(g).$$

Beweis: Folgt aus der Matrizendarstellung der angegebenen Gruppenaktion. □

Definition 1.4.5 *Es sei ρ eine reelle oder komplexe Darstellung einer kompakten Lie Gruppe G. Es sei $L^2(G)$ der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $G \to \mathbb{R}$ oder $G \to \mathbb{C}$ mit Skalarprodukt gegeben durch*

$$(f_1|f_2) = \int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}d\mu(g).$$

Bemerkung 1.4.6 *(i) Ist G endlich, so ist für jedes $1 \leq p \leq \infty$ $L^p(G)$ ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Dimension $|G|$. Dies ist der freie Vektorraum $F(G, \mathbb{C})$ (oder $F(G, \mathbb{R})$) über G.*

(ii) Ist G eine nicht endliche, kompakte Lie Gruppe, so ist $L^2(G)$ ein Hilbertraum[11].

Lemma 1.4.7 (Schur) *Es seien ρ_1, ρ_2 zwei komplexe, irreduzible Darstellungen einer kompakten Lie Gruppe auf Vektorräumen V_1, V_2. Ferner sei $F : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung mit $F \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ F$ für alle $g \in G$. (Die Gleichheit ist als Gleichheit linearer Abbildungen $V_1 \to V_2$ zu verstehen.) Dann ist $F = 0$, falls ρ_1 und ρ_2 nicht äquivalent sind.*

Beweis: Ist $F = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $F \neq 0$. Sei $W_1 \subset V_1$ der Kern von F. Für $v \in W_1$ und $g \in G$ ist $\rho_1(g)v \in W_1$, denn $F \circ \rho_1(g)v = \rho_2(g) \circ Fv = 0$. Wegen der Irreduzibilität ist $W_1 = \{0\}$ oder $W_1 = V_1$. Im zweiten Fall ist $F = 0$, im Gegensatz zu unserer Annahme. Also ist $W_1 = \{0\}$. Nun ist das Bild W_2 von F ebenfalls ein invarianter Unterraum von V_2, also entweder $\{0\}$ oder V_2. Wegen $F \neq 0$ ist $W_2 = V_2$ und F ist ein Isomorphismus. Dies widerspricht der Annahme, daß ρ_1 und ρ_2 nicht äquivalent sind. □

Lemma 1.4.8 *Es seien ρ_1, ρ_2 zwei komplexe, irreduzible Darstellungen einer kompakten Lie Gruppe G auf Vektorräumen V_1, V_2. Ferner sei $F : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung. Sei*

$$H = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g)^{-1} \circ F \circ \rho_1(g).$$

Dann gilt

(i) sind ρ_1, ρ_2 nicht äquivalent, so ist $H = 0$.

(ii) Ist $V_1 = V_2$ und $\rho_1 = \rho_2$, so ist $H = c\mathbb{1}_{V_1}$, wobei $c = \mathrm{Tr}(F)/n$.

[11] David Hilbert, 23.1.1862–14.2.1943, promovierte über Invariantentheorie und wurde zu einem der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit. Er arbeitete an der Axiomatik, in der Idealtheorie, Geometrie und Variationsrechnung und wurde zum Wegbereiter der Funktionalanalysis. Bekannt sind die Probleme die er im Jahr 1900 beim 2. Internationalen Mathematikerkongreß in Paris präsentierte. Diese 23 Probleme haben die Mathematik in unserem Jahrhundert zum großen Teil geprägt.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus $\rho_2(g) \circ H = H \circ \rho_1(g)$ und Lemma 1.4.7. Die Vertauschungsrelation sieht man durch die folgende Rechnung ein

$$\begin{aligned}\rho_2(g)^{-1} \circ H \circ \rho_1(g) &= \frac{1}{|G|}\rho_2(g)^{-1}\sum_{h\in G}\rho_2(h)^{-1} \circ F \circ \rho_1(h)\rho_1(g)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho_2(hg)^{-1} \circ F \circ \rho_1(hg)\\ &= H.\end{aligned}$$

Aus der soeben gezeigten Vertauschungsrelation und 1.3.10 folgt, daß $H = c\mathbb{1}$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{C}$. Nun errechnet sich die Spur von H als

$$\mathrm{Tr}(H) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\rho_1(g)^{-1}F\rho_1(g)) = \mathrm{Tr}(F).$$

Da $H = c\mathbb{1}_{V_1}$ ist, ist $\mathrm{Tr}(H) = nc$, wobei $n = \dim V_1$ ist. Also gilt insgesamt

$$c = \mathrm{Tr}(F)/n.$$

□

Ist nun ρ durch eine Matrix $R(g)$ gegeben mit Einträgen $R(g) = (r_{ij}(g))_{ij}$, so kann man die vorstehenden Aussagen konkretisieren.

Lemma 1.4.9 *Sind ρ_1, ρ_2 komplexe, irreduzible Darstellungen einer Lie Gruppe G und R_1, R_2 die zugeordneten Matrizen.*

(i) Sind ρ_1 und ρ_2 nicht äquivalent, so gilt

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})r_{j_1i_1}(g) = 0.$$

(ii) Im Falle $V_1 = V_2$ und $\rho_1 = \rho_2$ hat man

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_{i_2j_2}(g^{-1})r_{j_1i_1}(g) = \frac{1}{n}\delta_{i_1i_2}\delta_{j_1j_2}.$$

Beweis:

(i) Sei $F : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung und M_F die zugehörige Matrix. Dann ist

$$(M_H)_{i_2i_1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{j_1,j_2} r_{i_2j_2}(g^{-1})(M_F)_{j_2j_1}r_{j_1i_1}(g)$$

Es folgt aus Lemma 1.4.8, daß $M_H = 0$ und damit ist diese Form für jedes Paar j_1, j_2 null, insbesondere folgt die Behauptung durch Koeffizientenvergleich.

(ii) Folgt ebenfalls direkt aus dem vorigen Lemma.

□

Definition 1.4.10 *Eine Funktion von $f : G \to \mathbb{C}$ ($f : G \to \mathbb{R}$) heißt darstellende Funktion, falls es eine komplexe (oder reelle) Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ und eine Matrizendarstellung gibt, so daß $f = r_{ij}(g)$ für ein Paar i, j ist.*

Bemerkung 1.4.11 *Die darstellenden Funktionen orthogonaler (unitärer) Darstellungen sind paarweise orthogonal in $L^2(G)$. Dies folgt sofort aus obigen Betrachtungen, denn in diesem Fall ist $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^*$. Der Satz von Peter[12] und Weyl[13] besagt, daß die darstellenden Funktionen ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(G)$ sind.*

Satz 1.4.12 *(i) Ist χ ein Charakter einer irreduziblen Darstellung, so ist*

$$(\chi|\chi) = 1.$$

(ii) Sind χ, χ' zwei Charaktere zu nicht äquivalenten, irreduziblen Darstellungen, so ist $(\chi|\chi') = 0$.

Beweis: Folgt aus dem zuvor Gesagten. □

Korollar 1.4.13 *Eine endliche Gruppe besitzt bis auf Äquivalenz endlich viele irreduzible Darstellungen.*

Beweis: $L^2(G)$ ist endlich dimensional. □

Satz 1.4.14 *Gegeben sei eine komplexe Darstellung ρ einer kompakten Lie Gruppe G auf dem Vektorraum V mit Charakter χ. Es sei*

$$V = \bigoplus W_i$$

eine Zerlegung in irreduzible Unterräume. Ist nun ρ_0 eine irreduzible Darstellung von G auf einem Vektorraum W_0 mit Charakter χ_0, so ist die Anzahl der W_i, so daß die Darstellung ρ_i auf W_i äquivalent zu ρ_0 ist, gegeben durch

$$(\chi|\chi_0).$$

[12] F. Peter, publizierte zusammen mit H. Weyl im Jahr 1927 die Arbeit in der dieser Satz gezeigt wurde.

[13] Hermann Weyl, 9.11.1885–8.12.1955, Schüler von Hilbert, promovierte über Integralgleichungen, wurde Nachfolger von Hilbert. 1933 emigrierte er nach USA (Princeton). Bedeutende Beiträge zur Theorie der Lie Gruppen, Differentialgeometrie und Invariantentheorie, Funktionalanalysis, Zahlentheorie, Relativitätstheorie u.v.m.. Seine Bücher (Die Idee der Riemann'schen Fläche (1913), Raum, Zeit, Materie (1918), Gruppentheorie und Quantenmechanik (1923), The classical groups (1946)) gelten als das einflußreichste mathematische Werk unseres Jahrhunderts.

Beweis: Seien χ_i die Charaktere der Darstellungen auf W_i. Dann ist $\chi = \sum_i \chi_i$. Also

$$(\chi|\chi_0) = \sum_i (\chi_i|\chi_0).$$

□

Definition 1.4.15 *Die Zahl $(\chi|\chi_0)$ heißt die Vielfachheit der Darstellung ρ_0 in ρ.*

Korollar 1.4.16 *Die Anzahl der Darstellungen ρ_i auf W_i, welche zu einer gegebenen Darstellung ρ_0 äquivalent sind, hängt nicht von der gegebenen Zerlegung ab.*

Korollar 1.4.17 *Zwei Darstellungen mit gleichem Charakter sind äquivalent.*

Definition 1.4.18 *Gegeben eine Darstellung ρ einer kompakten Lie Gruppe G. Sei $\rho = \bigoplus_{i=1}^{s} \rho_i$. Gegeben sei eine irreduzible Darstellung ρ^* von G und es sei*

$$J = \{\rho_j \mid \rho_j \text{ ist äquivalent zu } \rho^*\}$$

die Menge der Darstellungen ρ_i, welche äquivalent zu ρ^* sind. Die Darstellung $\bigoplus_{\rho_j \in J} \rho_j$ heißt isotypische Komponente der Darstellung ρ.

Definition 1.4.19 *Sei G eine endliche Gruppe. Dann hat man eine Darstellung auf $F(G, \mathbb{C})$, durch $(g, e_h) \mapsto e_{gh}$. Diese Darstellung heißt die reguläre Darstellung.*

Lemma 1.4.20 *Der Charakter χ_G der regulären Darstellung von G ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \chi_G(\mathbb{1}) &= |G| \\ \chi_G(g) &= 0, \ g \neq \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Beweis: $\mathbb{1}$ wirkt als Identität auf $F(G, \mathbb{C})$ und daher ist $\chi_G(\mathbb{1}) = |G|$. Ist $g \neq \mathbb{1}$, so ist $ge_h \neq e_h$ für alle $h \in G$. In einer Matrizendarstellung der linearen Abbildung $(g, e_h) \mapsto e_{gh}$ sind alle Diagonalelemente 0 und daher ist $\chi_G(g) = 0$. □

Lemma 1.4.21 *Jede irreduzible Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ ist in der regulären Darstellung mit Vielfachheit n enthalten, wobei $n = \dim V$ die Dimension der Darstellung ist.*

Beweis: Sei χ der Charakter von ρ, so ist

$$\begin{aligned} (\chi_G|\chi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_G(g)\chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \chi_G(\mathbb{1})\chi(\mathbb{1}) = n. \end{aligned}$$

□

Korollar 1.4.22 *Es seien $\rho_1, \dots, \rho_r$ alle nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen der endlichen Gruppe G auf Vektorräumen V_i der Dimensionen n_i. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = |G|.$$

Beweis: Es seien χ_i die Charaktere von ρ_i. Dann ist

$$\chi_G = \sum_i n_i \chi_i.$$

Also ist wegen $|G| = \frac{1}{|G|}\chi_G(\mathbb{1})^2 = (\chi_G|\chi_G)$

$$|G| = (\chi_G|\chi_G) = \sum_i n_i^2 (\chi_i|\chi_i) = \sum_i n_i^2.$$

□

Beispiel 1.4.23 *(i) Gegeben sei die Gruppe $\mathbb{O}$, diese hat 24 Elemente. Es gibt zwei dreidimensionale, eine zweidimensionale und zwei eindimensionale irreduzible Darstellungen.*

(ii) Die Gruppe D_3 hat sechs Elemente. Eine zwei und zwei eindimensionale Darstellungen geben die richtige Summe.

Aufgabe 1.4.24 *Man zeige, für die im Beispiel 1.4.23 genannten Gruppen, daß irreduzible Darstellungen in den entsprechenden Dimensionen (über $\mathbb{C}$) existieren. Welche dieser irreduziblen Darstellungen lassen sich als reell irreduzible Darstellungen realisieren?*

1.5 Geometrische Eigenschaften von Aktionen

In diesem Abschnitt sei G eine kompakte Lie Gruppe und $(S, \mathcal{S})$ ein topologischer G-Raum, d.h. es gibt eine Aktion $G \times S \to S : (g, x) \mapsto gx$. Wir verlangen zudem, daß die Topologie auf S Hausdorff'sch[14] ist (i. A. werden wir mehr verlangen).

Definition 1.5.1 *(i) Sei $x_0 \in S$. Der Stabilisator von x_0, in Zeichen* $\mathrm{Stab}(x_0)$ *ist definiert als*

$$\mathrm{Stab}(x_0) = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}.$$

(ii) Zu einer Untergruppe $K \subset G$ definieren wir die Fixmenge $\mathrm{Fix}(K)$ *durch*

$$\mathrm{Fix}(K) = \{x \in S \mid kx = x \ \forall k \in K\}.$$

Den Stabilisator von x bezeichnet man auch oft, als die Isotropieuntergruppe von x.

[14] Felix Hausdorff, 8.11.1868-26.1.1942, wesentliche Beiträge zur Mengenlehre und Topologie. Er entging einer Deportation im Jahre 1942 nur, indem er zusammen mit seiner Frau aus dem Leben schied.

Die folgende Aussage ist leicht nachzuprüfen:

Lemma 1.5.2 *(i)* $\mathrm{Stab}(x_0)$ *ist eine abgeschlossene Untergruppe von* G.

(ii) Für eine abgeschlossene Untergruppe K *ist* $\mathrm{Fix}(K)$ *eine abgeschlossene Teilmenge von* S.

(iii) Ist S *ein linearer Raum, und die Aktion von einer Darstellung* ρ *induziert, so ist* $\mathrm{Fix}(K)$ *ein linearer Unterraum von* S. *Die Dimension ist gegeben durch die sogenannte Spurformel*

$$\dim \mathrm{Fix}(K) = \int_G \mathrm{Tr}(\rho(k))d\mu(k).$$

Lemma 1.5.3 *Operiert* G *auf* S, *so bildet die Menge* $I_S(G)$ *der Isotropieuntergruppen eine partiell geordnete Menge.*

Beweis: Alle Aussagen bis auf die Dimensionsformel sind klar. Sei ρ_K die Einschränkung von ρ auf K. Dann ist $\dim \mathrm{Fix}(K)$ gleich der Vielfachheit der trivialen Darstellung $\rho_{\mathbf{1}}$ in ρ_K. Seien χ_K der Charakter von ρ_K und $\chi_{\mathbf{1}}$ der Charakter der trivialen Darstellung. Die Vielfachheit ist nach Lemma 1.4.14 gegeben durch $(\chi_K|\chi_{\mathbf{1}})$. Da $\chi_{\mathbf{1}}(g) = 1$ für alle $g \in G$, ist

$$(\chi_K|\chi_1) = \sum_{k\in K} \mathrm{Tr}(\rho_K(k)) = \sum_{k \in K} \mathrm{Tr}(\rho(k)).$$

□

Definition 1.5.4 *Die maximalen Elemente in* $I_S(G)$ *heißen maximale Isotropieuntergruppen. Ist eine Untergruppe eine Isotropieuntergruppe, jedoch nicht maximal, so nennen wir sie nicht-maximale Isotropieuntergruppe. Unter den nicht–maximalen sind noch diejenigen ausgezeichnet, für die gilt ist* H *eine Isotropieuntergruppe und folgt aus* $H \subset K \subset G$ *und* K *ist Isotropieuntergruppe* K *ist maximale Isotropieuntergruppe, so heißt* H *submaximal.*

Oft braucht man eine Aktion auf dem Fixraum einer Untergruppe. In natürlicher Weise operiert der Normalisator der gegebenen Gruppe auf dem Fixraum.

Lemma 1.5.5 *Sei* G *eine Gruppe,* $H \subset G$ *eine Untergruppe. Operiert* G *auf der Menge* S, *so gibt es eine natürliche Aktion des Normalisators* $N(H)$ *von* H *auf* $\mathrm{Fix}(H)$.

Beweis: Seien $g \in N(H)$ und $y \in \mathrm{Fix}(H)$. Dann ist für alle $h \in H$ $hx = x$ und wegen $ghg^{-1} \in H$ auch $g^{-1}hgx = x$, also $hgx = gx$. □

Definition 1.5.6 *Der Orbit von* $x_0 \in S$ *ist*

$$\mathcal{O}(x_0) = \{gx_0 \mid g \in G\}.$$

Bemerkung 1.5.7 *Die Relation $x \sim y$, falls $y \in \mathcal{O}(x)$ ist offenkundig eine Äquivalenzrelation. Es ist auch leicht einzusehen, daß Orbits kompakt sind, daher ergibt sich eine disjunkte Zerlegung von S in Gruppenorbits, welche alle abgeschlossen sind.*

Lemma 1.5.8 *Liegen x, y auf einem Gruppenorbit, so sind* $\mathrm{Stab}(x)$ *und* $\mathrm{Stab}(y)$ *konjugiert, genauer: ist $gx = y$, so gilt*

$$g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1} = \mathrm{Stab}(y).$$

Beweis: Ist $h \in \mathrm{Stab}(x)$, so hat man $x = hx = hg^{-1}y = g^{-1}y$. Insbesondere gilt $ghg^{-1}y = y$. ☐

Definition 1.5.9 *Ist $\mathcal{O}(x)$ ein Orbit, so ist $\tau(x)$ der Orbittyp von x, defiiniert durch*

$$\tau(x) = [Stab(x)] = \{g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1} \mid g \in G\}.$$

Definition 1.5.10 *(i) Eine Aktion heißt frei, falls für jedes $x \in S$ gilt*

$$\tau(x) = [\{\mathbb{1}\}].$$

(ii) Eine Aktion nennt man transitiv, falls $S = \mathcal{O}(x)$ für ein (und damit alle) $x \in S$ ist.

(iii) Gibt es einen einzigen Orbittyp, so nennt man die Aktion monotypisch.

Allgemeiner gilt

Lemma 1.5.11 *Operiert die kompakte Lie–Gruppe auf dem Hausdorffraum S, so ist $\mathcal{O}(x)$ homöomorph zu $G/\,\mathrm{Stab}(x)$.*

WARNUNG: I.a. ist $\mathrm{Stab}(x)$ nicht normal und somit $G/\,\mathrm{Stab}(x)$ keine Gruppe sondern nur der Quotientenraum (mit der entsprechenden Topologie versehen). Dieser Quotientenraum ist kompakt!

Beweis: Zu zeigen ist, daß die Abbildung

$$\eta : G/\,\mathrm{Stab}(x) \to \mathcal{O}(x) : [g] \mapsto [g]x \overset{def}{=} gx$$

wohldefiniert, bijektiv und homöomorph ist. Seien g, h in der gleichen Nebenklasse von $\mathrm{Stab}(x)$, so ist $g^{-1}h \in \mathrm{Stab}(x)$, also $g^{-1}hx = x$ oder $hx = gx$. Damit hat man die Wohldefiniertheit. Ist $gx = hx$, so zeigt die gleiche Rechnung $g^{-1}h \in \mathrm{Stab}(x)$ und η ist injektiv. Offenkundig ist η surjektiv. Die Definition der Quotiententopologie ergibt sofort die Stetigkeit von η. Als injektive, stetige Abbildung eines kompakten Raumes $G/\,\mathrm{Stab}(x)$ ist η^{-1} stetig. ☐

Bei endlichen Gruppen gibt es daher einen einfachen Zusammenhang zwischen Stabilisator und Orbit. Es gilt

Lemma 1.5.12 *Operiert die endliche Gruppe auf der Menge S, so gilt*

$$|G| = |\operatorname{Stab}(x)||\mathcal{O}(x)|.$$

Beweis: Klar! □

.

Das Lemma 1.5.12 hat eine Verallgemeinerung für Lie Gruppen, für die wir jedoch etwas Arbeit investieren müssen.

Definition 1.5.13 *Eine abstrakte Lie–Gruppe ist eine reell (oder komplex) analytische Mannigfaltigkeit G, die zugleich eine Gruppe ist, so daß die Abbildungen $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ und $G \to G : g \mapsto g^{-1}$, reell (oder komplex) analytisch sind.*

Natürlich besitzt eine Mannigfaltigkeit an jedem Punkt einen Tangentialraum T_gG, zusammen bilden diese Tangentialräume das Tangentialbündel TG. Die natürliche Projektion von $TG \to G$ sei p. Ein Vektorfeld auf G ist ein Schnitt $v : G \to TG$ mit $p \circ v = \mathbb{1}_G$. Speziell ausgezeichnet ist der Tangentialraum $T_{\mathbf{1}}G$. Die Linksmultiplikation mit Elementen von G macht aus jedem Vektor in $T_{\mathbf{1}}G$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf G. Andrerseits gibt es eine natürliche Abbildung von der Menge LG der linksinvarianten Vektorfelder auf G in $T_{\mathbf{1}}G$. Insbesondere überzeugt man sich, daß der Raum der linksinvarianten Vektorfelder LG isomorph zu $T_{\mathbf{1}}G$ ist. Auf dem Raum der linksinvarianten Vektorfelder LG kann man jedoch auf einfache Weise eine zusätzliche Struktur definieren.

Definition 1.5.14 *Seien $X, Y : G \to TG$ zwei linksinvariante Vektorfelder. Ein Vektorfeld X operiert auf glatten Funktionen $\phi : G \to \mathbb{R}$ $(G \to \mathbb{C})$ durch die Identifikation von $X(g)$ mit einer Kurve $\alpha(X, g) : \mathbb{R} \to G$*

$$X(\phi)(g) = \frac{d}{dt}\phi(\alpha(t))_{|t=0}.$$

Es sei

$$[X, Y](\phi) = X(Y(\phi)) - Y(X(\phi)).$$

Lemma 1.5.15 *(i) Mit der soeben definierten Multiplikation linksinvarianter Vektorfelder wird der Raum der linksinvarianten Vektorfelder zu einer Algebra. Es gilt $[X, X] = 0$ und die Jacobi[15]-Gleichung*

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

[15] Carl Gustav Jacob Jacobi, 10.12.1804–18.2.1851 geboren in Potsdam, gestorben in Berlin, arbeitete über elliptische Funktionen, elliptische Integrale und deren Umkehrfunktionen. Er beschäftigte sich mit Zahlentheorie, Himmelsmechanik, quadratischen Formen. Mit seinen Beiträgen zu den Hamilton–Jacibischen Differentialgleichungen begründete er einen Zusammenhang zwischen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und der mathematischen Physik.

(ii) Durch die Identifikation von LG mit $T_{\mathbb{1}}G$ wird letzterer zur Algebra.

Beweis: Nachrechnen!

□

Definition 1.5.16 *Der Raum LG (wahlweise als Raum der linksinvarianten Vektorfelder oder als Tangentialraum bei der Identität) heißt die Lie–Algebra der abstrakten Lie–Gruppe G.*

Beispiel 1.5.17 *Die Gruppe $\mathbf{GL}(n)$ ($\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$) ist eine abstrakte Lie–Gruppe mit zugehöriger Lie–Algebra* $\mathrm{HOM}(\mathbb{R}^n)$.

Ohne vollständigen Beweis zitieren wir den folgenden Satz.

Satz 1.5.18 *Eine abgeschlossene Untergruppe H einer abstrakten Lie–Gruppe G ist wieder eine abstrakte Lie–Gruppe.*

Beweis: Wir beweisen diese Aussage nur für die abgeschlossenen Untergruppen H von $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Einen vollständigen Beweis findet man bei Warner, Foundations of Manifolds and Lie Groups, Satz 3.42.

Zunächst erinnern wir uns an die Definition der Exponentialabbildung für lineare Abbildungen: sei $L \in \mathrm{HOM}(\mathbb{C}^n)$, so ist

$$\exp(tL) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L^k.$$

Diese Summe ist für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt und löst die Differentialgleichung $\dot{A} = LA$. Wir betrachten $\mathrm{HOM}(\mathbb{C}^n)$ als $4n^2$–dimensionalen reellen Vektorraum. Seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{HOM}(\mathbb{C}^n)$ linear unabhängig, so daß $\exp(tA_j) \in H$ und sei ferner k maximal mit dieser Eigenschaft. Sei V der lineare Unterraum, der von den A_j erzeugt wird und W ein Komplement. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{HOM}(\mathbb{C}^n) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) : \sum_{j=1}^{k} t_j A_j + B \mapsto \prod_{j=1}^{k} e^{t_j A_j} e^B.$$

Die Ableitung dieser Abbildung bei $t_j = 0, B = 0$ ist die Identität und demzufolge ist Φ surjektiv von einer genügend kleinen Umgebung der $0 \in \mathrm{HOM}(\mathbb{C}^n)$ auf eine Umgebung der $\mathbb{1}_{\mathbb{C}^n}$. Ist $\Phi(\sum_{j=1}^{k} t_j A_j + B) \in H$, so ist $e^B \in H$, da das Produkt der $e^{t_j A_j}$ in H ist. Gibt es eine Umgebung U von $0 \in W$, so daß $\Phi(U)$ keine Elemente von H außer der Identität enthält, so folgt, daß Φ^{-1} eingeschränkt auf den Unterrraum V eine lokale Karte von H gibt. Die Glattheit der Multiplikation und der Inversen vererbt sich von der Glattheit der entsprechenden Operationen in $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Der Beweis ist nun eine Konsequenz der folgenden Aussage:

Sei $R \subset \mathbb{R}^m$ eine abgeschlossene Teilmenge, so daß $r \in R$ impliziert, daß $nr \in R$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist 0 entweder ein isolierter Punkt von R oder R enthält eine Gerade durch den Ursprung.

Angenommen, 0 ist nicht isoliert in R, so gibt es eine Folge $r_j \in R$, welche für $j \to \infty$ gegen 0 konvergiert. O.B.d.A. sind alle $r_j < 1/j$. Dann gibt es eine Zahl $k_j \geq j$ mit $1 \leq k_j|r_j| \leq 2$. Setze $u_j = k_j r_j$. Wegen der Kompaktheit der Kugelschale $\{v \in \mathbb{R}^m \mid |v| \in [1,2]\}$, gibt es einen Häufungspunkt u der u_j. Da R abgeschlossen ist, ist $u \in R$. Wir zeigen nun $tu \in R$ für jedes reelle t. Sei $t \neq 0$. Dann gibt es eine ganze Zahl k mit

$$\left|\frac{k}{k_j} - t\right| < \frac{1}{k_j} \leq \frac{1}{j}.$$

Nun ist $\frac{k}{k_j}u_j = \frac{k}{k_j}k_j r_j = kr_j \in R$. Daraus folgt

$$|kr_j - tu| = \left|\frac{k}{k_j}u_j - tu\right| = \left|\frac{k}{k_j}u_j - tu_j + tu_j - tu\right| \leq \frac{1}{j}|u_j| + |t||u_j - u|.$$

Mit $j \to \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0, damit ergibt die Abgeschlossenheit von R die Behauptung.

□

Für $\mathbf{GL}(n)$ folgt hieraus, daß jede abgeschlossene Untergruppe eine abstrakte Lie–Gruppe ist. Speziell ist jede kompakte Lie–Gruppe eine abstrakte Lie–Gruppe. Es gilt auch die Umkehrung, jede abstrakte Lie–Gruppe ist bis auf Isomorphie Untergruppe einer $\mathbf{GL}(n)$ (oder $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$) (vgl. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Éléments de Mathématiques, Hermann

Die im Beweis verwendete Exponentialabbildung $\exp : \mathrm{HOM}(\mathbb{C}^n) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ hat eine Verallgemeinerung für abstrakte Lie–Gruppen. Dazu macht man die folgende Beobachtung.

Definition 1.5.19 *Eine einparameter Untergruppe einer abstrakten Lie–Gruppe G ist eine abgeschlossene Untergruppe, welche Bild eines stetigen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in G ist.*

Lemma 1.5.20 *Zu jedem Vektor $v \in T_{\mathbb{1}}G$ gibt es eine einparameter Untergruppe $H \subset G$, deren Tangentialvektor bei $\mathbb{1}$ der Vektor v ist.*

Beweis: Sei X das linksinvariante Vektorfeld, welches dem Vektor v entspricht. Der Existenz und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen gibt zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung der Gleichung

$$\dot{x} = X(x), x(0) = x_0.$$

Die Lösungskurve $\Phi_X(t, \mathbb{1})$ durch $\mathbb{1}$ hat alle gewünschten Eigenschaften, wobei Φ_X der dem Vektorfeld X zugeordnete Fluß ist. Wir weisen nach, daß $\Phi_X(t, \mathbb{1})$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to G$ definiert. Zu zeigen ist also $\Phi_X(t_1 + t_2, \mathbb{1}) = \Phi_X(t_1, \mathbb{1})\Phi_X(t_2, \mathbb{1})$.

Wir halten t_1 fest und variieren $t = t_2$. Wir betrachten die beiden Abbildungen $t \mapsto x(t) = \Phi_X(t_1 + t, \mathbb{1})$ und $t \mapsto u(t) = \Phi_X(t_1, \mathbb{1})\Phi_X(t, \mathbb{1})$. Es gilt $x(0) = \Phi_X(t_2, \mathbb{1}) = u(0)$ und

$$\dot{x}(t) = X(x(t))$$

und auch

$$\dot{u}(t) = \Phi_X(t_1, \mathbb{1})X(\Phi(t, \mathbb{1})).$$

Wegen der Linksinvarianz von X ist

$$\dot{u}(t) = X(\Phi_X(t_1, \mathbb{1})\Phi_X(t, \mathbb{1})) = X(u(t)).$$

Wegen des Eindeutigkeitssatzes für die Lösung von Anfangswertproblemen ist $u(t) = x(t)$. □

Definition 1.5.21 *Die Abbildung $LG \to G : v \mapsto \Phi_X(1, \mathbb{1})$ heißt Exponentialabbildung und wird mit* $\exp : LG \to G$ *bezeichnet.*

Satz 1.5.22 *Sei G eine abstrakte Lie–Gruppe, $\varphi : \mathbb{R} \to G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist φ reell analytisch.*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß G Untergruppe von $\mathbf{GL}(n)$ ist. O.B.d.A. identifizieren wir G mit dem isomorphen Bild in $\mathbf{GL}(n)$.

Sei U eine Umgebung von $\mathbb{1} \in \mathbf{GL}(n)$ und sei V eine Umgebung von 0 in $\mathrm{HOM}(\mathbb{R}^n)$, so daß

$$\exp : V \to U$$

ein Diffeomorphismus ist und

$$\exp(LG \cap V) \to G \cap U$$

eine Bijektion ist. Dabei ist LG die Lie Algebra von G. O.B.d.A. hat V die Eigenschaft, daß mit $L \in V$ auch $tL \in V$ für $t \in [0, 1]$. Sei $V' = \{\frac{1}{2}L | L \in V\}$. Ferner sei $t_0 \in \mathbb{R},\ t_0 > 0$ so gewählt, daß

$$\varphi(t) \in \exp(V') \text{ für } t \text{ mit } |t| < t_0.$$

Wir wollen zeigen, daß es ein $Y \in V'$ gibt, mit

$$\varphi(t) = \exp(\frac{t}{t_0}Y),\ |t| < t_0. \tag{1.5.2}$$

Daraus folgt dann die Behauptung unmittelbar. Tatsächlich zeigen wir etwas weniger:

$$\exists\ Y \in V' : \forall\ q \in \mathbb{Q},\ |q| < t_0, \text{ gilt } \varphi(qt_0) = \exp(qY). \tag{1.5.3}$$

Wegen der Stetigkeit von φ und exp folgt (1.5.2) sofort aus (1.5.3). Um (1.5.3) zu zeigen, schließen wir aus der Wahl von t_0, daß es Elemente $X \in V',\ Y \in V'$ gibt mit

$$\exp(X) = \varphi(\frac{t_0}{n}),\ \exp(Y) = \varphi(t_0).$$

Wir zeigen, daß $Y = nX$ ist. Da

$$\exp(nX) = \varphi(t_0) = \exp(Y)$$

ist, muß, wegen der Injektivität von exp auf V, nur gezeigt werden, daß $nX \in V'$ ist. Sei $1 \leq j < n$ und $jX \in V'$. Wir wollen zeigen, daß auch $(j+1)X \in V'$ ist. Es gilt aber $(j+1)X \in V$ und damit

$$\exp((j+1)X) = \varphi\left(\frac{(j+1)t_0}{n}\right) \in \exp(V').$$

Da exp auf V injektiv ist, ist auch $(j+1)X \in V'$. Also ist auch $nX \in V'$ und damit ist $nX = Y$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$. Dann ist

$$\varphi\left(\frac{m}{n}t_0\right) = \varphi\left(\frac{t_0}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}Y\right)^m = \exp\left(\frac{m}{n}Y\right).$$

Ist $m \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq -m < n$ so hat man

$$\varphi\left(\frac{m}{n}t_0\right) = \varphi\left(-\frac{mt_0}{n}\right)^{-1} = \exp\left(-\frac{m}{n}Y\right)^{-1} = \exp\left(\frac{m}{n}Y\right).$$

Und damit ist φ analytisch. □

Satz 1.5.23 *Sind G, H Lie–Gruppen und ist $\varphi : H \to G$ ein stetiger Gruppenhomomorhismus, dann ist φ analytisch.*

Beweis: Sei LH die Lie–Algebra von H, $d = \dim LH$ und $Y_1, \ldots, Y_d$ eine Basis von LH. Setze

$$\alpha : \mathbb{R}^d \to H : (t_1, \cdots, t_d) \mapsto (\exp(t_1 Y_1), \ldots, \exp(t_d Y_d)).$$

Die Abbildung α ist analytisch. Es gibt Umgebungen von $0 \in \mathbb{R}^d$ und $\mathbb{1} \in H$ welche analytisch diffeomorph sind. Dann ist für jedes $i \in \{1, \ldots, d\}$ die Abbildung

$$t \mapsto \varphi(\exp(tY_i))$$

ein stetiger Gruppenhomomorphismus und daher analytisch. Dann ist auch $\varphi \circ \alpha$ analytisch und daher ist φ analytisch. □

Lemma 1.5.24 *Seien G, H Lie Gruppen und $\varphi : H \to G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist $d_\varphi(\mathbb{1}) : LH \to LG$ definiert. Es gilt*

$$\begin{array}{ccccc} & H & \xrightarrow{\varphi} & G & \\ \exp & \uparrow & & \uparrow & \exp \\ & LH & \xrightarrow{d\varphi(\mathbf{1})} & LG & \end{array} \quad . \tag{1.5.4}$$

Beweis: Sei $A \in LH$. Dann ist $t \mapsto \varphi(\exp(tA))$ eine analytische Kurve in G mit Tangentialvektor $d\varphi(\mathbb{1})A$. Aber $\varphi(\exp(tA))$ ist eine 1-Parameteruntergruppe von G mit Tangentialvektor $d\varphi(\mathbb{1})A$. Dann ist $t \mapsto \exp(td\varphi(\mathbb{1})A)$ die eindeutig bestimmte 1-Parameteruntergruppe von G mit Tangentialvektor $d\varphi(\mathbb{1})A$. Also ist

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi(\mathbb{1}), \tag{1.5.5}$$

was zu zeigen war. Man beachte, daß in (1.5.5) die Exponentialabbildungen links und rechts verschieden sind. □

Satz 1.5.25 *Sei $\varphi : H \to G$ ein topologischer Gruppenhomomorphismus und $K = \ker\varphi$. Sei $\mathcal{K} \subset LH$ der Kern von $d_\varphi(\mathbb{1})$. Dann ist K eine abgeschlossene Untergruppe von H und die Lie Algebra LK von K ist gleich $\mathcal{K}$.*

Beweis: Folgt aus den vorherigen Sätzen. □

Operiert eine abstrakte, kompakte Lie–Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M analytisch, so definiert eine analytische Kurve $\gamma(t)$ in G durch $\mathbb{1}$ eine analytische Kurve $\Gamma(t)$ in $\mathcal{O}_v$ durch

$$\Gamma(t) = \gamma(t)v.$$

Mit $\frac{d\Gamma}{dt}|_{t=0}$ erhält man einen Tangentialvektor an $\mathcal{O}_v$ in v.
Die Menge aller Tangentialvektoren bilden einen Vektorraum, den Tangentialraum an $\mathcal{O}_v$ in v, den wir mit $T_v\mathcal{O}_v$ bezeichnen.

Definition 1.5.26 *Wir nennen $\dim T_v\mathcal{O}_v$ die Dimension $\dim \mathcal{O}_v$ des Orbits.*

Aufgabe 1.5.27 *Man überlege sich, daß die Dimension wohldefiniert ist, d.h. die Dimension $\dim T_v\mathcal{O}_v$ nicht von $v \in \mathcal{O}_v$ abhängt.*

Satz 1.5.28 *Es gilt*

$$\dim \mathcal{O}_v = \dim G - \dim \mathrm{Stab}(v).$$

Beweis: $\mathrm{Stab}(v)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G. □

Lemma 1.5.29 *Ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie–Gruppe G, so ist der Quotient G/H eine analytische Mannigfaltigkeit mit einer kanonischen Aktion von G*

$$G \times G/H \to G/H : (g, g'H) \mapsto gg'H.$$

Beweis: vgl. Warner, a.a.O.. □

Definition 1.5.30 *Eine Mannigfaltigkeit der Form G/H, wobei G eine Lie–Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe ist, nennt man homogenen Raum.*

Lemma 1.5.31 *Operiert die kompakte Lie–Gruppe G auf einer analytischen Mannigfaltigkeit S, so ist der Orbit eines Punktes $x_0 \in S$ diffeomorph zur homogenen Mannigfaltigkeit $G/\mathrm{Stab}(x_0)$.*

Beweis: Folgt aus den bisherigen Sätzen. □

Lemma 1.5.32 *Sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ eine Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe, so bildet die Menge V/G der Orbits in natürlicher Weise einen topologischen Raum. Dieser ist hausdorffsch.*

Beweis: Sei $o : V \to V/G : v \mapsto \mathcal{O}(v)$ die kanonische Abbildung. Wir versehen V/G mit der feinsten Topologie die diese Abbildung stetig macht. Eine Menge O von Orbits heißt dabei offen, genau dann wenn die Menge $\{v \in V \mid \mathcal{O}(v) \in O\}$ offen ist. Dies ist eine hausdorffsche Topologie. □

Ein weiteres nützliches Hilfsmittel ist der Scheibensatz. Er besagt, daß die lokale Struktur nahe eines Gruppenorbits wie der Orbit mal einem orthogonalen Scheibe aussieht, wobei auf der Scheibe eine Aktion des Stabilisators an der entsprechenden Stelle gegeben ist.

Satz 1.5.33 (Scheibensatz) *Sei $G \times S \to S$ eine analytische Gruppenaktion auf einer analytischen Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem $x \in S$ eine Tubenumgebung W_x, von der Form $N_x \times U_x$, wobei N_x eine Umgebung der Null im Normalenraum zu $T_x\mathcal{O}(x)$ ist und U_x eine Umgebung von $x \in \mathcal{O}(x)$. Auf W_x gibt es eine natürliche Aktion des Stabilisators* $\mathrm{Stab}(x)$.

Beweis: Siehe den ersten Teil des Beweises des folgenden Satzes. □

Satz 1.5.34 *Sei G eine Lie Gruppe und ρ eine Darstellung auf V. Für die zugehörige Gruppenaktion gilt:*

(i) Es gibt nur endlich viele Orbittypen.

(ii) Es gibt einen eindeutig bestimmten minimalen Orbittyp.

(iii) Die Menge $P_G(V)$ der Punkte mit minimalen Orbittyp ist offen und dicht in V.

(iv) Ist G zusammenhängend, so ist $P_G(V)$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $v \in V$, $\mathcal{O}_v$ der zugehörige Orbit. Zunächst konstruieren wir eine *Tubenumgebung* W des Orbits und eine Abbildung $R : W \to \mathcal{O}_v$ mit den Eigenschaften:

(i) R ist stetig,

(ii) W ist invariant unter G, d.h $w \in W, g \in G$ impliziert $gw \in W$,

(iii) $\forall w \in W$ gilt $R(\rho(g)w) = \rho(g)R(w)$.

Um diese Umgebung und Abbildung zu erhalten, benutzen wir, daß es eine Umgebung $\tilde{W}$ von $\mathcal{O}_v$ gibt, so daß zu jedem $w \in \tilde{W}$ ein eindeutig bestimmtes $\tilde{v} \in \mathcal{O}_v$ gibt, so daß $|w - \tilde{v}|$ minimal ist. (Warum gibt es so eine Umgebung?) Sei $R(w) = x$, wobei x der eindeutig bestimmte Punkt auf $\mathcal{O}_v$ ist, der w am nächsten liegt. Offensichtlich ist R stetig.
Sei für genügend kleines $\varepsilon > 0$

$$W = \{y \in \tilde{W} \mid |R(y) - y| < \varepsilon\}.$$

Da G orthogonal operiert ist

$$|R(\rho(g)w) - \rho(g)w| = |R(w) - w| \;\forall w \in W. \tag{1.5.6}$$

Also ist W invariant. Aus Gleichung (1.5.6) folgt auch

$$R(\rho(g)w) = \rho(g)R(w). \tag{1.5.7}$$

Für $y \in \mathcal{O}_v$ sei

$$S_y = \{w \in W \mid R(w) = y\}.$$

Man kann nun W sowohl als Vereinigung aller S_y, $y \in \mathcal{O}_v$ schreiben, wie auch als Vereinigung aller Orbits $\mathcal{O}_w$ mit $w \in S_v$. Aus Gleichung (1.5.7) folgt nun, daß die Umgebung eines jeden Punktes $\tilde{v} \in \mathcal{O}_v$ nur Punkte w enthält deren Isotropieuntergruppe $\mathrm{Stab}(w)$ bis auf Konjugation eine Untergruppe von $\mathrm{Stab}(v)$ ist. Wir überprüfen dies: sei $w \in W$, dann ist die Isotropieuntergruppe von $R(w)$ konjugiert zu $\mathrm{Stab}(v)$, da $R(w) \in \mathcal{O}_v$ ist. Es ist aber $\mathrm{Stab}(w) \subset \mathrm{Stab}(R(w))$, denn für jedes $h \in Stab(w)$ gilt

$$hR(w) = R(hw) = w.$$

Daher ist $h \in \mathrm{Stab}(R(w))$. Für den Rest des Beweises führen wir eine Induktion durch, wobei wir statt

$$G \text{ zusammenhängend} \Longrightarrow P_G \text{ ist zusammenhängend}$$

die stärkere Behauptung

$$o(P_G) \subset V/G \text{ ist zusammenhängend}$$

beweisen.
Zunächst zeigen wir, daß aus $o(P_G)$ ist zusammenhängend folgt, daß für zusammenhängendes G auch P_G zusammenhängend ist. Angenommen $x, y \in P_G$ liegen in verschiedenen Komponenten: ist $o(x) = o(y)$, so sind beide auf einem Orbit, der zusammenhängend ist, da jeder Orbit ein homöomorphes Bild von G ist. Damit hat man einen Widerspruch. Ist $o(x) \neq o(y)$, so kann man einen Weg $\gamma \subset P_G$ finden, welcher $o(x)$ mit $o(y)$ verbindet. $o^{-1}(\gamma)$ ist zusammenhängend (klar!) und damit auch P_G.
Induktion über $\dim V$: (unabhängig von G)

$\dim V = 1$: alle orthogonalen Darstellungen sind $x \mapsto x, x \mapsto -x$. Es gibt zwei Orbittypen $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_x, x \neq 0$. Die Menge der Punkte mit minimaler Isotropie $P_G = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$ ist dicht und $o(P_G)$ ist dicht in $\mathbb{R}/G$ und $o(P_G) \subset \mathbb{R}/G$ ist zusammenhängend
Annahme: Die Behauptungen sind für $\dim V \leq n$ gezeigt.
Sei $\dim V = n+1$. Dann hat die Sphäre S^n die Dimension n. Zu jedem Orbittyp in V gibt es einen Orbit gleichen Typs auf S^n. Ist die Menge der Punkte prinzipalen Typs auf S^n zusammenhängend, so gilt dies auch für V. Zu jedem Punkt $x \in S^n$ operiert die Isotropieuntergruppe $\mathrm{Stab}(x)$ auf einer Umgebung U_x. Dies führt direkt zu einer Aktion auf dem Tangentialraum an T_xS^n. Wegen der Induktionsvoraussetzung hat die Darstellung von $\mathrm{Stab}(x)$ auf T_xS^n nur endlich viele Isotropietypen, die Punkte minimaler Isotropie liegen dicht und $o(P_G)$ ist zusammenhängend. Lokal ist diese Darstellung mittels eines Diffeomorhismus äquivalent zur Einschränkung der ursprünglichen Darstellung auf die Sphäre, d.h. auf die Umgebung U_x. Die Menge aller U_x bildet eine offene Überdeckung der Sphäre, damit gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Die Anzahl der Isotropietypen ist daher endlich. In allen U_x ist der minimale Isotropietyp gleich. Sch neiden sich nämlich $U_x \cap U_y$, so ist der minimale Isotropietyp beider Aktionen dicht im Schnitt und minimal, also gleich. Angenommen $o(S^n/G)$ ist nicht zusammenhängend, so gibt es eine stetige Funktion $f : S^n/G \to [0,1]$ auf S^n/G, welche auf $o(P_G)$ nicht konstant ist, und dort nur die Werte 0 und 1 annimmt. Sei $P_0 \subset o(P_G)$ die Menge der Punkte wo f verschwindet und entsprechend $P_1 \subset P_G$ die Menge der Punkte an denen f den Wert 1 annimmt. Dann ist

$$o(S^n) \subset \overline{P_0} \cup \overline{P_1},$$

da P_G dicht ist. Sind P_0 und P_1 beide nichtleer, so ist dies ein Widerspruch zum Zusamenhang von $o(S^n)$. □

In den Übungen zeigen wir, daß S_x unter der Aktion von $\mathrm{Stab}(x)$ invariant ist, und daß die Aktion von $\mathrm{Stab}(x)$ auf S_x durch einen Diffeomorphismus Ψ zur Darstellung von $\mathrm{Stab}(x)$ auf $N_x\mathcal{O}_x \subset TS^n$ abgebildet wird, wobei folgendes gilt:

(i) $N_x\mathcal{O}_x$ ist ein linearer Unterraum von V definiert durch $N_x\mathcal{O}_x \perp T_x\mathcal{O}_x$.

(ii) $N_x\mathcal{O}_x$ ist invariant unter der Einschränkung von ρ auf $\mathrm{Stab}(x)$. Damit besitzt $\mathrm{Stab}(x)$ eine natürliche Darstellung auf $N_x\mathcal{O}_x$.

Definition 1.5.35 *Der minimale Orbittyp heißt prinzipaler Orbittyp. Die Isotropiegruppe eines Punktes $v \in P_G(V)$ nennt man prinzipale Isotropiegruppe. (*In der älteren deutschen Literatur werden häufig die Begriffe Standgruppe für Isotropieuntergruppe und Hauptstandgruppe für prinzipale Isotropiegruppe benutzt*)*

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Beispielen der die wesentlichen Begriffe nochmals erläutern.

Beispiel 1.5.36 *Sei V_5 der Raum aller symmetrischen 3×3-Matrizen mit Spur 0, also*

$$V_5 = \{L \in M_3 \mid L^T = L, \operatorname{tr}(L) = 0\}.$$

Wir definieren eine Aktion von $SO(3)$ auf V_5 durch

$$SO(3) \times V_5 \to V_5 : \ (A, L) \mapsto ALA^{-1}.$$

Dies definiert offensichtlich eine Gruppenaktion von $SO(3)$ auf V_5. Diese induziert eine Darstellung, denn die Abbildung

$$\tau_A : V_5 \to V_5 : L \mapsto ALA^{-1}$$

ist linear und stetig in L. Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß jeder Orbit die Menge D der Diagonalmatrizen trifft. (Dies ist dort so formuliert, daß jede symmetrische Matrix diagonalisiert werden kann.) Sei D_0 die Menge der spurlosen Diagonalmatrizen. Diese kann wie folgt parametrisiert werden:

$$D_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \ \middle| \ d_1, \ d_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Isotropieuntergruppen kann man also bis auf Konjugation dadurch bestimmen, daß man die Isotropieuntergruppen von spurlosen Diagonalmatrizen bestimmt. Man unterscheidet die folgenden Fälle. Sind alle drei Einträge in einer Diagonalmatrix verschieden, so ist die Isotropieuntergruppe D_2, bestehend aus den vier Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.5.8}$$

Dies nachzuprüfen ist eine längere aber elementare Rechnung. Sind zwei Einträge in einer solchen Diagonalmatrix gleich, o.B.d.A. $d_1 = d_2$, so ist die Isotropieuntergruppe isomorph zu $\mathbf{O}(2)$, hier also

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \mid A \in \mathbf{O}(2) \right\}.$$

Sind alle drei Einträge gleich, so ist dies die Nullmatrix und die Isotropieuntergruppe ist $\mathbf{SO}(3)$.
Man hat hier ein Beispiel wo Orbits unterschiedlichen Typs auftreten (d.h. die Aktion ist nicht monotypisch). Es gibt sogar Orbits unterschiedlicher Dimension, denn der Orbit $\mathcal{O}_v$ eines Punktes v mit Isotropie D_2 hat die Dimension

$$\dim \mathcal{O}_v = \dim \mathbf{SO}(3) - \dim Stab(v) = 3 - 0 = 3.$$

Im Gegensatz dazu hat der Orbit $\mathcal{O}_v$ *eines Punktes mit Isotropie* $\mathbf{O}(2)$ *die Dimension*

$$\dim \mathcal{O}_v = 3 - 1 = 2.$$

Der Ursprung hat Isotropie $\mathbf{SO}(3)$ *und damit ist der Orbit, wie erwartet, 0 dimensional. Wir wollen mit der Spurformel die Dimension des Fixpunktraumes von* D_2 *ausrechnen: Jede nichttriviale Matrix in (1.5.8) hat einen dreidimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1 und einen zweidimensionalen zum Eigenwert -1. Die Spur jedes* $\rho(g)$ *für nichttriviale* g *ist damit 1,* $\mathrm{tr}(\rho(\mathbb{1})) = 5$ *und die Spurformel liefert*

$$\dim \mathrm{Fix}(D_2) = \frac{1}{4}(5+1+1+1) = 2.$$

Da man leicht nachrechnet, daß jedes Element in D_0 *unter* D_2 *fest bleibt, ergibt sich* $\mathrm{Fix}(D_2) = D_0$. *Also hat jedes Element eine Isotropiegruppe, die eine zu* D_2*, wie in (1.5.8) angegeben, konjugierte Untergruppe besitzt. Es gibt also keinen Punkt mit trivialer Isotropie. Bevor wir im nächsten Satz solche Fragen weiter untersuchen, wollen wir noch* $\dim \mathrm{Fix}(\mathbf{SO}(2))$ *ausrechnen. Die Gruppe* $\mathbf{SO}(2)$ *ist gegeben durch*

$$\mathbf{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Aktion auf V_5 *hat folgende Form,*

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & a & b \\ a & d_2 & c \\ b & c & -d_1 - d_2 \end{pmatrix}$$

wird abgebildet auf ($c_\alpha = \cos\alpha, \ s_\alpha = \sin\alpha$*)*

$$\begin{pmatrix} d_1 c_\alpha^2 - 2a s_\alpha c_\alpha + d_2 s_\alpha^2 & (d_1 - d_2) s_\alpha c_\alpha + a(c_\alpha^2 - s_\alpha^2) & b c_\alpha - c s_\alpha \\ (d_1 - d_2) s_\alpha c_\alpha + a(c_\alpha^2 - s_\alpha^2) & d_1 s_\alpha^2 + 2a s_\alpha c_\alpha + d_2 c_\alpha^2 & b s_\alpha + c c_\alpha \\ b c_\alpha - c s_\alpha & b s_\alpha + c c_\alpha & -d_1 - d_2 \end{pmatrix}.$$

Daran sieht man, daß mit $d_1 = d_2$ *ein eindimensionaler Unterraum zum Eigenwert 1 existiert. Im Raum* $d_1 = d_2 = a = 0$ *wirkt dies wie eine Drehung um den Winkel* α *im Raum* $d_1 = -d_2, b = c = 0$ *wie eine Drehung um* 2α*. Als Spur erhält man* $1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha$*. Integration ergibt*

$$\dim \mathrm{Fix}(\mathbf{SO}(2)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha) d\alpha = 1.$$

Beispiel 1.5.37 *Wir erinnern uns, daß die Ikosaedergruppe isomorph zur alternierenden Gruppe* A_5 *ist. Für diese konstruieren wir eine vierdimensionale irreduzible Darstellung und untersuchen diese auf ihre Orbits und Orbittypen. Als Bezeichnungen für Untergruppen wählen wir die geometrischen, die von der Aktion der Ikosaedergruppe* *herrühren. Zunächst operiert die symmetrische Gruppe* S_5 *auf dem* $\mathbb{R}^5$ *durch Permutation der Einheitsvektoren (Standardbasisvektoren), welche wir mit* $e_1 \ldots, e_5$ *bezeichnen. Diese Aktion von* S_5 *hat den Raum*

$$W = \{\lambda \sum_{i=1}^{5} e_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

als eindimensionalen Fixraum. Insbesondere ist W *invariant, wegen der Orthogonalität der Aktion ist der Raum* $V = W^{\perp}$ *ebenfalls invariant. Wir betrachten die Einschränkung der Darstellung von* S_5 *auf* V *als Darstellung* ρ.

Zunächst stellen wir fest, daß ρ *irreduzibel ist, denn eine Darstellung ist irreduzibel genau dann, wenn* $(\chi|\chi) = 1$. *Man rechnet nach, daß dies für* ρ *gilt. Als Isotropieuntergruppen kommen die Untergruppen von* $\mathbb{I}$ *in Frage, also* $\mathbb{T}, D_5, \mathbb{Z}_5, D_3, \mathbb{Z}_3, D_2, \mathbb{Z}_2$ *und* $\mathbb{1}$ *sind mögliche Isotropieuntergruppen. Die Dimensionen der Fixräume erhält man aus der Spurformel. Man beachte, daß je zwei Gruppen isomorph zu* $D_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$ *konjugiert sind. Dies folgt aus den Sylow*[16]*–Sätzen. Daher kann man zur Berechnung der Dimension der Fixräume ein Element der jeweiligen Konjugationsklasse heranziehen. Bei der Aktion auf* $\mathbb{R}^5$ *ergibt sich für eine nichttriviales Element von* $\mathbb{Z}_2$ *die Spur* 1, *für ein nichttriviales Element von* $\mathbb{Z}_3$ *die Spur* 2, *und entsprechend für ein Element der Ordnung* 5 *die Spur* 0. *Die Restriktion auf* V *vermindert jeweils die Spur um* 1, *also ergibt sich*

Γ	$\dim \mathrm{Fix}(\Gamma)$
$\mathbb{Z}_2$	2
D_2	1
$\mathbb{Z}_3$	2
D_3	1
$\mathbb{Z}_5$	0
D_5	0
$\mathbb{T}$	1.

Wählen wir als $\mathbb{Z}_2$ *die Gruppe die von den Permutation* (12)(34) *erzeugt wird, so ist der Fixraum gegeben durch*

$$\mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2) = \{\lambda(e_1 + e_2) + \mu(e_3 + e_4) - 2(\lambda + \mu)e_5 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Der Fixraum von $D_2 = \{\mathbb{1}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ *ist dann der Unterrraum definiert durch* $\lambda = \mu$. *Da* $D_2 \subset T$ *und* $\dim \mathrm{Fix}(\mathbb{T}) = 1$ *ist die* $\mathrm{Fix}(\mathbb{T}) = \mathrm{Fix}(D_2)$. D_2 *ist keine Isotropieuntergruppe, denn es ist nicht der Stabilisator eines Elementes.*

Wählt man $\mathbb{Z}_3$ *als von der Permutation* (123) *erzeugt, so ist*

$$\mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_3) = \{\lambda(e_1 + e_2 + e_3 - \frac{3}{2}(e_4 + e_5)) + \mu((e_1 + \ldots + e_4) - 4e_5) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

[16]Peter Ludwig Mejdell Sylow, 12.12.1832-7.9.1918 norwegischer Mathematiker, arbeitete über Gruppentheorie. Wichtige Beiträge zur Strukturtheorie endlicher Gruppen.

Dann ist die Gruppe $D_3 \supset \mathbb{Z}_3$ *eindeutig bestimmt, der Fixraum ist gegeben durch*

$$\mathrm{Fix}(D_3) = \{\lambda(e_1 + e_2 + e_3 - \frac{3}{2}(e_4 + e_5)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Das folgende Diagramm zeigt die partiell geordnete Menge (Poset=partial ordered set) der Konjugationsklassen von Isotropieuntergruppen von $\mathbb{I}$ *für die vierdimensionale irreduzible Darstellung. Die bei jeder Klasse angegebene Zahl gibt die Dimension des jeweiligen Fixpunktraumes.*

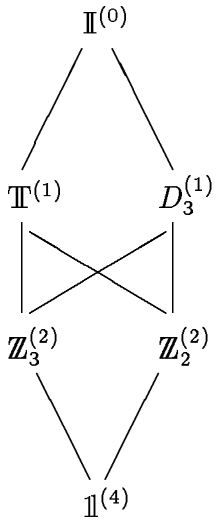

Abbildung 1.1: Das Poset von Konjugationsklassen von Isotropieuntergruppen der Ikosaedergruppe für die vierdimensionale irreduzible Darstellung. Linien bedeuten enthalten sein bis auf Kojugation, die Ziffern geben die Dimension des Fixraumes an. WARNUNG: Die Untergruppenrelationen lassen sich i.A. nicht durch eine feste Wahl von Untergruppen realisieren!

1.6 Invariante Funktionen und äquivariante Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir die wesentlichen Eigenschaften invarianter Funktionen und äquivarianter Abbildungen untersuchen. Dies führt in kanonischer Weise zu Reduktionsprinzipien bei äquivarianten Vektorfeldern. Zunächst gilt es allerdings einige algebraische Aspekte zu untersuchen. Wir beschränken uns auf Darstellungen von Gruppen, vieles würde auch allgmeiner richtig sein.

Definition 1.6.1 *Es sei G eine kompakte Lie Gruppe, $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ eine reelle oder komplexe Darstellung. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ (oder $f : V \to \mathbb{C}$) heißt invariant oder auch G–invariant, falls $f(\rho(g)x) = f(x)$ für alle $x \in V$ und für alle $g \in G$ gilt.*

Wir interessieren uns ausschließlich für glatte, invariante Funktionen.

Definition 1.6.2 *(i) Die Menge der G–invarianten Funktionen in $C^\infty(V, \mathbb{R})$ (oder $C^\infty(V, \mathbb{C})$) wird mit $C^\infty_G(V, \mathbb{R})$ (oder $C^\infty_G(V, \mathbb{C})$) bezeichnet.*

(ii) Die Menge der Polynome $p : V \to \mathbb{R}$ ($p : V \to \mathbb{C}$) sei $P(V)$. Entsprechend ist $P_G(V)$ die Menge der G-invarianten Polynome.

(iii) Mit $P^N(V)$ bezeichnen wir die homogenen Polynome vom Grad N, und natürlich bezeichnet dann $P^N_G(V)$ die homogenen, invarianten Polynome vom Grad N.

Dem Nullpolynom wird kein Grad zugewiesen, damit sind die Räume $P^N_G(V)$ Vektorräume über dem entsprechenden Körper. Wir erinnern kurz an die Definition eines Ringes in der Algebra. Eine Menge $(R, +, \times)$ mit zwei Verknüpfungen heißt Ring, wenn sie bezüglich der ersten Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist, und bezüglich der zweiten Verknüpfung Assoziativgesetz und Distributivgesetze gelten.

Definition 1.6.3 *Ein Ring R heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $\{r_1, \ldots, r_k\} \subset R$ gibt, so daß jedes $r \in R$ sich als Summe von Produkten der r_j schreiben läßt. Entsprechend heißt eine reelle oder komplexe Algebra A endlich erzeugt, wenn es eine endliche Teilmenge $F \subset A$ gibt, so daß die kleinste Algebra welche F umfaßt A ist.*

Die nichttriviale Aussage des nächsten Satzes geht auf Hilbert zurück.

Satz 1.6.4 *Die Räume $C^\infty_G(V, \mathbb{R})$, $P_G(V)$ sind Algebren über $\mathbb{R}$, als solche sind sie endlich erzeugt. Die Aussage gilt auch im Komplexen.*

Beweis: Beide sind offensichtlich sowohl Ring wie auch reeller Vektorraum. Die einzig nichttriviale Aussage ist die, daß $P_G(V)$ endlich erzeugt ist. Wir zeigen dies durch eine Reihe von Lemmata. Wir beschränken uns auf den reellen Fall.

Lemma 1.6.5 *Sind $p_1, \ldots, p_r$ G–invariante Polynome, dann gilt*

$$P_G(V) \cap \sum_{i=1}^r P(V)p_i = \sum_{i=1}^r P_G(V)p_i.$$

Beweis: Sei $p = \sum_{i=1}^r h_i p_i, \;\; h_i \in P(V)$. Dann ist

$$p(x) = \int_G p(gx)d\mu(g) = \sum_{i=1}^r \int_G h_i(gx)d\mu(g)p_i.$$

Aufgrund der Konstruktion sind die Koeffizienten

$$\int_G h_i(gx)d\mu(g)$$

invariant. □

Lemma 1.6.6 *Sei A eine gradierte $\mathbb{R}$–Algebra, d.h. $A = \oplus_{j\in\mathbb{N}} A_j$ und $A_iA_j \subset A_{i+j}$ mit $A_0 = \mathbb{R}$. A_+ sei das Ideal der Elemente positiven Grades, also*

$$A_+ = \oplus_{j>0} A_j.$$

A_+ ist ein Modul über A. Ist dieser Modul endlich erzeugt, so gilt dies auch für A, als $\mathbb{R}$–Algebra.

Beweis: Seien a_i $i = 1, \ldots, s$ Erzeuger von A_+ als A–Modul. O.B.d.A. sind diese homogen, d.h. $a_j \in A_{k(j)}$ für alle j. A wird nun auch von den a_j als $\mathbb{R}$–Algebra erzeugt. Wir zeigen per Induktion, daß jedes A_j im Erzeugnis der a_j liegt. Für dieses Erzeugnis schreiben wir $\mathbb{R}[a_1, \ldots, a_s]$. Angenommen $A_j \subset \mathbb{R}[a_1, \ldots, a_s]$ für alle $j \leq k$. Sei $\beta \in A_{k+1}$. Dann hat β die Darstellung

$$\beta = \sum_i \ell_i a_i, \;\; \ell_i \in A.$$

Wiederum dürfen wir o.E. annehmen, daß alle ℓ_i homogen sind. Also gilt (für alle $\ell_i \neq 0$)

$$\operatorname{grad} \beta = \operatorname{grad} \ell_i + \operatorname{grad} a_i.$$

Also ist

$$\operatorname{grad} \ell_i < \operatorname{grad} \beta = k + 1$$

und damit ist nach Induktionsannahme $\ell_i \in \mathbb{R}[a_1, \ldots, a_s]$. □

Lemma 1.6.7 (Hilbert) *Ein Polynomring $R[x]$ über einem noetherschen[17] Ring R ist noethersch.*

[17]nach Emmy Noether am 23.3.1882 in Erlangen geboren, gestorben 14.4.1935, ihre Karriere wurde durch die Nichtgleichstellung von Frauen behindert. Selbst Hilbert konnte ihre Habilitation zunächst nicht durchsetzen. Wie viele ihrer Zeit wurde sie von den Faschisten vertrieben. Sie schrieb nicht nur bedeutende Arbeiten, sondern setzte auch Akzente beim Übergang zu abstraktem Denken und axiomatischen Methoden.

Wir erinnern zunächst an die Definition eines noetherschen Ringes: ein Ring heißt noethersch, wenn jede aufsteigende Folge von Idealen stationär wird. Dies ist gleichbedeutend damit, daß jedes Ideal endlich erzeugt ist.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ ein Ideal in $R[x]$. Sei $\mathcal{A}_i$ das Ideal der Elemente in R, welche bei einem Polynom vom Grad i in $\mathcal{A}$ als führender Koeffizient auftreten. Die Folge der $\mathcal{A}_i$ ist aufsteigend. (Multiplikation mit x!) Diese Folge wird stationär, daher gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_r = \mathcal{A}_{r+1} = \ldots .$$

Seien $a_{01}, \ldots, a_{0j_0}$ Erzeuger von $\mathcal{A}_0$ und entsprechend $a_{r0}, \ldots, a_{rj_r}$ die Erzeuger von $\mathcal{A}_r$. Nun sei für $i = 1, \ldots r$ und $j \leq j_i$ f_{ij} ein Polynom vom Grad i mit führendem Koeffizienten a_{ij}. Wir behaupten nun $F = \{f_{ij} \mid 1 \leq i \leq r, j \leq j_i\}$ ist ein Erzeugendensystem für $\mathcal{A}$.

Dazu sei f ein Polynom vom Grad d in $\mathcal{A}$. Der Beweis nutzt eine Induktion über d. Sei $d \geq 0$. Ist $d > r$, so erzeugen die führenden Koeffizienten von

$$x^{d-r} f_{r1}, \ldots, x^{d-r} f_{rj_r}$$

$\mathcal{A}_d$. Daher existieren $c_1, \ldots, c_{j_r} \in R$ mit

$$f - c_1 x^{d-r} f_{r1} - \ldots - c_{j_r} x^{d-r} f_{rj_r}$$

ist vom Grad kleiner d und liegt in $\mathcal{A}$. Im Fall $d \leq r$ betrachten wir

$$f - c_1 f_{d1} - \ldots - c_{j_d} f_{dj_d}$$

um ein Polynom vom Grad kleiner d zu erhalten. Das Polynom, das wir abgezogen haben liegt im Erzeugnis der f_{ij}. Wegen der Induktionsannahme, ist die Differenz ebenfalls im diesem Erzeugnis und der Beweis ist erbracht. $\square$

Korollar 1.6.8 *Ist R noetherscher Ring und $R[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynomring, so ist dieser noethersch.*

Beweis: Folgt sofort aus dem Lemma durch Induktion über n. $\square$

.

Beweis von Satz 1.6.4: Der Ring $P_G^+(V)$ der invarianten Funktionen positiven Grades erzeugt ein Ideal $P(V)P_G^+(V)$ von $P(V)$. Dieses Ideal ist endlich erzeugt, d.h. es gibt endlich viele Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_r \subset P_G^+(V)$, so daß

$$P(V)\{\pi_1, \ldots, \pi_r\} = P(V)P_G^+(V)$$

ist. Man beachte, daß zunächst nur die Existenz einer endlichen Menge $\{p_i\pi_1\}_{i=1}^r$ mit $p_i \in P(V)$, $\pi_i \in P_G^+(V)$ folgt, welche das Ideal $P(V)P_G^+(V)$ erzeugt. Dann ist aber das Erzeugnis der $\pi_1, \ldots, \pi_r$ gleich dem Erzeugnis von $\{p_i\pi_1\}_{i=1}^r$. Nach Lemma 1.6.5 erzeugen die Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_r$ die Menge $\mathbb{P}_G^+(V)$ als $P_G(V)$–Modul. Damit ist sie aber nach Lemma 1.6.6 eine endlich erzeugte $\mathbb{R}$-Algebra. $\square$

Definition 1.6.9 *Sei G eine kompakte Lie Gruppe und $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ eine Darstellung. Wir bezeichnen die minimale Anzahl von Erzeugern von $P_G(V)$ mit $j(\rho)$. Ferner seien $\pi_1, \ldots, \pi_{j(\rho)}$ ein minimales Erzeugendensystem. Dann nennen wir die Abbildung*

$$\mathcal{H} : V \to \mathbb{R}^{j(\rho)} : x \mapsto (\pi_1(x), \ldots, \pi_{j(\rho)}(x))$$

die Hilbertabbildung zu ρ.

Satz 1.6.10 *Die Hilbertabbildung $\mathcal{H}$*

(i) ist eigentlich, d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt,

(ii) separiert Orbits,

(iii) und macht das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\mathcal{H}"] \arrow[dr, "o"'] & & \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{j(\rho)} \\ & \mathbb{R}^n/G \arrow[ur, "\mathcal{H}'"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\mathcal{H}'$ eine Homöomorphismus.

Eigenschaft (ii) bedeutet, daß $\mathcal{H}$ auf verschiedenen Orbits verschiedene Werte annimmt.

Beweis: Um den ersten Teil zu beweisen, zeigen wir, daß $x_n \to \infty$ impliziert, daß $\mathcal{H}(x_n) \to \infty$. Da die Norm zu einem G-invariantem Skalarprodukt invariant ist, gilt $|x|^2 = P(\pi_1(x), \ldots, \pi_{j(\rho)}(x))$. Damit folgt die Behauptung. Für den zweiten Teil reicht es zu zeigen, daß es zu je zwei Orbits $\mathcal{O}(x_1)$, $\mathcal{O}(x_2)$ eine invariante Funktionen π gibt mit $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$. Dazu gibt man sich eine stetige Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ vor, welche auf einer Umgebung U_1 von $\mathcal{O}(x_1)$ den Wert 0 annimmt, auf einer Umgebung $U_2(\mathcal{O}(x_2))$ gleich 1 ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom p_ε, nach dem Approximationssatz von Weierstraß, so daß auf jedem Kompaktum gilt

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Setze

$$p_\varepsilon^G(x) = \int_G p_\varepsilon(gx)d\mu(g).$$

Dann ist p_ε^G invariant und ein Polynom, ersteres folgt aus der Invarianz des Maßes, zweiteres aus folgender Überlegung: sei p ein Polynom, so ist p^g, definiert durch

$$p^g(x) = p(\rho(g)x)$$

ein Polynom gleichen Grades mit Koefizienten $a_j(g)$, welche von g abhängen. Nun ist p^G das Polynom, welches man durch Integration der Koeffizienten erhält, also

$$p^G(x) = \sum_j a_j x^j = \sum_j \int_G a_j(g)d\mu(g)x^j.$$

Damit erhält man für $\varepsilon < 1/2$

$$p_\varepsilon^G(x_2) > 1 - \varepsilon > \varepsilon > p_\varepsilon^G(x_1).$$

Würde nun $\mathcal{H}$ die Orbits nicht trennen, so hätten alle invarianten Polynome auf x_1 und x_2 den gleichen Wert. Die dritte Aussage ist klar, $\mathcal{H}'$ ist offenkundig eine stetige Bijektion. Die Stetigkeit der Inversen überlegt man sich leicht. Damit ist der Satz gezeigt. □

Bemerkung 1.6.11 *Die Abbildung $\pi_1 : V \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|^2$ ist immer eine Invariante, wenn man das Skalarprodukt G–invariant wählt. Im folgenden Beispiel sehen wir, daß dies auch die einzige Invariante sein kann.*

Beispiel 1.6.12 *(i) Sei $G = \mathbb{Z}_2$. Die einzige irreduzible Darstellung dieser Gruppe ist die auf $\mathbb{R}$ mit der Standardaktion. Man hat die Äquivalenz*

$$p \in P(\mathbb{R}) \text{ ist invariant} \iff p \text{ ist gerade} \iff P = \sum_j a_j x^{2j}.$$

π_1 ist die einzige Invariante und $\mathcal{H} : \mathbb{R} \to \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$. Daran sieht man schon, daß der Orbitraum i.A. keine glatte Mannigfaltigkeit ist. Der Rand wird hier von Punkten nichtprinzipaler Isotropie gebildet.

(ii) Als zweites Beispiel betrachten wir die kanonische Aktion von D_3 auf $\mathbb{R}^2$. Ein Polynom von $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ schreiben wir als $p(x,y)$ und in komplexer Schreibweise

$$p(x,y) = \tilde{p}(z,\overline{z}) = \sum_{j,k} a_{jk} z^j \overline{z}^k. \tag{1.6.9}$$

Eine Einschränkung für die Koeffizienten ergibt sich daraus, daß wir reelle Polynome betrachten. Die Bedingung in der Darstellung 1.6.9 lautet

$$a_{jk} = \overline{a_{kj}}.$$

In komplexer Schreibweise lautet die Aktion des erzeugenden Elementes von $\mathbb{Z}_3$

$$z \mapsto e^{2\pi i/3} z.$$

Die Spiegelung operiert durch

$$z \mapsto \overline{z}.$$

Damit wird aus einem Monom $z^j \overline{z}^k$

$$e^{\frac{2(j-k)\pi i}{3}} z^j \overline{z}^k.$$

Dies ist damit invariant genau dann, wenn $j - k \in 3\mathbb{Z}$ ist. Man erhält als erzeugende Polynome $z\overline{z}$ und $z^3 + \overline{z}^3$, also $|z|^2$ und $\mathrm{Re} z^3$. Damit ist die Hilbertabbildung für diese Darstellung gegeben durch

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^3 - 3xy^2 \end{pmatrix}.$$

Das Bild von $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ kann man folgendermaßen charakterisieren. Bezeichnet man die Koordinaten im Bildraum mit π_1, π_2, so ist

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^2) = \{(\pi_1, \pi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi_1^3 - \pi_2^2 \geq 0\}.$$

Die Punkte, welcher unter $\mathcal{H}$ auf den Rand (ohne (0,0)) abgebildet werden, haben Isotropie $\mathbb{Z}_2$, die Punkte im Inneren haben triviale und damit prinzipale Isotropie. $\mathcal{H}^{-1}(0,0) = (0,0)$ hat Isotropie D_3.

$\mathcal{H}$ induziert eine Abbildung

$$\mathcal{H}^* : P(\mathbb{R}^{j(\rho)}) \to P^G(V) : p \mapsto p \circ H. \tag{1.6.10}$$

Diese Abbildung kann von den Polynomen fortgesetzt werden auf C^∞–Funktionen. Man hat also die Abbildung

$$\mathcal{H}^* : C^\infty(\mathbb{R}^{j(\rho)}, \mathbb{R}) \to C^\infty_G(V, \mathbb{R}) : f \mapsto f \circ H. \tag{1.6.11}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv. Versieht man die Räume mit der entsprechenden Topologie, so ist die Abbildung auch stetig. Ein nichttriviales Resultat ist der folgende Satz.

Satz 1.6.13 (Schwarz) [18] *Die Abbildung in (1.6.11) ist surjektiv.*

Beweis: s. G. Schwarz: Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group, Topology 14(1975), 63–68. □

Definition 1.6.14 *Seien $\rho_{1,2} : G \to \mathbf{GL}(V_{1,2})$ Darstellungen einer kompakten Lie–Gruppe G.*

(i) Die polynomialen Abbildungen $V_1 \to V_2$ werden mit $P(V_1, V_2)$ bezeichnet. Entsprechend steht $C^\infty(V_1, V_2)$ für die Menge der glatten Abbildungen $V_1 \to V_2$.

(ii) Eine Abbildung $F \in C^\infty(V_1, V_2)$ ($F \in P(V_1, V_2)$) heißt äquivariant, falls für alle $x \in V$ und alle $g \in G$ gilt

$$F(\rho_1(g)x) = \rho_2(g)F(x). \tag{1.6.12}$$

(iii) Die Menge der glatten, äquivarianten Abbildungen werden wir mit $C^\infty_G(V_1, V_2)$ bezeichnen und entsprechend mit $P_G(V_1, V_2)$ die Menge der polynomialen, äquivarianten Abbildungen von $V_1 \to V_2$.

Meistens werden wir nur den Fall $\rho_1 = \rho_2$ brauchen, obwohl auch der allgemeine Fall in natürlicher Weise auftritt.

[18] Gerald Schwarz, zeitgenössischer, amerikanischer Mathematiker

Satz 1.6.15 *(i) $P_G(V_1, V_2)$ ist ein Modul über dem Ring $P_G(V_1)$.*

(ii) $C_G^\infty(V_1, V_2)$ ist ein Modul über $C_G^\infty(V_1, \mathbb{R})$.

(iii) $P_G(V_1, V_1)$ ist endlich erzeugt.

(iv) $C_G^\infty(V_1, V_2)$ ist über $C_G^\infty(V_1, \mathbb{R})$ endlich erzeugt.

Beweis: Die beiden ersten Aussagen sind trivial. Wir kommen zur dritten Aussage. Wir führen diese Aussage auf die entsprechende Aussage über die Endlichkeit von erzeugenden Systemen für die Invarianten zurück. Sei $< .,. >$ ein G–invariantes Skalarprodukt auf V_2. Für eine G-äquivariante Abbildung $H : V_1 \to V_2$ betrachten wir die Abbildung

$$\pi_H : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto < H(x), y > .$$

Die Abbildung π_H ist G–invariant, denn

$$\pi_H(gx, gy) =< H(gx), gy >=< gH(x), gy >=< H(x), y >= \pi_H(x, y).$$

Andrerseits gewinnen wir H aus π_H, indem wir die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial y}\pi_H(x, 0)$$

betrachten. Dies stellt ein Element in V_2^* dar. Ist $v \in V_2^*$, so schreiben wir v^* für den Vektor in V_2 der mittels $< .,. >$ mit v identifiziert wird. Der dem Element $\frac{\partial}{\partial y}\pi_H(x, 0)$ in V_2 zugeordnete Vektor ist gerade $H(x)$. Allgemeiner gilt

$$\tilde{F}_\pi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\pi(x, 0)\right)^*$$

ist für jede invariante Abbildung $\pi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ äquivariant. Wir prüfen dies nach: sei also $\pi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ invariant. Dann ist $\tilde{F}_\pi(x) : V_2 \to \mathbb{R}$ für festes $x \in V_1$ ein stetiges, lineares Funktional das mittels des invarianten Skalarproduktes mit einem Vektor $F_\pi(x) \in V_2$ identifiziert wird. Wegen $\pi(\rho_1(g)x, \rho_2(g)y) = \pi(x, y)$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial y}\pi(\rho_1(g)x, 0)\rho_2(g) = \frac{\partial}{\partial y}\pi(x, 0),$$

wobei die Gleichheit als Gleichheit lineare Funktionale aufzufassen ist. Also gilt für jedes $h \in V_2$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_\pi(\rho_1(g)x)\rho_2(g)h &= \tilde{F}_\pi(x)h \\
< F_\pi(\rho_1(g)x), \rho_2(g)h > &= < F_\pi(x), h > \\
< \rho_2(g)^{-1}F_\pi(\rho_1(g)x), h > &= < F_\pi(x), h > .
\end{aligned}$$

Da $h \in V_2$ beliebig ist, folgt damit

$$F_\pi(\rho_1(g)x)) = \rho_2(g)F_\pi(x).$$

Nach Satz 1.6.4 ist der Ring der Invarianten $P_G(V_1 \times V_2)$ endlich erzeugt.

Sei $\pi_1(x,y),\ldots,\pi_s(x,y)$ ein System von Erzeugenden. Damit hat jede invariante Funktion die Gestalt

$$f(\pi_1,\ldots,\pi_s).$$

Unsere obige Konstruktion liefert daraus die äquivariante Abbildung

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial \pi_j}(\pi_1(x,0),\ldots,\pi_s(x,0))(\frac{\partial}{\partial y}\pi_j(x,0))^*.$$

Die Koeffizienten $\frac{\partial f}{\partial \pi_j}(\pi_1(x,0),\ldots,\pi_s(x,0))$ sind invariante Funktionen auf V_1. Nach unserer Vorüberlegung kommen alle äquivarianten Abbildungen vor, denn alle invarianten Funktionen von der Gestalt π_H sind im Erzeugnis der π_j. Dies beweist den polynomialen Fall. Der C^∞–Fall ist sehr ähnlich nur muß der Endlichkeitssatz von Schwarz an der entsprechenden Stelle verwendet werden. □

Wir fassen zusammen: der Ring der äquivarianten Abbildungen (polynomial oder C^∞) ist endlich erzeugt, der Modul der äquivarianten Abbildungen $V_1 \to V_2$ ist endlich erzeugt über $P^G(V_1)$. Insbesondere hat jede glatte, äquivariante Abbildung $V_1 \to V_2$ die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{t} f_i(\pi_1,\pi_s)e_i,$$

dabei ist $(\pi_1,\ldots,\pi_s)$ ein Erzeugendensystem für die Algebra der invarianten Polynome, $(e_1,\ldots,e_t)$ ein Erzeugendensystem für den Modul der äquivarianten, polynomialen Abbildungen und jedes f_i eine glatte, reellwertige Funktion. Im allgemeinen ist $s \neq t$. Ferner ist klar, daß Gradienten von invarianten Funktionen äquivariant sind, allerdings ist nicht jede äquivariante Abbildung Gradient einer invarianten Funktion. Bei der Analyse von äquivarianten Abbildungen sind algebraische Relationen zwischen den Erzeugern der invarianten Polynome zu beachten! Dies bedeutet, daß in einem Erzeugendensystem zwar alle $(\pi_1 \ldots,\pi_s)$ linear unabhängig sind, es kann jedoch Polynome $p : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ geben mit

$$p(\pi_1,\ldots,\pi_s) = 0.$$

Aufgabe 1.6.16 *Man finde ein nichttriviales Beispiel für das Auftreten von Relationen.*

1.7 Die Poincaré Reihe

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Dimension des Vektorraumes der invarianten Polynome gegebenen Grades, bzw. mit der Dimension des Vektorraumes der polynomialen, äquivarianten Abbildungen festen Grades bestimmen. Aus der Darstellung, die wir ableiten werden, lassen sich (mit etwas Vorsicht) die Anzahl der Erzeuger vom jeweiligen Grad ablesen. Dazu verwenden wir ein Hilfsmittel das auf Poincaré[19] bzw. Molien[20] zurückgeht. Im folgenden sind die Darstellungen komplex. Den reellen Fall muß man sich durch eine getrennte Überlegung gewinnen.

Dazu sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ eine komplexe Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe.

Definition 1.7.1 *(i) Mit $P_G^N(V)$ bezeichnen wir die Menge*

$$P_G^N(V) = \{\pi \in P_G(V) \mid \pi \text{ ist homogen vom Grad } N\}.$$

Entsprechend bezeichnet $P_G^N(V,V)$ die homogenen, polynomialen Abbildungen $V \to V$ vom Grad N.

(ii) Sei $c_N = \dim_{\mathbb{C}} P_G^N(V)$ und $d_N = \dim_{\mathbb{C}} P_G^N(V,V)$. Die beiden formalen Reihen

$$p_R^\rho(t) = \sum_{N=0}^{\infty} c_N t^N \tag{1.7.13}$$

und

$$p_M^\rho(t) = \sum_{N=0}^{\infty} d_N t^N \tag{1.7.14}$$

heißen Poincaré–Reihen für den Ring der invarianten Funktionen, bzw. für den Modul der äquivarianten Abbildungen.

Zunächst scheint diese Definition wenig zu helfen, doch kann man diese Reihen anderweitig explizit ausrechnen.

Satz 1.7.2 *(i) Die Poincaré–Reihe für den Ring der invarianten Funktionen hat die Form*

$$p_R^\rho(t) = \int_G \frac{1}{\det(\mathbb{1} - t\rho(g))} d\mu(g).$$

(ii) Die Poincaré–Reihe für den Modul äquivarianter Abildungen hat die Gestalt

$$p_M^\rho(t) = \int_G \frac{\overline{\chi_\rho(g)}}{\det(\mathbb{1} - t\rho(g))} d\mu(g).$$

Beweis: Wir kommen zum ersten Teil, der Poincaré–Reihe für die invarianten Funktionen. Wir müssen uns zunächst die induzierte Aktion auf den Polynomen etwas genauer anschauen. Zunächst sei $p : V \to \mathbb{R}$ ein Polynom, G operiert darauf durch

[19] Henri Poincaré, 29.4.1854–17.7.1912, war einer der bedeutendsten Mathematiker, Begünder der modernen Topologie, bahnbrechende Beiträge zur Analysis, Himmelsmechanik. Er arbeitete in praktisch allen mathematischen Teildisziplinen.

[20] Fjodor Eduartowitsch Molien, 19.11.1861–25.12.1941, arbeitete über Algebra und Analysis, besondere Beiträge schuf er in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen

$gp(x) = p(g^{-1}x)$. Wir nehmen an, daß p homogen und vom Grad N ist. Dann gibt es eine symmetrische N-Linearform auf V B_N^p mit $p(x) = B_N^p(x, \ldots, x)$. Wie kann man solche Linearformen beschreiben? Gibt man sich zunächst N Vektoren $y_1, \ldots, y_N$ vor und betrachtet die Form

$$B(y_1, \ldots, y_N) : V \times \ldots \times V \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto \prod_{j=1}^{N} < x_j, y_j >,$$

so ist dies eine N–Linearform. Für die Äquivalenzklasse aller N-Tupel $(y_1, \ldots, y_N)$ mit der gleichen N–Linearform $B(y_1, \ldots, y_N)$ schreiben wir $y_1 \otimes \ldots \otimes y_N$. Letzteres identifizieren wir mit der zugehörigen Form. Die Menge aller $y_1 \otimes \ldots \otimes y_N$ bezeichnet man als Tensorraum $V^{\otimes N}$. Wie man sich leicht überlegt, erhält man aus einer N–Linearform $y_1 \otimes \ldots \otimes y_N$ eine symmetrische N–Linearform durch

$$(y_1 \otimes \ldots \otimes y_n)_S = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} y_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes y_{\sigma(N)}.$$

Hier steht S_N für die symmetrische Gruppe in N–Elementen. Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß alle symmetrischen N–Linearformen sich als endliche Summen von $(y_1 \otimes \ldots \otimes y_N)_S$ darstellen lassen. Die Gruppe operiert auf der ursprünglichen Form durch

$$g \prod_{j=1}^{N} < x_j, y_j >= \prod_{j=1}^{N} < \rho(g)^{-1} x_j, y_j >= \prod_{j=1}^{N} < x_j, \rho(g) y_j > .$$

Man prüft leicht nach, daß sich dies auf die Aktion auf

$$g \cdot (y_1 \otimes \ldots \otimes y_n) = \rho(g) y_1 \otimes \ldots \otimes \rho(g) y_N$$

wohldefiniert fortsetzt. Die Symmetrisierung führt auf

$$g \cdot (y_1 \otimes \ldots \otimes y_N)_S = (\rho(g) y_1 \otimes \ldots \otimes \rho(g) y_N)_S.$$

Sind nun $\lambda_1(g), \ldots, , \lambda_n(g)$ die Eigenwerte von $\rho(g)$ mit Eigenvektoren

$$e_1(g), \ldots, e_n(g),$$

so ist die Form

$$\underbrace{e_1 \otimes \ldots \otimes e_1}_{a_1 \text{ mal}} \otimes \ldots \otimes \underbrace{e_n \otimes \ldots \otimes e_n}_{a_n \text{ mal}}$$

mit $a_1 + \ldots + a_n = N$ Eigenvektor der Aktion von g mit Eigenwert

$$(\lambda_1(g))^{a_1} \cdots (\lambda_n(g))^{a_n}.$$

Damit ergibt sich als Spur von der Aktion von g

$$\sum_{a_1 + \ldots + a_n = N} \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j(g))^{a_j}.$$

Aufgrund der Spurformel in Lemma 1.5.2 gilt für die Anzahl linear unabhängiger Invarianten

$$\dim \mathrm{Fix}(G) = \int_G \mathrm{Tr}(g) d\mu(g) = \int_G \sum_{a_1+\ldots+a_n=N} \prod_{j=1}^{n} \lambda_j(g)^{a_j} d\mu(g).$$

Hier bezieht sich die Fixmenge auf die Aktion von G auf den Polynomen. Damit ist

$$c_N = \int_G \sum_{a_1+\ldots+a_n=N} \prod_{j=1}^{n} \lambda_j(g)^{a_j} d\mu(g).$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{\det(\mathbb{1} - t\rho(g))} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1 - t\lambda_j)}.$$

Entwickelt man den letzten Term, so ergibt sich als Koeffizient bei t^N der Ausdruck

$$\sum_{a_1+\ldots+a_n=N} \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j(g))^{a_j}.$$

Damit ist die erste Aussage gezeigt.

Wir kommen zum zweiten Teil. Nach dem zuvor Gesagten kann man das Tensorprodukt zweier Darstellungen $\rho_{1,2} : G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ durch

$$\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)(x_1 \otimes x_2) = \rho_1(g)x_1 \otimes \rho_2(g)x_2$$

definieren. Sind $\chi_{1,2}$ die Charaktere von $\rho_{1,2}$, dann sieht man $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_1\chi_2$. Wie bereits früher führen wir die Betrachtung von Äquivarianten auf Invariante in einer höheren Dimension zurück. Sei $H : V \to V$ äquivariant, $\pi_H : V \times V \to \mathbb{C}$ die zugehörige Invariante. Wir betrachten eine homogene, polynomiale Abbildung $V \to V$ vom Grad N als symmetrische N–lineare Abbildung, in die N–mal das gleiche Argument eingesetzt wird. Die entsprechende Darstellung ist nun $(\rho^{\otimes N})_S \otimes \tilde{\rho}$, wobei $\tilde{\rho}$ die zugehörige Darstellung auf dem Dualraum ist. Die Charaktere multiplizieren sich und wir erhalten die gewünschte Formel. □

Beispiel 1.7.3 *Wir wollen die Poincaré–Reihen für die Tetraedergruppe $\mathbb{T}$ berechnen. In $\mathbb{T}$ gibt es drei Elemente der Ordnung 2, acht Elemente der Ordnung 3 und die Identität. Je zwei Elemente gleicher Ordnung liefern den gleichen Beitrag zur Summe, deshalb erhält man als Reihe für die Invarianten*

$$\begin{aligned} P_R^{\mathbb{T}}(t) &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(1-t)^3} + \frac{3}{(1-t)(1+t)^2} + \frac{8}{(1-t)(1+t+t^2)}\right) \\ &= \frac{(1+t)^2(1+t+t^2) + 3(1-t)^2(1+t+t^2) + 8(1-t)^2(1+t)^2}{12(1-t)^3(1+t)^2(1+t+t^2)} \\ &= \frac{1}{12}\frac{(4-4t+4t^2)(1+t+t^2) + 8(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2(1-t^3)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}\frac{12-12t^2+12t^4}{(1-t^2)^2(1-t^3)} \\
&= \frac{1-t^2+t^4}{(1-t^2)^2(1-t^3)} \\
&= \frac{1+t^6}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)}.
\end{aligned}
$$

Als Reihe für die Äquivarianten erhält man

$$P^{\mathbb{T}}_{\mathcal{M}}(t) := \frac{t+t^2+2t^3+t^4+t^5}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)}. \tag{1.7.15}$$

Beispiel 1.7.4 *Wir wollen uns nun noch ein Beispiel für eine kontinuierliche Gruppe ansehen. Die Gruppe sei hier* $\mathbf{SO}(3)$*. Um die entsprechenden Formel im Molienschen Satz ausrechnen zu können, brauchen wir noch einen abstrakten Begriff: in einer kompakten Lie–Gruppe* G *heißt die größte Untergruppe die isomorph zu* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *ist maximaler Torus. Wichtig ist der Satz, daß je zwei maximale Tori in einer zusammenhängenden Gruppe konjugiert sind, vgl. Bröcker und tom Dieck, Representations of Compact Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics 98, Springer–Verlag, IV (1.6). Der Weylsche Integralsatz a.a.O. IV (1.11) gestattet nun ein Integral über die Gruppe auf ein Integral über den maximalen Torus zurückzuführen. Im Fall der Gruppe* $\mathbf{SO}(3)$ *ist der maximale Torus eine Gruppe isomorph zu* $\mathbf{SO}(2)$*, nämlich die Menge der Drehungen um eine feste Achse. Hier ist es offensichtlich, daß je zwei dieser Gruppen konjugiert sind. Der Normalisator von* $\mathbf{SO}(2)$ *in* $\mathbf{SO}(3)$ *ist* $\mathbf{O}(2)$ *und es gilt* $N(\mathbf{SO}(2))/\mathbf{SO}(2)$ *hat die Ordnung 2. Dies ist Beispiel für einen allgemeinen Sachverhalt, der Normalisator des maximalen Torus* T *einer kompakten Lie–Gruppe hat immer einen endlichen Faktor* $N(T)/T$*, welcher die Weyl–Gruppe* $W(G)$ *von* G *genannt wird. Die Weyl'sche Integralformel lautet nun*

$$\int_G f(g)d\mu(g) = \frac{1}{|W(G)|}\int_T \det(\mathbb{1}_{L(G/T)} - \mathrm{Ad}_{G/T}(t^{-1}))\int_G f(gtg^{-1})d\mu(g)d\mu_T(t). \tag{1.7.16}$$

Man kann die Formel plausibel machen, wir wollen hier wieder den Spezialfall $\mathbf{SO}(3)$ *betrachten und nur an einer Stelle eine kurze abstrakte Bemerkung einschieben.*

Die Gruppe $\mathbf{SO}(3)$ *operiert auf der Sphäre* S^2 *transitiv, der Stabilisator eines Punktes ist* $T = \mathbf{SO}(2)$*. Also hat man*

$$S^2 = \mathbf{SO}(3)/\mathbf{SO}(2).$$

Natürlich hat man keine Produktstruktur, d.h. es gilt nicht $\mathbf{SO}(3) = S^2 \times \mathbf{SO}(2)$*. Trotzdem wollen wir die Integration auf eine Integration über* $S^2 \times \mathbf{SO}(2)$ *zurückführen. Jeden Punkt in* S^2 *identifizieren wir mit einer Nebenklasse* gT*. Betrachte*

$$q : S^2 \times T \to \mathbf{SO}(3) : (gT, t) \mapsto gtg^{-1}.$$

Zunächst ist diese Abbildung wohldefiniert, sind g_1, g_2 in der gleichen Nebenklasse, so existiert ein $\tau \in T$ mit $g_1 = g_2\tau$, also ist

$$g_1 t g_1^{-1} = g_2 \tau t \tau^{-1} g_2^{-1} = g_2 t g_2^{-1}.$$

Ist $g \in \mathbf{SO}(3)$, so gibt es zwei Urbilder unter q. Deshalb tritt der Term $\frac{1}{|W(G)|}$ in obiger Formel (1.7.16) auf. Um die Integration auf $S^2 \times T$ zurückzuführen, muß man die Determinante der Abbildung q ausrechnen, wir wollen dies abstrakt machen: sei G eine zusammenhängende, kompakte Lie–Gruppe, T der maximale Torus in G. Für die Konjugation gtg^{-1} schreiben wir $c_g(t)$. Betrachte die Folge von Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} G \times T & \to & G \times T & \to & G & \to & G \\ (g,t) & \mapsto & (\gamma g, \tau t) & \mapsto & \gamma g \tau t g^{-1} \gamma^{-1} & \mapsto & \gamma \tau^{-1} g \tau t g^{-1} \gamma^{-1}. \\ & = & c_\gamma(c_{\tau^{-1}}(g) t g^{-1}) & & & & \end{array}$$

Von dieser Abbildung wollen wir die Determinante der Linearisierung bei $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$ ausrechnen. Diese Reduktion ist durch geeignete Wahl von γ, τ zulässig. Die Linearisierung von c_γ ist orthogonal und damit ist die Determinante 1 (da G zusammenhängend ist). Also dürfen wir diesen Faktor weglassen, ansonsten erhalten wir die Summe der Linearisierungen der beteiligten Abbildungen (wegen der Reduktion auf $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$). Ist nun $X \in L(G/T)$, $Y \in L(T)$ so ergibt dies

$$(X, Y) \mapsto \mathrm{Ad}_{G/T}(t^{-1})X + Y - X.$$

Als Matrix erhält man

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ad}_{G/T}(t^{-1}) - \mathbb{1}_{L(G/T)} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{L(T)} \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also noch die Determinante der Aktion $\mathrm{Ad}_{G/T}(t^{-1})$ berechnen. Wir tun dies wieder für unser spezielles Beispiel $G = \mathbf{SO}(3)$. Die Erzeuger der Lie–Algebra von $\mathbf{SO}(3)$ schreibt man üblicherweise als $L_1,\ L_2,\ L_3$ mit

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $T = \{\exp(sL_3) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Nun kann man die Aktion von $\exp(sL_3)$ auf $\mathbf{SO}(3)/T$ erhalten, indem man auf dem Erzeugnis von $L_1,\ L_2$ operiert. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \exp(-sL_3) L_1 \exp(sL_3) &= \begin{pmatrix} 0 & \sin s & \cos s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin s & 0 & 0 \\ \cos s & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos s L_1 - \sin s L_2 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\exp(-sL_3)L_1\exp(sL_3) = \sin sL_1 + \cos sL_2.$$

Damit erhält man als Determinante insgesamt $d = (1-\cos s)^2 + (\sin s)^2 = 2 - 2\cos s$ *oder mit* $z = \cos s + i\sin s$ *ist,* $d = (1-z)(1-z^{-1})$.

Wir kommen zur Poincaré–Reihe zurück. Die Determinante ist eine sogenannte Klassenfunktion, sie ist konstant auf Konjugationsklassen. Unter Konjugation erhält man

$$\det(\mathbb{1} - t\rho(g)\rho(\tau)\rho(g^{-1})) = \det(\rho(g)(\mathbb{1} - t\rho(\tau))\rho(g^{-1})) = \det(\mathbb{1} - t\rho(\tau)).$$

Damit erhält man für die Poincaré–Reihe für die $2\ell+1$*–dimensionale irreduzible Darstellung den Ausdruck*

$$P_{\mathcal{R}}^{\mathbf{SO}(3),\ell}(t) = \frac{1}{2}\int_T \det(\mathrm{Ad}_{G/T}(\tau^{-1}) - \mathbb{1}_{L(G/T)})\frac{1}{\det(\mathbb{1} - t\rho(\tau))}d\mu(\tau)$$

und entsprechend für die Reihe $P_{\mathcal{M}}^{\mathbf{SO}(3),\ell}(t)$*. (Beachte, auch die Spur ist eine Klassenfunktion.) Wir betrachten nun die* $2\ell+1$*–dimensionale Darstellung der* $\mathbf{SO}(3)$*. Diese zerfällt als Darstellung der* $\mathbf{SO}(2)$ *in* $\ell+1$ *irreduzible Darstellungen, eine eindimensionale und* ℓ *zweidimensionale. Diese sind so, daß das* L_3 *in der* j*–ten Darstellung durch*

$$\exp(jsL_3)$$

operiert. Setzt man nun $z = e^{is}$ *mit* $\tau = \exp(sL_3)$ *so ergibt sich für*

$$\det(\mathbb{1} - t\rho(\exp(sL_3))) = \prod_{j=-\ell}^{\ell}(1 - tz^j)$$

und

$$\mathrm{Tr}(\rho(\exp(sL_3))) = \sum_{j=-\ell}^{\ell} z^j.$$

Damit erhält man die Aussage

$$P_{\mathcal{R}}^{\mathbf{SO}(3),\ell}(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(1-z)(1-z^{-1})}{\prod_{j=-\ell}^{\ell}(1-tz^{l-j})}\frac{dz}{z}$$

und für den Modul der äquivarianten Abbildungen

$$P_{\mathcal{M}}^{\mathbf{SO}(3),\ell}(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(1-z^{-1})(z^{-\ell} - z^{\ell+1})}{\prod_{j=-\ell}^{\ell}(1-tz^{l-j})}\frac{dz}{z}.$$

Diese Integrale wertet man nun mittels des Residuensatzes aus. Für $\ell = 2$ *ergibt sich der Spezialfall*

$$P_{\mathcal{R}}^{\mathbf{SO}(3),2}(t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$$

bzw.

$$P_{\mathcal{M}}^{\mathbf{SO}(3),2}(t) = \frac{t+t^2}{(1-t^2)(1-t^3)}.$$

Für die Ringe der Invarianten ergeben sich bei $\ell = 3, 4$ *die Reihen*

$$P_{\mathcal{R}}^{\mathbf{SO}(3),3}(t) = \frac{1+t^{15}}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})}$$

und

$$P_{\mathcal{R}}^{\mathbf{SO}(3),4}(t) = \frac{1+t^8+t^9+t^{10}+t^{18}}{\prod_{k=2}^{7}(1-t^k)}.$$

Kapitel 2

Verzweigung stationärer Lösungen

2.1 Unendlich dimensionale Darstellungen

In diesem Abschnitt legen wir die Grundlagen für die anschließenden Reduktionen. Die funktionalanalytischen Begriffe sind im Anhang A zusammengefaßt. Wir beschreiben zunächst die grundlegende Situation.

Definition 2.1.1 *Es seien X, Y Banachräume*[1]

(i) $\mathcal{L}(X)$ sei die Menge der beschränkten, linearen Operatoren von X in sich. Entsprechend sei $\mathcal{L}(X,Y)$ die Menge der beschränkten, linearen Operatoren $X \to Y$.

(ii) Ferner sei

$$\mathbf{GL}(X) = \{A \in \mathcal{L}(X) \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$

(iii) Mit $\mathcal{C}(X)$ bezeichnen wir die Menge der abgeschlossenen, linearen Operatoren auf X.

Definition 2.1.2 *(i) Eine unendlich dimensionale Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus*

$$\rho : G \to \mathbf{GL}(X),$$

wobei X ein unendlich dimensionaler Banachraum ist.

(ii) Sind $\rho_{1,2} : G \to \mathbf{GL}(X_{1,2})$ zwei unendlich dimensionale Darstellungen, so ist $\mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ die Menge der äquivarianten linearen Abbildungen $X_1 \to X_2$.

[1]Stefan Banach, 30.3.1892–31.8.1945, polnischer Mathematiker, Autodidakt, wurde zu einem der bedeutendsten Wegbereiter der Funktionalanalysis. Die Theorie stetiger, linearer Operatoren wurde von ihm in entscheidender Weise vorwärts gebracht.

Wodurch unterscheiden sich unendlich dimensionale Darstellungen von den endlich dimensionalen? Zunächst tritt ein technisches Problem auf: die Abbildung $G \to Gu$, $u \in X$ ist i.a. nicht glatt. Bevor wir uns hierzu ein Beispiel anschauen, eine kurze Erklärung. Die Elemente der Lie–Algebra von G operieren als Differentialoperatoren und der Definitionsbereich eines Differentialoperators ist ein echter Unterraum von X.

Beispiel 2.1.3 *(i) Ist $X = L^2(S^2)$ und operiert $\mathbf{SO}(3)$ durch*

$$(g, u) \mapsto u \circ g^{-1},$$

so wirken die Erzeuger der Lie–Algebra L_1, L_2, L_3 auf $C^1(S^2)$ durch

$$L_i u = \mathcal{L}_i u,$$

wobei $\mathcal{L}_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ ist und entsprechendes für die $\mathcal{L}_j$, $j = 2, 3$ gilt. Der maximale Definitionsbereich dieser Operatoren ist $H^1(S^2)$.

(ii) Ein konkretes Beispiel für die Nichtdifferenzierbarkeit der Aktion ist gegeben durch die Aktion von $\mathbb{R}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ durch die Verschiebung, also

$$(\rho(t)u)(x) = u(x - t).$$

Ist $u(x) = 0$ für $|x| > 1$ und $u(x) = 1$ für $x \in [-1, 1]$, so ist die Abbildung $\mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}), t \mapsto \rho(t)u$ nicht differenzierbar. Die Differenzierbarkeit ist nur bei $t = 0$ nachzupüfen. Zu zeigen ist, es gibt kein Element $v \in L^2(\mathbb{R})$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|^2} \int_{\mathbb{R}} (u(x - h) - u(x) - hv(x))^2 dx = 0.$$

Dies ist leicht einzusehen.

Diese Beispiele sind von Bedeutung, da man daran sieht, daß der Orbit eines Punktes im Funktionenraum im allgemeinen keine glatte Untermannigfaltigkeit ist. Es gibt jedoch zwei Klassen von Funktionen, deren Orbits doch wieder glatte Mannigfaltigkeiten bilden. Die erste tritt bei Ruhelagen spezieller dynamischer Systeme auf.

Lemma 2.1.4 *Hat man ein äquivariantes, parabolisches Anfangsrandwertproblem auf einem beschränkten Gebiet Ω mit kompakter Symmetriegruppe $\Gamma^\Omega = \{A \in \mathbf{O}(n) \mid A\Omega = \Omega\}$ der Form*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f(u),$$

wobei A gleichmäßig stark elliptisch ist, mit Koeffizienten, die genügend glatt sind, f glatt mit entsprechenden Wachstumsschranken mit Rand- und Anfangsbedingungen, so ist der Orbit stationärer Lösungen eine glatte (C^1) Mannigfaltigkeit.

Beweis: Die Regularitätstheorie für elliptische Gleichungen garantiert, daß eine stationäre Lösung in $H^2(\Omega)$ ist. Damit liegt es auch im Definitionsbereich der Erzeuger der Lie–Algebra $L\Gamma^{\Omega}$. Dies folgt, da die Erzeuger immer als lineare Differentialoperatoren erster Ordnung operieren. □

Die Glattheit des Orbits $\mathcal{O}(u)$ erhalten wir auch wenn u in einem endlich dimensionalen, invarianten Unterraum von X liegt. Diese Situation wollen wir uns jetzt genauer ansehen. Auch hier haben wir elliptische, bzw. parabolische Gleichungen im Auge. Unter den äquivarianten Abbildungen spielen naturgemäß die linearen eine besondere Rolle, sowohl bei der Frage der Verzweigungen stationärer Lösungen, wie auch bei Stabilitätsfragen. Um interessante dynamische Systeme mitbehandeln zu können, betrachten wir die folgende Situation: es seien X_1, X_2 Banachräume und $\rho_j : G \to \mathbf{GL}(X_j)$, $j = 1, 2$, unendlich dimensionale Darstellungen. Wir nehmen an, daß $X_1 \subset X_2$ dicht und kompakt eingebettet ist. Dies ist bei Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen eine übliche Voraussetzung. Wir haben jetzt die üblichen Begriffe zur Verfügung. Eine Abbildung $F : X_1 \to X_2$ heißt äquivariant, wenn $F(\rho_1 u) = \rho_2 F(u)$ ist. Sei nun $A \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ eine äquivariante, lineare Abbildung.

Definition 2.1.5 *Ein Element $u \in X_1$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls $Au = \lambda u \in X_1$ ist. Die Menge*

$$E_\lambda = \cup_{n\in\mathbb{N}} \ker(A - \lambda 1\!\!1_{X_2})^n$$

nennt man den verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert λ. Ist $\dim E_\lambda < \infty$, so heißt die Dimension von E_λ die algebraische Vielfachheit von λ und $\dim(\ker A - \lambda 1\!\!1_{X_2})$ die geometrische Vielfachheit.

Aus der Kompaktheit der Einbettung von X_1 in X_2 folgert man, daß A als lineare Abbildung X_2 in sich mit Definitionsbereich $D(A) = X_1$ eine kompakte Resolvente besitzt und demzufolge nur abzählbar viele Eigenwerte ohne Häufungspunkt von jeweils endlicher algebraischer Vielfachheit besitzt (vgl. YOSIDA [23]). Im folgenden setzen wir noch voraus, daß $\rho_2(g)$ eine Fortsetzung von $\rho_1(g)$ sei. Das ist in den Anwendungen vom Typ $X_1 = H^2(\Omega)$, $X_2 = L^2(\Omega)$ mit der Aktion $\rho(g)u(x) = u \circ \rho(g^{-1})$ immer gegeben.

Definition 2.1.6 *Ist für jedes $g \in G$ $\rho_2(g)$ eine Fortsetzung von $\rho_1(g)$, so sagen wir ρ_2 ist eine Fortsetzung von ρ_1, in Zeichen: $\rho_2 \supset \rho_1$.*

Lemma 2.1.7 *Ist $A \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$, $\rho_2 \supset \rho_1$, so sind für jeden Eigenwert λ von A die Räume E_λ und $\ker(A - \lambda 1\!\!1_{X_2})$ invariante Unterräume für die Aktion ρ_1. Hat A kompakte Resolvente sind diese jeweils endlich dimensional.*

Beweis: Die zweite Aussage ist klar, die erste sieht man wie folgt:

$$A\rho_1(g)x = \rho_2(g)Ax = \rho_2(g)\lambda x = \lambda\rho_1(g)x.$$

□

Für den folgenden Satz benötigen wir eine bekannte Tatsache aus der Funktionalanalysis. Wir zitieren sie mit dem folgenden Lemma (vgl. KATO, [16]). Dabei verwenden wir die Schreibweise $P(A)$ für die Resolventenmenge von A, d.h.

$$P(A) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid (A - \zeta \mathbb{1}_{X_2})^{-1} \text{ existiert, ist dicht definiert und stetig}\},$$

und $R(A,\zeta) = (A - \zeta \mathbb{1}_{X_2})^{-1}$.

Lemma 2.1.8 *Seien $A \in \mathcal{C}(X_2)$ mit Definitionsbereich $D(A) = X_1$ mit $P(A) \neq \emptyset$. Dann gibt es zu jedem $\zeta \in P(A)$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jeden Operator $B \in \mathcal{C}(X_2)$, $D(B) \supset X_1$ mit $\|A - B\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} < \delta$ gilt $\zeta \in P(B)$ und*

$$\|R(A,\zeta) - R(B,\zeta)\|_{\mathcal{L}(X_2)} < \varepsilon.$$

Satz 2.1.9 *Es seien X_1, X_2 Banachräume mit $X_1 \subset X_2$ dicht und kompakt eingebettet. Ferner seien $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathbf{GL}(X_{1,2})$ unendlich dimensionale Darstellungen der kompakten Lie–Gruppe G mit $\rho_2 \supset \rho_1$. Ist $A \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ und hat eine kompakte Resolvente (als Operator in $\mathcal{C}(X_2)$), und ist λ ein Eigenwert von A, so hat jeder Operator $B \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ mit $\|A - B\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}$ genügend klein Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_s$ in der Nähe von λ. Es gilt $\sum_{i=1}^{s} \dim E_{\mu_i} = \dim E_\lambda$. Ferner treten all die irreduziblen Darstellungen von G, die in E_λ vorkommen, auch in $\oplus_i E_{\mu_i}$ auf und haben die gleichen Vielfachheiten wie in E_λ.*

Beweis: Mit $\Sigma(A)$ bezeichnen wir das Spektrum von A, das Komplement in $\mathbb{C}$ ist die Resolventenmenge $P(A)$. Da A nur abzählbar viele Eigenwerte hat, kann man eine geschlossene Kurve $K \in \mathbb{C}$ finden, welche sich genau einmal um λ windet, aber keinen anderen Spektralpunkt von A im Inneren hat. Sei $R(A,\zeta) = (A - \zeta \mathbb{1}_{X_2})^{-1}$ die Resolvente von A. Dann ist

$$\Pi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K R(A,\zeta) d\zeta$$

ein Projektor auf E_λ. Ist B genügend nahe bei A, so unterscheidet sich die Resolvente $R(B,\zeta)$ auf der Spur von K in der Operatortopologie um weniger, als sagen wir δ. Das Integral

$$\Pi(\mu_1, \ldots, \mu_s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K R(B,\zeta) d\zeta$$

definiert einen Projektor auf $\oplus_i E_{\mu_i}$. Da die Dimensionen der beiden Bildräume ganzzahlig sind, sich aber um beliebig wenig unterscheiden, ist nur B genügend nahe bei A sind beide gleich.

Sei $\chi = \sum_i n_i \chi_i$ der Charakter der Darstellung auf E_λ, mit irreduziblen Darstellungen $\tilde{\rho}_i$ und Charakteren χ_i, sei ferner χ' der Charakter der Darstellung auf $\oplus_i E_{\mu_i}$. Dann ist die Vielfachheit von $\tilde{\rho}_i$ in der Darstellung auf E_λ gegeben durch

$$(\chi_i | \chi) = (\chi_i | \operatorname{Tr}(\rho_1(g) \circ \Pi(\lambda))).$$

Gleichermaßen erhalten wir die Vielfachheit von $\tilde{\rho}_i$ in der Darstellung auf $\oplus E_{\mu_i}$ aus

$$(\chi|\chi') = (\chi_i|\operatorname{Tr}(\rho_1(g) \circ \Pi(\mu_1, \ldots, \mu_s))).$$

Diese beiden Skalarprodukte unterscheiden sich um weniger als $\varepsilon > 0$, beliebig aber fest, ist nur $\|A - B\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)}$ genügend klein. Da die Resultate ganzzahlig sind, sind beide gleich. □

Korollar 2.1.10 *Der im Beweis zu Satz 2.1.9 konstruierte Projektor $\Pi(\lambda)$ ist äquivariant bezüglich der Aktion ρ_1.*

Beweis: Da A mit ρ_1 vertauscht, gilt dies auch für $R(A, \zeta)$ und damit für das Integral. □

Bemerkung 2.1.11 *In Hilberträumen konstruiert man sich äquivariante Eigenprojektoren mittels des invarianten Skalarprodukts, bei Banachräumen muß man auf die hier vorgestellte Konstruktion zurückgreifen.*

2.2 Familien von Operatoren

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß einparametrige Familien von linearen Operatoren eine wichtige Rolle spielen.

Definition 2.2.1 *Seien X_1, X_2 Banachräume $X_1 \subset X_2$ kompakt und dicht eingebettet. $\rho_2 \supset \rho_1$ seien zwei unendlich dimensionale Darstellungen der kompakten Lie–Gruppe G. Sei*

$$T(X_1, X_2) = \{A \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2) \mid A \in \mathcal{C}(X_2), D(A) = X_1, A \textit{ hat kompakte Resolvente}\},$$

versehen mit der Topologie von $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ und

$$T^{reg}(X_1, X_2) = \{A \in T(X_1, X_2) \mid 0 \in \Sigma(A) \Rightarrow E_0 \textit{ ist absolut irreduzible Darstellung}\}.$$

Wir setzen

$$T_0(X_1, X_2) = \{A \in T(X_1, X_2) \mid 0 \in \Sigma(A)\}$$

und schließlich

$$T_0^{reg} = T^{reg}(X_1, X_2) \cap T_0(X_1, X_2).$$

Lemma 2.2.2 *$T^{reg}(X_1, X_2)$ ist offen und dicht in $T(X_1, X_2)$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst die Dichtheit von $T^{reg}(X_1, X_2)$. Diese folgt aus der Dichtheit der Menge

$$A \in T(X_1, X_2), 0 \notin \Sigma(A).$$

Dies ist aber (nahezu) trivial.

Ist $0 \notin \Sigma(A)$, so ist $0 \in P(A)$. Wir wissen bereits, daß es eine Umgebung U_ε von A gibt, so daß für jedes $B \in U_\varepsilon$ gilt $0 \in P(B)$.

Sei nun $0 \in \Sigma(A)$. Ist E_0 eine absolut irreduzible Darstellung von A, so müssen wir zeigen, daß es eine Umgebung U_ε von A gibt, so daß $B \in U_\varepsilon$ impliziert B hat keinen Eigenwert 0 oder B hat einen Eigenwert 0 und E_0 ist eine absolut irreduzible Darstellung von B. Durch die Wahl von ε können wir erreichen, daß jedes $B \in U_\varepsilon$ genau einen Eigenwert μ in der Nähe von 0 besitzt. Die Darstellung auf $E_\mu(B)$ hat den gleichen Charakter, wie die auf $E_0(A)$. Daher ist diese Darstellung absolut irreduzibel. □

Definition 2.2.3 *Sei X ein Banachraum. Eine Banach–Mannigfaltigkeit (modelliert über X) ist eine Menge Y mit einer offenen Überdeckung U_α und Homöomorphismen $\psi_\alpha : U_\alpha \to X$, so daß*

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to X$$

eine differenzierbare Abbildung $X \to X$ ist.

Satz 2.2.4 *$T_0^{reg}(X_1, X_2)$ ist eine glatte Banach–Mannigfaltigkeit in $\mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ der Kodimension 1.*

Beweis: Wir betrachten die Abbildung

$$\tau : T(X_1, X_2) \to \mathbb{R} : B \mapsto \mu,$$

wobei μ der eindeutig bestimmte Eigenwert von B nahe 0 ist. Diese Abbildung ist glatt. Wir müssen zeigen, daß die Ableitung $\frac{d\tau}{dB}(A)$ vollen Rang besitzt. Dazu sei K ein Kreis um $0 \in \mathbb{C}$, so daß A im Inneren keinen anderen Eigenwert außer 0 besitzt. Sei

$$\Pi(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K R(A, \zeta) d\zeta.$$

Wähle $\varepsilon > 0$, so daß für alle $B \in U_\varepsilon \subset T(X_1, X_2)$ gilt, daß B keine Eigenwerte auf K hat. Setze

$$\Pi_B(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K R(B, \zeta) d\zeta.$$

Dies ist ein Projektor, der glatt von B abhängt. Sei d die Dimension des Bildes von $\Pi_B(0)$ und $\mathrm{IM}(\Pi_B(0))$ das Bild, so ist

$$\mu = \frac{1}{d} \operatorname{Tr}(B_{|\mathrm{IM}(\Pi_B(0))}).$$

Damit ist die Abbildung τ glatt mit surjektiver Linearisierung. Also ist $\tau^{-1}(0)$ lokal eine Mannigfaltigkeit der Kodimension 1. □

Diese Überlegung läßt vermuten, daß generische einparametrige Scharen von Operatoren in $T(X_1, X_2)$ die Mannigfaltigkeit $T_0^{reg}(X_1, X_2)$ transversal schneiden.

Definition 2.2.5 *Sei I ein reelles Intervall, o.B.d.A. wählen wir im folgenden $I = [-1,1]$. Mit $Y = C^\infty(I, T(X_1, X_2))$ bezeichnen wir die Menge der glatten Abbildungen $I \to T(X_1, X_2)$. Y wird mit der Metrik*

$$d(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\sup_{t\in[-1,1]} \|\frac{d^j}{dt^j}(f(t)-g(t))\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}}{1+\sup_{t\in[-1,1]} \|\frac{d^j}{dt^j}(f(t)-g(t))\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}}$$

zum vollständigen metrischen Raum.

Satz 2.2.6 *Die Menge der Abbildungen $f \in Y$, welche transversal zu $T_0^{reg}(X_1, X_2)$ ist, ist, bezüglich d, offen und dicht in Y.*

Beweis: Ein vollständiger Beweis beruht auf Transversalitätssätzen, siehe unten und Appendix B. □

Zur Erinnerung f schneidet $T_0^{reg}(X_1, X_2)$ transversal, wenn der Schnitt leer ist, oder am Schnitt die Ableitung einen Komplementärraum zu $T_0^{reg}(X_1, X_2)$ aufspannt.

Dies besagt, daß für eine generische Familie von Operatoren, welche einen Operator mit Eigenwert 0 enthält, so daß die Darstellung auf diesem Unterraum absolut irreduzibel ist, bei diesem Operator die imaginäre Achse transversal schneidet. Genauer, sei $A = A(s_0)$ ein solcher Operator mit Eigenwert 0 und absolut irreduzibler Darstellung auf E_0. Die Einschränkung von A auf E_0 ist 0. Ist $A(s)$ die Familie für $|s - s_0|$ klein. Dann hat jedes $A(s)$ genau einen Eigenwert $\mu(s)$ nahe 0. Die Kurve $\mu(s)$ ist glatt. Die Transversalitätsbedingung besagt nun $\mu(s_0) = 0$ und $\mu'(s_0) \neq 0$. Man sagt auch, der Eigenwert kreuzt die Achse mit nicht verschwindender Geschwindigkeit.

Satz 2.2.7 *Die Menge der $f \in C^\infty(I, T(X_1, X_2))$, für die gilt*

$$f(s) \in T_0(X_1, X_2) \Rightarrow f(s) \in T_0^{reg}(X_1, X_2)$$

und f ist transversal zu $T_0^{reg}(X_1, X_2)$ ist offen und dicht in $C^\infty(I, T(X_1, X_2))$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Offenheit. Wegen der Kompaktheit von $[-1,1]$ und der Transversalitätsforderung an f kann f die Mannigfaltigkeit $T_0^{reg}(X_1, X_2)$ nur endlich oft, sagen wir in $s_1, \ldots, s_\nu$ schneiden. Für jedes s_j gibt es eine offene Kugel $U_{\varepsilon,j}$ um $f(s_j)$, so daß jeder Operator B in $U_{\varepsilon,j}$ genau einen kleinen Eigenwert $\mu_j(B)$ mit jeweils absolut irreduzibler Darstellung $E_{\mu_j(B)}$ hat. Sei J_j die Menge der $s \in [-1,1]$ mit $f(s) \in U_{\varepsilon,j}$. Jedes J_j ist offen, das Komplement C der Vereinigung aller J_j kompakt. Zu jedem Punkt $s \in C$ existiert eine Umgebung V_s, so daß $B \in V_s$ impliziert B hat keinen Eigenwert 0. Endlich viele solcher Umgebungen reichen C zu überdecken.

Wir kommen zur Dichtheit. Ist f, so daß $f(I) \cap T_0(X_1, X_2) = \emptyset$ ist, so ist nichts zu zeigen.

Der Rest des Beweises wird in der vollständigen Version des Skriptes erbracht! □

Bemerkung 2.2.8 *Für eine endlich dimensionale Darstellung kann man relativ leicht mehr zeigen: die Menge der linearen Abbildungen, für die gilt, daß zu jedem reellen Eigenwert der zugehörige verallgemeinerte Eigenraum eine irreduzible Darstellung ist, ist offen und dicht. In der unendlich dimensionalen Situation ist die Offenheit schwer zu zeigen, man benötigt Voraussetzungen, die einem eine Gleichmäßigkeit für die Störung aller Eigenwerte gibt.*

2.3 Äquivariante Reduktionen

In diesem Abschnitt wollen wir unser unendlich, i.a. zumindest hoch dimensionales Problem auf ein Problem auf dem Kern reduzieren. Dazu gibt es zwei Standardtechniken, die sogenannte Lyapunov–Schmidt Reduktion und die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit. In dieser Reihenfolge wollen wir kurz über beide Methoden sprechen. Beide werden wieder bei der Diskussion der Verzweigung periodischer Lösungen auftreten.

Im weiteren betrachten wir parameterabhängige Abbildungen zwischen zwei Banachräumen X_1, X_2, also $F : \Lambda \times X_1 \to X_2$, wobei Λ ebenfalls ein Banachraum ist. Oft werden wir die Situation $\Lambda = \mathbb{R}$ genauer anschauen.

Definition 2.3.1 *Eine Abbildung*

$$F : \Lambda \times X_1 \to X_2$$

heißt bezüglich zweier Darstellungen $\rho_{1,2}$ einer kompakten Lie–Gruppe äquivariant, falls gilt

$$F(\lambda, \rho_1(g)x) = \rho_2(g)F(\lambda, x) \ \forall (\lambda, x, g) \in \Lambda \times X_1 \times G.$$

Satz 2.3.2 (Lyapunov-Schmidt Reduktionssatz) [2, 3] *Seien $X_{1,2}$ Banachräume, X_2 reflexiv, $X_1 \subset X_2$ kompakt und dicht eingebettet, $\rho_{1,2} : G \to X_{1,2}$ zwei unendlich dimensionale Darstellungen von G mit $\rho_2 \supset \rho_1$. Gegeben sei eine glatte äquivariante Abbildung $F : \Lambda \times X_1 \to X_2$ mit*

$$F(\lambda, 0) = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

Es sei $A(\lambda) = D_x F(\lambda, 0)$. Wir setzen voraus, daß $A(\lambda) \in T(X_1, X_2) \ \forall \lambda \in \Lambda$. Dann ist $A(\cdot)$ eine glatte Schar von Operatoren in $T(X_1, X_2)$. Es gilt:

(i) Ist $0 \notin \Sigma(A(\lambda_0))$, so gibt es Umgebungen $U \subset \Lambda$ von λ_0 und $W \subset X_1$ von 0, so daß gilt

$$(\lambda, x) \in U \times W \text{ und } F(\lambda, x) = 0 \text{ impliziert } x = 0.$$

[2] Aleksandr Michailowitsch Lyapunov, 6.6.1857–3.11.1918. Sein Name wird verbunden mit bedeutenden Beiträgen zur Stabilitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Von ihm stammen darüberhinaus auch Beiträge zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, zur Wahrscheinlichkeitstheorie (zentrale Grenzwertsätze) und Potentialtheorie (Dirichlet–Problem).

[3] Erhard Schmidt, Schüler von Hilbert, bekannt durch das nach ihm benannte Orthonormierungsverfahren, arbeitete über Integralgleichungen, die hier beschriebene Reduktionsmethode tauchte in drei Arbeiten in den Jahren 1906-1908 über Verzweigung bei Integralgleichungen auf.

(ii) *ist* $0 \in \Sigma(A(\lambda_0))$, *dann ist* $\dim\ker(A(\lambda_0)) = \mathrm{codim}(\mathrm{IM}(A(\lambda_0))$, *es gibt äquivariante Projektoren* P_1, P_2, Q_1, Q_2 *mit* $P_1 : X_1 \to \ker(A(\lambda_0))$, $P_2 = \mathbb{1}_{X_1} - P_1$, $Q_1 : X_2 \to \mathrm{IM}(A(\lambda_0))$ *und* $Q_2 = \mathbb{1}_{X_2} - Q_1$, *eine äquivariante Abbildung*

$$w : \Lambda \times \ker(A(\lambda_0)) \to P_2(X_1),$$

und Umgebungen $U \subset \Lambda$ *von* λ_0, $W \subset X_1$ *von* 0, *so daß* $F(x,\lambda) = 0$, $(\lambda, x) \in U \times W$ *äquivalent ist zu* $g(\lambda, v) = 0$, *wobei* $g : U \times V \to Z$, *mit* $V \subset \ker(A(\lambda_0))$ *einer offenen Umgebung von* 0 *und* $Z = Q_2(X_2)$, *definiert ist durch*

$$g(\lambda, v) = Q_2 F(\lambda, v + w(\lambda, v)).$$

Äquivalenz heißt in diesem Fall, daß jede Lösung (λ, v) *von* $g(\lambda, v) = 0$ *durch* $x = v + w(\lambda, v)$ *auf eine Lösung von* $F(\lambda, x) = 0$ *führt und umgekehrt hat jede Lösung* $(\lambda, x) \in U \times W$ *die Darstellung* $x = v + w(\lambda, v)$.

Beweis: Die erste Aussage folgt einfach aus dem Satz über implizite Funktionen.

Die zweite Aussage ist ebenfalls eine Konsequenz des Satzes über implizite Funktionen, hier muß man jedoch ein wenig Vorarbeit leisten. Zunächst ist das Spektrum von A eine abzählbare Menge. Für Punkte in der Resolventenmenge ist $A - \zeta\mathbb{1}_{X_2}$ ein stetiger Isomorphismus von Banachräumen, insbesondere ein Fredholm–Operator[4] vom Index 0. Da der Index konstant ist unter kleinen Störungen, ist er auch für einen Spektralpunkt 0, insbesondere stimmen Dimension des Kernes und Kodimension des Bildes überein. Die Existenz der Projektoren $P_{1,2}$ folgt leicht aus unseren bisherigen Betrachtungen. Die Projektoren Q_1, Q_2 verschafft man sich durch Übergang zum Dualraum X_2^*. Wir setzen $A = A(\lambda_0)$. Zunächst definiert die Aktion von ρ_2 eine Darstellung ρ_2^* auf X_2^* durch $\rho_2(g)^*\ell(x) = \ell(\rho_2^{-1}(g)x)$. Der Operator A^* ist äquivariant bezüglich dieser Aktion, denn für $\ell \in D(A^*)$ rechnet man nach

$$\begin{aligned} A^*\rho_2(g)^*\ell(x) &= A^*\ell(\rho_2(g)^{-1}x) \\ &= \ell(A\rho_2(g)^{-1}x) \\ &= \ell(\rho_2(g)^{-1}Ax) \\ &= \rho_2(g)^*\ell(Ax) \\ &= \rho_2(g)^*A^*\ell(x). \end{aligned}$$

Damit gibt es einen äquivarianten Projektor Q_2^* auf den Kern von A^*. Sei $Q_2 = Q_2^{**}$. $Q_1 = \mathbb{1} - Q_2$ ist ein äquivarianter Projektor auf $\mathrm{IM}(A(\lambda_0))$.

Wir schreiben die Gleichung $F(\lambda, x)$ um, in dem wir

$$x = v + w, \; v = P_1 x, \; w = P_2 x$$

[4] Ivar Fredholm, 7.4.1866–17.8.1927, schuf wichtige Beiträge zur Theorie der Integralgleichungen und zeigte die formale Ähnlichkeit zur Theorie linearer Gleichungssysteme. Mit seinen Arbeiten wurde er zum wichtigen Wegbereiter der modernen Funktionalanalysis.

setzen, zu

$$\begin{aligned} Q_1 F(\lambda, v+w) &= 0 \\ Q_2 F(\lambda, v+w) &= 0. \end{aligned}$$

Linearisiert man die erste Gleichung nach w bei $(\lambda_0, 0, 0)$, so ergibt sich

$$D_w Q_1 F(\lambda_0, 0) = Q_1 D_x F(\lambda_0, 0) P_2 = Q_1 A(\lambda_0)_{|P_2 X_1}.$$

Letzteres ist ein Isomorphismus von Banachräumen und demnach gibt es Umgebungen $\lambda_0 \in U \subset \Lambda, 0 \in V \subset \ker(A(\lambda_0))$ und $0 \in W \subset P_2 X_1$, so daß alle Lösungen der Gleichung

$$Q_1 F(\lambda, v+w) = 0$$

in $U \times V \times W$ beschrieben werden durch $w = w(\lambda, v)$, nach dem Satz über implizite Funktionen. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt die im Satz angegebene Gleichung.

Wir müssen noch die Äquivarianz der entsprechenden Abbildungen zeigen. Nach unseren Vorüberlegungen können wir die Projektoren, die in der Formulierung auftauchen äquivariant wählen. Die Abbildung w ist dann äquivariant, denn ist (λ, x) eine Lösung von $Q_1 F(\lambda, x)$, so ist wegen der Äquivarianz von F, Q_1 auch $\rho_1(g)x$ eine Lösung, da

$$Q_1 F(\lambda, \rho_1(g)x) = \rho_2(g) Q_1 F(\lambda, x).$$

Ist $x = v+w(\lambda, v)$, dann ist $\rho_1(g)x = \rho_1(g)v+\rho_1(g)w(\lambda, v)$. Wegen der lokalen Auflösbarkeit der Gleichung ist auch $(\lambda, \rho_1(g)v+w(\lambda, \rho_1(g)v))$ eine Lösung, die lokale Eindeutigkeit garantiert

$$w(\lambda, \rho_1(g)v) = \rho_1(g) w(\lambda, v).$$

Aus der Äquivarianz von w folgt die von g unmittelbar. □

Im Vorgriff auf eine später zu untersuchende Situation, beweisen wir den folgenden Satz. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $X_1 \subset X_2$ Hilberträume sind.

Satz 2.3.3 *Seien $X_1 \subset X_2$ Hilberträume, $X_1 \subset X_2$ kompakt und dicht, $F : \Lambda \times X_1 \to X_2$. Hat F Variationsstruktur, so gilt dies auch für g, d.h. gibt es eine Abbildung $\mathcal{F} : \Lambda \times X \to \mathbb{R}$ mit $D_x \mathcal{F}(\lambda, x) = F(\lambda, x)$ für $x \in X_2$, so gibt es eine Abbildung $\mathcal{G} : \Lambda \times \ker(A(\lambda_0)) \to \mathbb{R}$ mit $D_v \mathcal{G}(\lambda, v) = g(\lambda, v)$*

Beweis: Da F Variationstruktur hat, ist $A(\lambda_0)$ symmetrisch. Also ist $\ker(A(\lambda_0)) = \mathrm{IM}(A(\lambda_0))^\perp$. Sei w wie im vorigen Beweis und $M_{LS} = \{v + w(\lambda, v) \mid v \in \ker(A(\lambda_0))\}$. Auf M_{LS} ist

$$D_x \mathcal{F}(\lambda, m) = F(\lambda, m) = \begin{pmatrix} Q_2 F(\lambda, m) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setze $\mathcal{G}(\lambda, v) = \mathcal{F}(\lambda, v + w(\lambda, v))$. Dann ist für $h \in \ker(A(\lambda_0))$ und mit der Bezeichnung $\imath_{\ker(A(\lambda_0))}$ für die Einbettung von $\ker(A(\lambda_0))$

$$\begin{aligned} D_v\mathcal{G}(\lambda, v)h &= D_x\mathcal{F}(\lambda, v + w(\lambda, v)) \begin{pmatrix} \imath_{\ker(A(\lambda_0))} \\ D_v w(\lambda, v) \end{pmatrix} h \\ &= < F(\lambda, v + w(\lambda, v)), \begin{pmatrix} \imath_{\ker(A(\lambda_0))} \\ D_v w(\lambda, v) \end{pmatrix} h > \\ &= < Q_2 F(\lambda, v + w(\lambda, v)), h > \\ &= < g(\lambda, v), h > . \end{aligned}$$

□

Interessiert man sich für mehr als Ruhelagen eines dynamischen Systems, so hilft die Lyapunov-Schmidt Reduktion i.a. nicht weiter, obwohl man in vielen Fällen noch durch Kunstgriffe spezielle Lösungen damit beschreiben kann. Um dynamische Phänomene, zumindest lokal nahe Ruhelagen durch endlich dimensionale Gleichungen beschreiben zu können, nutzt man eine andere Reduktion, welche auf invarianten Mannigfaltigkeiten beruht. Wir erinnern zunächst an den Satz über Zentrumsmannigfaltigkeiten, vgl. HENRY, [12].

Satz 2.3.4 *Seien $X_1 \subset X_2$ zwei Banachräume, $X_1 \subset X_2$ kompakt und dicht eingebettet. $A \in \mathcal{C}(X_1, X_2)$ sei abgeschlossen, $D(A) = X_1$, habe kompakte Resolvente und erzeuge eine analytische Halbgruppe $exp(At)$. Für $\alpha \in [0,1)$ sei $f : X_2^\alpha \to X_2$ eine nichtlineare glatte Abbildung mit $f(0) = 0$ und $D_x f(0) = 0$. Sei X_1^0 der endlich dimensionale Unterrraum von X_1 der Summe aller verallgemeinerten Eigenräume von $E_\lambda(A)$ zu den Eigenwerten mit verschwindenden Realteilen. Dann gibt es eine Mannigfaltigkeit $W^c \subset X_2$ tangential an X_1^0 bei $x = 0$, parametrisiert durch eine C^1–Abbildung $\sigma : X_1^0 \to Y$, wobei Y ein abgeschlossener Komplementärraum zu X_1^0 in X_1 ist. Die Mannigfaltigkeit W^c ist lokal invariant, d.h. es existiert eine Umgebung $U \subset X^\alpha$ mit $x \in U$ impliziert, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au + f(u) \\ u(0) &= x \end{aligned}$$

auf der Mannigfaltigkeit W^c bleibt. Sind A, f äquivariant bezüglich unendlich dimensionaler Darstellungen $\rho_{1,2}$ einer kompakten Lie–Gruppe G, so kann man W^c so konstruieren, daß es invariant unter der Gruppenaktion ist und die parametrisierende Abbildung σ äquivariant ist.

Definition 2.3.5 *W^C heißt Zentrumsmannigfaltigkeit.*

Beweis: Wir gehen vom nichtäquivarianten Fall aus, dort zeigt man die Existenz einer Zentrumsmannigfaltigkeit, indem man für ein modifiziertes System eine eindeutige Zentrumsmannigfaltigkeit nachweist. Sorgt man dafür, daß das modifizierte System äquivariant ist, so hat man auch für äquivariante Systeme (nach Modifikation) eine eindeutige Zentrumsmannigfaltigkeit. Nun ist $\rho_1(g)W^c$ wieder eine Zentrumsmannigfaltigkeit, wegen der Eindeutigkeit ist diese gleich W^c. Damit hat man gezeigt, daß die Zentrumsmannigfaltigkeit unter der Gruppenaktion invariant ist.

Wir kommen zur Äquivarianz von σ. Die Punkte $(x, \sigma(x))$ und $(\rho_1(g)x, \sigma(\rho_1(g)x))$ sind beide in W^c. Wegen der Invarianz ist auch $(\rho_1(g)x, \rho_1(g)\sigma(x)) \in W^c$. Da über $\rho_1(g)x$ aber nur ein Punkt liegt, ist $\rho_1(g)\sigma(x) = \sigma(\rho_1(g)x)$. Damit ist σ äquivariant. □

2.4 Lösungen mit maximaler Isotropie

Wir kommen nun zur Anwendung unserer bisherigen Resultate zur Lösung von Gleichungen. In den folgenden Abschnitten gehen wir davon aus, daß unsere unendlich dimensionale Situation $F(\lambda, x)$ durch eines der beschriebenen Verfahren reduziert wurde auf eine Gleichung $g(\lambda, v) = 0$ und $g : \Lambda \times V \to V$ ist äquivariant, $\Lambda = \mathbb{R}$. Daher ist die generische Annahme, daß V eine absolut irreduzible Darstellung der kompakten Lie–Gruppe ist, gerechtfertigt. Von dieser Situation wollen wir ausgehen.

Definition 2.4.1 *Es sei $g : \Lambda \times V \to V$ eine glatte Abbildung mit $g(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Ein Punkt $(\lambda_0, 0) \in \Lambda \times V$ ist ein Verzweigungspunkt, wenn jede Umgebung $U \subset \Lambda \times V$ Lösungen der Gleichung $g(\lambda, v) = 0$ enthält mit $v \neq 0$. Wir sprechen von Verzweigung von der trivialen Lösung.*

Bemerkung 2.4.2 *Natürlich kann man entsprechend Verzweigungen von beliebigen, gegebenen Lösungskurven oder Lösungsflächen definieren. Man kann durch eine einfache Transformation immer annehmen, daß eine solche Kurve (lokal) trivial ist. Im äquivarianten Fall, ist für irreduzible Darstellungen die Existenz der trivialen Lösung aufgrund des folgenden Lemmas immer gewährleistet.*

Lemma 2.4.3 *Sei $\rho : G \to V$ eine irreduzible Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe G und $g : \lambda \times V \to V$ glatt und invariant. Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so bildet $g(\lambda, .) : V \to V$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ den Raum* $\mathrm{Fix}(H)$ *in sich ab.*

Beweis: Für $h \in H$ und $v \in \mathrm{Fix}(H)$ gilt

$$\rho(h)g(\lambda, v) = g(\lambda, \rho(h)v) = g(\lambda, v).$$

□

Für allgemeine Verzweigungsprobleme kann man z.B. die Frage nach der Glattheit neuer Lösungszweige stellen. In Anwendungsproblemen spielt die Lage der Verzweigungspunkte eine wichtige Rolle. Ein Beispiel ist der sogenannte Eulersche[5] Knickstab. Man sieht daran, daß oft bei Verzweigungspunkten Lösungen enstehen, welche sich qualitativ von der Ausgangslösung unterscheiden. Der Knickstab ist auch ein, wenn auch sehr einfaches, Beispiel für das Auftreten von Symmetrien. Insbesondere ist es das einfachste Beispiel für das **Brechen von Symmetrien**. Die Lösung, die eine Auslenkung beschreibt, ist nicht mehr invariant unter der Spiegelung.

Definition 2.4.4 *Sei $g : \Lambda \times V \to V$ eine glatte und äquivariante Abbildung mit $g(\lambda, 0) = 0$ für alle λ. Ein Verzweigungspunkt heißt symmetriebrechend, wenn in jeder Umgebung des Verzweigungspunktes Lösungen (λ, v) liegen, so daß*

$$\mathrm{Stab}(v) \neq G$$

gilt.

In allgemeinen äquivarianten Verzweigungsproblemen interessiert neben der Lage der Verzweigungspunkte die Symmetrie der auftretenden Lösungen.

Der folgende Satz geht auf Vanderbauwhede[6] und Cicogna[7] zurück.

Satz 2.4.5 *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe, V ein endlich dimensionaler, reeller Vektorraum, $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ eine absolut irreduzible Darstellung. Sei $g : \mathbb{R} \times V \to V$ glatt und äquivariant. Dann gilt zunächst*

(i) $g(\lambda, 0) = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $D_v g(\lambda, 0) = c(\lambda) \mathbb{1}_V$.

Ist $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times V$ mit

$$c(\lambda_0) = 0 \text{ (notwendige Verzweigungsbedingung)} \tag{2.4.1}$$

und gilt

$$c'(\lambda_0) \neq 0 \text{ (Transversalitätsbedingung)} \tag{2.4.2}$$

so ist $(\lambda_0, 0)$ ein Verzweigunspunkt, ferner gilt für jede Isotropieuntergruppe H mit $\dim \mathrm{Fix}(H) = 1$: es gibt einen glatten Zweig $(\lambda(s), v(s))$ von Lösungen von $g = 0$ mit $\mathrm{Stab}(v(s)) = H$.

Bemerkung 2.4.6 *Eine Isotropieuntergruppe mit $\dim \mathrm{Fix}(H) = 1$ ist eine maximale Isotropieuntergruppe.*

---

[5]Leonhard Euler, 15.4.1707-18.9.1783 hinterließ ein äußerst umfangreiches wissenschaftliches Werk und erzielte in allen mathematischen Bereichen bahnbrechende Fortschritte. Er wurde zum Wegbereiter eines modernen Funktionenbegriffes und legte damit den Grundstein zum Studium von Differentialgleichungen

[6]André Vanderbauwhede, zeitgenössischer belgischer Mathematiker an der Universität Gent, immer wieder bewundert wegen seiner Darbietungen eines bekannten deutschen Seefahrerliedes.

[7]G. Cicogna, zeitgenössischer italienischen Physiker an der Universität Pisa

Beweis: Sei $g_H : \mathbb{R} \times \mathrm{Fix}(H) \to \mathrm{Fix}(H)$ die Einschränkung von g auf $\mathrm{Fix}(H)$. Diese ist aufgrund von Lemma 2.4.3 definiert. Sei $\mathrm{Fix}(H) = \{sx_0 \mid s \in \mathbb{R}\}$, so nimmt die Abbildung g_H die Gestalt

$$g_H(\lambda, x) = g_H(\lambda, sx_0) = h(\lambda, s)x_0$$

an, wobei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung mit $h(\lambda, 0) = 0$ ist. Weiter ist $D_s h(\lambda, 0) = c(\lambda)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Wir können mit dem Taylor'schen[8] Satz schreiben

$$h(\lambda, s) = \left(c'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \sum_{j \geq 2} c_j (\lambda - \lambda_0)^j \right) s + \tilde{h}(\lambda - \lambda_0, s).$$

Da $\tilde{h}(\lambda, 0) = 0$ ist, erlaubt eine weitere Anwendung des Satzes von Taylor $\tilde{h}$ zu schreiben als $\tilde{h}(\lambda, s) = sh_1(\lambda, s)$. Damit ist

$$h(\lambda, s) = s\left(c'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + O(|\lambda - \lambda_0|^2) + h_1(\lambda - \lambda_0, s) \right).$$

Division durch s erlaubt die Anwendung des Satzes über implizite Funktionen und liefert eine glatte Lösung $\lambda = \lambda(s)$. □

Definition 2.4.7 *Ist $\lambda(s) > \lambda_0$ für alle $s \neq 0$, so sprechen wir von einer superkritischen Verzweigung in $\mathrm{Fix}(H)$, ist $\lambda(s) < \lambda_0$ für alle $s \neq 0$, so nennen wir die Verzweigung subkritisch, ist keine der beiden Bedingungen erfüllt, so heißt die Verzweigung transkritisch.*

Bemerkung 2.4.8 *Man kann zeigen, daß in nichtäquivarianten, generischen Systemen keine Verzweigungen auftreten. Ist $G = \mathbb{Z}_2$, so ist generisch der Raum V eindimensional. Mit unseren Konventionen über die Eigenwertstörung bei λ_0 kann man (leicht!!) zeigen: Ist die Verzweigung superkritisch, so ist die verzweigende Lösung stabil, im subkritischen Fall instabil. Für Darstellungen in höher dimensionalen Fällen kann man keine allgemeinen Aussagen erwarten. Die bekannten Resultate sind am Ende dieses Abschnittes zusammengestellt.*

Satz 2.4.9 *Ist die Dimension des Fixraumes einer maximalen Isotropieuntergruppe ungerade, und sind ansonsten die Voraussetzungen des Satzes 2.4.5 erfüllt, so hat man immer verzweigende Lösungen mit der gegebenen Isotropie.*

Beweis: Dies folgt unter Verwendung des Abbildungsgrades. Der Index der trivialen Lösung für die Einschränkung g_H von g auf $\mathrm{Fix}(H)$ wechselt nämlich von 1 zu -1 oder umgekehrt. Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades impliziert, daß noch weitere Lösungen vorhanden sein müssen. □

[8] Brook Taylor, 18.8.1685-29.12.1731, wurde in Edmonton (Kanada) geboren, starb in London. Nach einem Studium der Rechtswissenschaften mit Promotion 1701 in Cambridge widmete er sich der Mathematik und den Naturwissenschaften. Es beschäftigte sich mit der schwingenden Saite und Differentialgleichungen. Aus dem Jahr 1712 stammt der nach ihm benannte Satz über die Potenzreihenentwicklung.

Will man die Stabilität verzweigender Lösungen untersuchen, muß man die äquivarianten Abbildungen bestimmen und damit die Eigenwerte ausrechnen. Wir werden darauf zurückkommen.

Oft hat man neben der Äquivarianz noch weitere Strukturen. Eine wichtige zusätzliche Eigenschaft ist dabei, daß ein System ein Potential besitzt. Dies ist vor allem oft in Anwendungen in der Kontinuumsmechanik gegeben. Im folgenden benötigen wir, daß in Systemen mit Potential, jede $\omega-$, bzw. $\alpha-$Limesmenge eine stationäre Lösung enthält. Dies folgt daraus, daß das Potential längs einer Lösung streng monoton fällt. Damit ist es auf jeder Limesmenge konstant. Da eine Trajektorie mit konstantem Potential ein Gleichgewicht ist, besteht eine Limesmenge aus einer oder unendlich vielen Ruhelagen.

Satz 2.4.10 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.4.5 (i), (ii) mit der notwendigen Verzweigungsbedingung (2.4.1) und der Transversalitätsbedingung (2.4.2) folgt für Gleichungen* $g(\lambda, x) = 0$ *mit Variationsstruktur* $g = \nabla_x \mathcal{G}, \mathcal{G} : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$, *daß* $(\lambda_0, 0)$ *Verzweigungspunkt ist und für jede maximale Isotropieuntergruppe* H *gibt es in jeder Umgebung von* $(\lambda_0, 0)$ *Lösungen* (λ, x) *mit* $\mathrm{Stab}(x) = H$.

Beweis: Wir zeigen, daß die Gleichung $g_H(\lambda, v) = 0$ in jeder Umgebung von $(\lambda_0, 0)$ nichttriviale Lösungen hat. Zunächst gilt für g_H, daß die triviale Lösung für $\lambda < \lambda_0$ total stabil und für $\lambda > \lambda_0$ total instabil ist (oder umgekehrt, o.B.d.A. behandeln wir nur den einen Fall). Zunächst müssen wir das System für $\lambda = \lambda_0$ genauer anschauen. Im weiteren betrachten wir das dynamische System

$$\dot{v} = g_H(\lambda, v).$$

$\alpha-$, bzw. $\omega-$Limesmengen beziehen sich auf diese Gleichung. Zu einem Anfangswert v_0 bezeichnet $\alpha(v_0)$, beziehungsweise $\omega(v_0)$ die entsprechende Limesmenge für die Lösung mit diesem Anfangswert.

Wir zeigen die Zwischenbehauptung: Es gibt ein $r_0 > 0$, so daß für jede Kugel K_r um 0 mit Radius $r < r_0$, die folgende Alternative wahr ist:

(i) Es gibt ein v_0, $|v_0| = r$, so daß $\alpha(v_0) = 0$ oder $\omega(v_0) = 0$ ist.

(ii) K_r enthält nichttriviale Lösungen.

Da im zweiten Fall der Satz gezeigt ist, nehmen wir an, daß es ein $r_1 > 0$ gibt, so daß es keine nichttrivialen Lösungen der Form (λ_0, v) mit $v \in K_r$ gibt. Wir müssen zeigen, daß der erste Fall eintritt. Hier bietet es sich an, drei Unterfälle zu betrachten:

(i.1) 0 ist asymptotisch stabil.

(i.2) 0 ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

(i.3) 0 ist instabil.

Im Fall (i.1) ist die Zwischenbehauptung klar, demzufolge nichts zu zeigen.

Im zweiten Fall (i.2) gibt es zu jedem $r > 0$ ein $\tau > 0$, so daß für einen Anfangswert in K_τ die Lösung für alle positiven Zeiten in K_r bleibt. Ist 0 nicht asymptotisch stabil, so existiert mindestens ein Anfangswert v_0, so daß die zugehörige Lösung nicht gegen 0 konvergiert. Dann ist die Limesmenge nichtleer und $\omega(v_0) \neq \{0\}$. Also gibt es nichttriviale Lösungen in K_r und wir sind im Fall (ii) und damit fertig.

Der letzte Fall (i.3) ist der einzig schwierige. Wir zeigen, daß es eine Lösung $v(t)$ gibt mit $0 \in \alpha(v(t))$. Es gibt ein $r_0 > 0$, so daß zu jedem $\tau > 0$ ein Anfangswert in $v_\tau \in K_\tau$ und ein $t_\tau > 0$ existiert mit $|v(t_\tau, v_\tau)| = r_0$, dabei ist wie üblich $v(t, v_0)$ die Lösung der Differentialgleichung die zum Zeitpunkt $t = 0$ in v_0 startet. Sei $w_\tau = v(t_\tau, v_\tau)$. Da die Kugel K_r kompakt ist, hat die Folge $w_{\frac{r_0}{n}}$ einen Häufungspunkt w_0. Ist 0 nicht in $\alpha(w_0)$, so hat die negative Halbtrajektorie von w_0 einen positiven Abstand von der Null. Dies widerspricht der stetigen Abhängigkeit vom Anfangswert. Man beachte, daß sogar gilt, entweder sind wir im Fall (ii), oder $v(t, w_0)$ konvergiert gegen 0 für $t \to -\infty$.

Sei nun $r_0 > r > 0$ fixiert und v_0 ein Punkt in K_r, $|v_0| = r$ mit $0 = \lim_{t\to\infty} v(t, v_0)$. Der andere Fall $0 = \lim_{t\to-\infty} v(t, v_0)$ geht aus dem jetzt behandelten durch Zeitumkehr hervor, wir beschränken uns o.B.d.A. auf diesen Fall. Wir zeigen nun die Existenz einer Umgebung W von w_0 auf der Sphäre S_r vom Radius r, so daß für $\lambda > \lambda_0$, $\lambda - \lambda_0$ genügend klein gilt, es gibt einen Punkt $w \in W$ mit $\omega(w) \subset K_r$. Daraus folgt offensichtlich die Behauptung, denn wegen der totalen Instabilität von 0, kann 0 nicht in $\omega(w)$ sein.

Zunächst beachten wir, daß durch die Wahl von w_0 und r erreicht werden kann, daß $v(t, w_0) \in K_r$ für alle $t > 0$ liegt, ferner schneidet $v(t, w_0)$ die Sphäre S_r bei w_0 transversal. Ersteres kann man durch die Wahl von w_0 erreichen. Konvergiert die Lösung $v(t, w_0)$ gegen 0, kann sie K_r nur endlich oft verlassen. Dann gibt es einen letzten Eintrittspunkt in K_r auf der Trajektorie. Dies ist o.B.d.A. w_0. Ist der Schnitt nicht transversal, so erreicht man durch eine kleine Modifikation von r die Transversalität. Dann gibt es eine Umgebung $W \subset S_r$ von w_0, so daß alle Trajektorien in W die Sphäre S_r transversal schneiden und mit wachsendem t in K_r eintreten. Dazu gibt es eine Umgebung U von λ_0, so daß diese Eigenschaft für alle $\lambda \in U$ erhalten bleibt. Sei $\lambda \in U$, $\lambda > \lambda_0$. Gibt es einen Anfangswert in W, so daß die zugehörige Lösung für alle Zeiten in K_r bleibt, ist der Satz gezeigt. Also machen wir die Annahme, daß es so eine Lösung nicht gibt. Sei Q ein Kreis mit Radius q um $w_0 \in W$. Setze $Z = \{w \in Q \mid |w - w_0| = q\}$. Jede Lösung mit Anfangswert in Q verläßt nach Annahme K_r. Sei für $w \in Q$

$$T_w = \inf \{t > 0 \mid |v(t, w)| > r\}.$$

Dies existiert und ist halbstetig von oben in w. Letzteres besagt, zu jedem w und $c > T_w$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U}$ von $w \in W$ mit $T_w < c$ für alle $w \in \tilde{U}$. Also ist $\infty > T = \max_{w\in Q} T_w$. Für $w \in W$ definieren wir die Abbildung

$$H : Q \times [0, T] \to K_r : (w, t) \mapsto \begin{cases} v(t, w), & 0 \leq t < T_w \\ v(T_w, w), & T_w \leq t \leq T \end{cases}.$$

$H(Z \times [0, T])$ ist topologisch ein Zylinder der K_r in zwei Teile zerlegt. Im Inneren dieses Zylinders ist die ursprüngliche Trajektorie durch w_0, also ist 0, eine Ruhelage, auch darin. Dies widerspricht der Tatsache, daß alle Lösungen in Q die Menge K_r in endlicher Zeit verlassen. Dies ist anschaulich klar, ein formales Argument liefert das Wazewski-Prinzip[9].

Definition 2.4.11 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Menge $V \subset U$ heißt Retrakt von U, falls es eine stetige Abbildung $\pi : U \to V$ gibt mit der Eigenschaft $\pi_{|V} = 1\!\!1_{|V}$. Die Abbildung π wird Retraktion genannt.*

Definition 2.4.12 *Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f : W \to \mathbb{R}^n$ in der ersten Komponente Lipschitz stetig. Weiter sei W^0 eine offene Teilmenge von W, ∂W^0 der Rand von W^0 und $\overline{W^0}$ der Abschluß von W^0. Ein Austrittspunkt von W^0 für die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u,t)$ ist ein Paar $(u_0,t_0) \in \partial W^0$, so daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $(u(t,t_0,u_0),t)$ für $t \in (t_0-\varepsilon, t_0)$ in W^0 enthalten ist. Ein Austrittspunkt wird echter Austrittspunkt genannt, falls es ein Intervall $(t_0, t_0+\delta)$ gibt, so daß für $t \in (t_0, t_0+\delta)$ die Lösung $(u(t,t_0,u_0),t)$ außerhalb von $\overline{W^0}$ ist. Mit W_a^0 bezeichnen wir die Menge der Austrittspunkte, mit W_{sa}^0 die Menge der echten (strikten) Austrittspunkte.*

Satz 2.4.13 *Sei $f : W \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich der ersten Komponente Lipschitz stetig. Jeder Austrittspunkt einer offenen Teilmenge W^0 von W sei echter Austrittspunkt, d.h. $W_a^0 = W_{sa}^0$. Sei $S \subset W^0 \cup W_a^0$ nichtleer. Angenommen $S \cap W_a^0$ ist kein Retrakt von S, aber ein Retrakt von W_a^0. Dann gibt es einen Anfangswert $(u_0,t_0) \in S$, so daß $(u(t,t_0,u_0),t)$ auf dem maximalen (rechtsseitigen) Existenzintervall in W^0 enthalten ist.*

Beweis: Wir beweisen den Satz durch Widerspruch. Unter der Annahme, daß der Satz falsch ist, konstruieren wir eine Retraktion, d.h. eine Abbildung mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften von S auf $S \cap W_a^0$. Zu jedem Paar $(t_0,u_0) \in S$ existiert ein $t_1 > t_0$, so daß für $t \in (t_0,t_1)$ die Lösung $(u(t,t_0,u_0),t) \in W^0$ ist, und für t_1 gilt $(u(t_1,t_0,u_0),t_1) \in \partial W^0$. Insbesondere ist $(u(t_1,t_0,u_0),t_1) \in W_a^0$. Wir definieren eine Abbildung $\pi : S \to W_a^0$ durch $\pi(u_0,t_0) = (u(t_1,t_0,u_0),t_1)$ falls $(u_0,t_0) \notin W_a^0$ und $\pi(u_0,t_0) = (u_0,t_0)$ falls $(u_0,t_0) \in W_a^0$. Dann gilt π ist stetig. Dies folgt, da jeder Austrittspunkt echter Austrittspunkt ist. Sei nun $\tau : W_a^0 \to S \cap W_a^0$ eine Retraktion. Dann ist $\tau \circ \pi$ eine Retraktion von S auf $S \cap W_a^0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Um den Beweis von Satz 2.4.10 formal abzuschließen, betrachten wir die gegebene Situation auf dem Inneren des Zylinders ohne eine kleine Kugel um die 0, nach einer Zeitumkehr. Dann sind alle Austrittspunkte strikte Austrittspunkte. Wähle S als die Vereinigung der Kugeloberfläche um die 0 mit Q und einer verbindenden Linie. Dann ist $W_a^0 \cap S$ offensichtlich ein Retrakt von W_a^0 aber keiner von S, denn S ist zusammenhängend und $S \cap W_a^0$ hat zwei Zusammenhangskomponenten. □

Im Anschluß an diese Resultate gibt es zwei natürliche Fragen:

[9]Tadeusz Wazewski (24.9.1896-5.9.1972, polnischer Mathematiker promovierte 1924 an der Univerité de Paris und wurde Professor In Krakau. Er wurde mit einer Gruppe weiterer Krakauer Professoren im Oktober 1939 von den Faschisten verhaftet und verbrachte die Kriegsjahre im KZ Oranienburg. Er widmete sich dem Studium von Differentialgleichungen, insbesondere mittels topologischer Methoden.

(i) Gibt es zu jedem Verzweigungsproblem, indem die Voraussetzungen (2.4.1) und (2.4.2) erfüllt sind, zu jeder maximalen Isotropieuntergruppe Lösungen.

(ii) Gegeben sei eine absolut irreduzible Darstellung und ein Verzweigungsproblem, welches den Bedingungen (2.4.1) und (2.4.2) genügt, gibt es dann irgendwelche stationären Lösungen.

Ohne Beweis wollen wir die Antwort auf diese Fragen angeben. Die erste wurde 1994 von Melbourne[10] beantwortet. Er hat eine absolut irreduzible Darstellung der Gruppe $D_3 \times \mathbf{SO}(2)^3$ auf dem $\mathbb{R}^6$ angegeben, für die eine maximale Isotropieuntergruppe mit zweidimensionalem Fixraum existiert, so daß für generische Probleme keine Verzweigung von Gleichgewichtslagen im zugehörigen Fixraum auftritt.

Die zweite Frage wird durch den folgenden Satz von Ize[11] beantwortet, der Beweis ist noch nicht publiziert.

Satz 2.4.14 *Ist $\rho : G \to \mathbf{GL}(n)$ eine absolut irreduzible Darstellung, dann gibt es eine Isotropieuntergruppe H mit $\dim \mathrm{Fix}(H)$ ist ungerade.*

Nach diesen Diskussionen über die Existenz verzweigender Lösungen, wollen wir noch kurz auf die Stabilität zurückkommen. Man muß dabei beachten, daß Lösungen im allgemeinen nicht isoliert sind, und deshalb die üblichen Stabilitätsbegriffe und Sätze zumindest modifiziert werden müssen. Wir stellen uns jetzt vor, daß wir die Stabilität auf der Zentrumsmannigfaltigkeit diskutieren. Ist die Zentrumsmannigfaltigkeit selbst stabil, so ist die Frage nach Stabilität einer Lösung der partiellen Differentialgleichung äquivalent zur Diskussion der Stabilität auf der Zentrumsmannigfaltigkeit. Die entsprechende Aussage für die Mannigfaltigkeit M_{LS} ist nicht in aller Allgemeinheit gültig, stimmt aber oft. Eine Diskussion von Stabilität und Lyapunov-Schmidt Reduktion findet sich in KIELHÖFER & LAUTERBACH [19].

Definition 2.4.15 *(i) Sei x_0 eine stationäre Lösung einer äquivarianten gewöhnlichen Differentialgleichung. Diese heißt stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß Lösungen zu Anfangswerten in einer Kugel mit Radius δ um x_0 für alle $t > 0$ in der Kugel mit Radius $\varepsilon > 0$ bleiben.*

(ii) Der Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ heißt stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit $\mathrm{dist}(x_1, \mathcal{O}(x_0)) < \delta$ impliziert, daß für alle $t > 0$ der Abstand der Lösung

$$\mathrm{dist}(x(t, x_1), \mathcal{O}(x_0)) < \varepsilon$$

ist.

[10] Ian Melbourne, jüngerer englischer Mathematiker, arbeitet an der University of Houston

[11] Jorge Ize, zeitgenössischer mexikanischer Mathematiker arbeitet schwerpunktmäßig über topologische Methoden in äquivarianten Systemen

(iii) *Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{O}(x_0)$ heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist, und jede genügend nahe bei $\mathcal{O}(x_0)$ startende Lösung $x(t)$ gegen $\mathcal{O}(x_0)$ konvergiert, d.h.*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \mathcal{O}(x_0)) = 0.$$

(iv) *Ist ein Orbit nicht stabil, so nennt man ihn instabil.*

(v) *Hat die Linearisierung in jedem Punkt des Orbits genau $\dim \mathcal{O}(x_0)$ Eigenwerte 0 und sonst keine auf der imaginären Achse, so nennen wir den Orbit hyperbolisch.*

Satz 2.4.16 *Hinreichend für asymptotische Stabilität ist, daß die Linearisierung an jedem Punkt des Orbits genau $n - \dim \mathcal{O}(x_0)$ Eigenwerte in der linken Halbebene hat.*

Beweis: Wird bewiesen, wie der entsprechende Stabilitätssatz für Systeme ohne Symmetrie. □

Wie bereits erwähnt muß diese Bedingung im Einzelfall nachgeprüft werden. Es gibt die beiden folgenden allgemeinen Resultate.

Satz 2.4.17 *Sei ρ eine absolut irreduzible Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe auf einem Vektorraum V und $f : \mathbb{R} \times V \to V$ sei eine äquivariante glatte Abbildung. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2.4.5 erfüllt. Ferner sei ein Term der Taylor–Reihe von f eingeschränkt auf $\operatorname{Fix}(H)$ von null verschieden. Sei $q(\lambda)$ der quadratische Anteil von f. Hat $D_x q(x_0)$ für $x_0 \in \operatorname{Fix}(H)$ nicht rein imaginäre Eigenwerte, so ist die Lösung, die vom Satz 2.4.5 garantiert wird, instabil.*

Beweis: Wie bereits gesagt, ist es eine leichte Überlegung, daß subkritische Zweige instabil sind. Damit ist die subkritische Verzweigung und auch im transkritischen Fall der subkritische Zweig als instabil nachgewiesen. Wir müssen daher die Behauptung noch für den superkritischen Zweig im transkritischen Fall und den superkritischen Fall untersuchen. Wir beschränken uns auf den ersten Fall. Man rechnet nach, daß die Spur des quadratischen Anteils invariant unter der Gruppenaktion ist. Da die Spur linear ist, ist sie 0. Aufgrund der Voraussetzungen ist der Realteil eines Eigenwertes ζ_r des quadratischen Anteils nicht null. Also gibt es mindestens einen Eigenwert dessen Vorzeichen von dem von ζ_r verschieden ist. Daraus folgt die Instabilität. □

Satz 2.4.18 *Sei V für $\ell > 1$ die $2\ell + 1$ dimensionale absolut irreduzible Darstellung von $\mathbf{O}(3)$. Dann ist die Eigenschaft, daß jede Lösung mit Isotropie $\mathbf{O}(2)$ oder $\mathbf{O}(2)^-$ instabil ist, für eine offene und dichte Teilmenge der Verzweigungsprobleme $f : \mathbb{R} \times V \to V$ erfüllt.*

Für einen Beweis siehe Chossat & Lauterbach [4]

2.5 Submaximale Lösungen

Betrachten wir uns die Beispiele aus den Anwendungen in denen symmetriebrechende Verzweigungen auftreten, so beobachten wir, daß wir einem System Energie zuführen müssen um Symmetriebrechung herbeizuführen. Beim Knickstab, bestand die Energiezufuhr im Aufwenden von Kraft, beim Taylor–Couette Experiment in der Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit. Andere bekannte Beispiele sind das Bénard[12]–Problem, in dem eine Flüssigkeitsschicht beheizt wird, oder dem sphärischen Bénard–Problem. Hier hat man eine Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Kugelschalen eingeschlossen, hält die Äußere auf konstanter Temperatur und beheizt die Innere räumlich homogen. Die zunächst auftretende Wärmeleitung, eine Lösung der Gleichungen, die die volle Symmetrie der Gleichung besitzt, wird durch eine Lösung ersetzt, in der die Flüssigkeit die Temperatur durch Bewegung transportiert. Man hat eine Symmetriebrechung. Diese und andere solcher Beispiele führten zur Vermutung, daß in generischen Systemen alle auftretenden Lösungen maximale Isotropie besitzen. Diese Vermutung wurde 1983 von Golubitsky[13] formuliert. In der Literatur ist diese Vermutung als MISC bekannt. MISC steht dabei für Maximal Isotropy Subgroup Conjecture. In diesem Abschnitt wollen wir drei Methoden darstellen, mit deren Hilfe eine große Klasse von Gegenbeispielen zu MISC konstruiert werden kann.

Für die erste Methode, brauchen wir eine gewisse Regularität der Verzweigungsprobleme. Diese ist lokal, nahe den Verzweigungspunkten nachzuprüfen.

Zunächst sei Δ eine maximale und Σ irgend eine Isotropieuntergruppe. Wir stellen uns die Frage, wie für $x_0 \in \mathrm{Fix}(\Delta)$ der Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ den Raum $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ schneidet, d.h. wie sieht die Menge

$$\mathcal{O}(x_0) \cap \mathrm{Fix}(\Sigma) \tag{2.5.3}$$

aus?

Man rechnet leicht nach

$$\begin{aligned} \gamma x_0 \in \mathrm{Fix}(\Sigma) \quad &\Rightarrow \quad \forall \sigma \in \Sigma : \sigma\gamma x_0 = \gamma x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma^{-1}\sigma\gamma x_0 = x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma^{-1}\sigma\gamma \in \Delta. \end{aligned}$$

Definition 2.5.1 *Setze*

$$N(\Sigma, \Delta) = \{\gamma \in G \mid \gamma^{-1}\Sigma\gamma \subset \Delta\}$$

oder

$$N(\Sigma, \Delta) = \{\gamma \in G \mid \gamma\Delta\gamma^{-1} \supset \Sigma\}.$$

---

[12]Hénri Bénard, 1874-1939, französischer Physiker, entdeckte Musterbildung in Konvektionsproblemen, speziell ein wabenförmiges Muster in einer ebenen, von unten beheizten Flüssigkeitsschicht.

[13]Marty Golubitsky, zeitgenössischer amerikanischer Mathematiker, arbeitet über Singularitätentheorie, die Rolle von Symmetrien in parameterabhängigen Systemen und äquivariante Dynamik

Man erhält leicht die folgenden Aussagen für $N(\Sigma, \Delta)$.

Lemma 2.5.2 *(i) $N(\Sigma, \Delta)$ ist abgeschlossen in G.*

(ii) $N(\Sigma, \Delta)$ ist invariant gegen Multiplikation mit Elementen von

- *$N(\Delta)$ von rechts*
- *$N(\Sigma)$ von links.*

Beweis:

(i) $\gamma_i \to \gamma$ & $\gamma_i^{-1}\Sigma\gamma_i \subset \Delta \Rightarrow \gamma^{-1}\Sigma\gamma \subset \Delta$.

(ii) $\tau \in N(\Delta)$, $\gamma \in N(\Sigma, \Delta)$, dann ist $\gamma\tau\Delta(\gamma\tau)^{-1} = \gamma(\tau\Delta\tau^{-1})\gamma^{-1} \supset \Sigma$
$\tau \in N(\Sigma), \gamma \in N(\Sigma, \Delta)$: $(\tau\gamma)^{-1}\Sigma\tau\gamma = \gamma^{-1}\Sigma\gamma \subset \Delta$.

□

Aus diesem Lemma folgt sofort, daß die Quotienten $N(\Sigma)\backslash N(\Sigma, \Delta)$ und damit natürlich auch $\Sigma\backslash N(\Sigma, \Delta)$ definiert sind.

Definition 2.5.3 *Gegeben sei eine absolut irreduzible Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe G auf dem Vektorraum V. Wir sagen eine Abbildung $f : \mathbb{R} \times V \to V$ ist normal, oder genügt der Bedingung (NOR), wenn es zu jedem Verzweigungspunkt $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung W von 0 in V gibt, so daß für alle $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ für jede Lösung $(\lambda, x) \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \times U$, deren Isotropiegruppe $\Delta = \mathrm{Stab}(x)$ maximal ist, eine Umgebung U von (λ, x) exisitiert, so daß für jede Isotropieuntergruppe Σ von G und jedes $c \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ gilt*

$$U \cap f^{-1}(0) \cap \mathrm{Fix}(\Sigma) \cap \{(\lambda, x) \mid \lambda = c\}$$

ist homöomorph zu einer Umgebung von $\mathbb{1}$ in $\Sigma\backslash N(\Sigma, \Delta)$ ist.

Man kann zeigen, daß diese Forderung generisch erfüllt ist. Wir werden sie in den untersuchten Beispielen nachrechnen. Es gilt sogar mehr, der folgende Satz stammt von Field[14].

Satz 2.5.4 *Für einparametrige Verzweigungsprobleme ist die Eigenschaft, daß alle Orbits von Lösungen, deren Existenz durch Satz 2.4.5 garantiert wird, hyperbolisch sind, generisch.*

Definition 2.5.5 *Für eine Darstellung ρ einer kompakten Lie–Gruppe G setzen wir*

$$I_\rho(G) = \{H \subset G \mid H \text{ ist Isotropieuntergruppe}\}.$$

[14]Mike Field, englischer Mathematiker an der University of Houston, mit tiefgründigen Beiträgen über äquivariante Dynamik.

Satz 2.5.6 *Sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ eine absolut irreduzible Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe G. $f : \mathbb{R} \times V \to V$ sei äquivariant und genüge der Regularitätsbedingung aus Definition 2.5.3. Für ein λ_0 seien die notwendige Verzweigungsbedingung (2.4.1) und die Transversalitätsbedingung (2.4.2) erfüllt. Sei $\Sigma \subset G$ eine Isotropieuntergruppe mit $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) = h > 1$. Es gebe ein Element $g \in G$ welches als $-\mathbb{1}_{\mathrm{Fix}(\Sigma)}$ auf $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ operiert. Setze*

$$r = |\{\Delta \in I_\rho(G) \mid \dim \mathrm{Fix}(\Delta) = 1,\ \Sigma \subset \Delta\}|.$$

Ist

(SM_Σ) $r \not\equiv h \bmod 2$,

so gibt es in jeder Umgebung von $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times V$ nichttriviale Lösungen (λ, x) mit

$$x \notin \bigcup_{\Delta \in I_\rho(G), \dim \mathrm{Fix}(\Delta) = 1} \mathrm{Fix}(\Delta).$$

Korollar 2.5.7 *Ist Σ submaximal (vgl. Definition 1.5.1), so haben die Lösungen, deren Existenz Satz 2.5.6 garantiert, Isotropie Σ.*

Beweis: Folgt sofort aus Satz 2.5.6. □

Beweis zu Satz 2.5.6: Betrachte die Einschränkung f_Σ von f auf $\mathbb{R} \times \mathrm{Fix}(\Sigma)$. Da wir voraussetzen, daß die Anzahl der maximalen Isotropieuntergruppen, welche Σ enthalten, endlich ist, besagt die Regularitätsbedingung, daß für festes λ nahe λ_0 alle Lösungen mit maximaler Isotropie, die aus der trivialen Lösung heraus verzweigen, isoliert sind. Insbesondere können wir eine Umgebung $W \subset V$ von 0 finden, daß in $W \times \{\lambda\}$ alle Nullstellen isoliert sind und keine Lösungen auf dem Rand von $U \times (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ liegen. Dann läßt sich der Abbildungsgrad anwenden. Sind alle Lösungen isoliert (in V, für festes λ) und ist 0 regulärer Wert, so ist die Summe d_λ der Indizes der einzelnen Lösungen unabhängig von λ (vgl. Anhang C). Dabei ist der Index $i^\Sigma_\lambda(x)$ einer Lösung (λ, x) das Vorzeichen von $\det D_x f_\Sigma(\lambda, x)$. Wir wählen $\lambda_\pm$ in

$$\lambda_0 - \varepsilon < \lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+ < \lambda_0 + \varepsilon.$$

Da der Normalisator $N(\Sigma)$ auf $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ operiert, treten alle Lösungen als $N(\Sigma)$ Orbits auf. Insbesondere gibt es ein Element, welches als $-\mathbb{1}_{\mathrm{Fix}(\Sigma)}$ operiert. Damit gibt es zu jeder Lösung (λ, x), $x \in \mathrm{Fix}(\Sigma)$ die Lösung $(\lambda, -x)$. Da beide konjugiert sind, sind die Indizes $i^\Sigma_\lambda(x) = i^\Sigma_\lambda(-x)$ gleich. Der Index der trivialen Lösung ändert sich um

$$i^\Sigma_{\lambda_-}(0) - i^\Sigma_{\lambda_+}(0) = -(1 + (-1)^h).$$

In jedem Fixraum, jeder maximalen Isotropieuntergruppe Δ hat man zwei Lösungen $\pm x_\Delta$ mit gleichem Index. Sei nun d'_λ die Summe aller Indizes von nichttrivialen Lösungen. Setze

$$\{\Delta \in I_\rho(G) \mid \dim \mathrm{Fix}(\Delta) = 1,\ \Sigma \subset \Delta\} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}.$$

Es gilt

$$d'_{\lambda_+} - d'_{\lambda_-} = 2\sum_{s=1}^{r} i(s)d(s),$$

wobei $i(s) = i_\lambda^\Sigma(x_{\Delta_s})$ und

$$d(s) = \begin{cases} 1 & \text{bei superkritischer Verzweigung} \\ -1 & \text{bei subkritischer Verzweigung} \end{cases} \quad \text{in } \operatorname{Fix}(\Delta_s).$$

Je nachdem ob r gerade oder ungerade ist, erhält man verschiedene Restklassen modulo 4, nämlich

$$d'_{\lambda_+} - d'_{\lambda_-} = (1 - (-1)^r) \bmod 4.$$

Dann ist

$$i_{\lambda_-}^\Sigma(0) - i_{\lambda_+}^\Sigma(0) - (d'_{\lambda_+} - d'_{\lambda_-}) = ((-1)^r - (-1)^h) \bmod 4.$$

Ist $r - h$ ungerade, so ist dies niemals kongruent $0 \bmod 4$. □

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie dieser Satz zu Lösungen mit submaximaler Isotropie führt.

Ein anderes Verfahren Lösungen mit submaximaler Isotropie zu erhalten beruht auf dem Satz über invariante Sphären von Field [9].

Satz 2.5.8 (Invariante Sphären) *Sei G eine kompakte Lie–Gruppe, und $\rho : G \to$* $\mathbf{GL}(n)$ *eine irreduzible Darstellung, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein G-äquivariantes Verzweigungsproblem. Wir nehmen an, daß f die folgende Gestalt hat:*

$$f(\lambda, x) = \lambda x - \beta\|x\|^2 x + C(x) + H(x, \lambda), \tag{2.5.4}$$

mit kubischem Term $C(x)$, welcher keinen Anteil (in der Taylorentwicklung) der Form $\|x\|^2 x$ hat und $H = O(|\lambda|^2\|x\| + |\lambda|\|x\|^3 + \|x\|^4)$. Dann gibt es $\beta_0 > 0$, so daß für alle $\beta > \beta_0$ eine einparametrige Schar invarianter Sphären $(\lambda(s), S(s))$, $S(s)$ homöomorph zu S^{n-1} bei $\lambda = 0$ superkritisch verzweigt. Es gibt eine kompakte Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ des Ursprungs und ein $s_0 > 0$, so daß die Trajektorie zu jedem Anfangswert $(\lambda(s), x_0) \in \{\lambda(s)\} \times U$, $x_0 \neq 0$, $0 < s < s_0$, gegen die invariante Sphäre $S(s)$ konvergiert.

Beweis: Wir können hier nur eine Beweisskizze geben, ein genauer Beweis steht in FIELD [9]. Wir betrachten einen Spezialfall, $f(\lambda, x) = \lambda x + Q(x)$, wobei Q eine homogene, polynomiale Abbildung von Grad $d \geq 3$ ist und bezüglich eines geeigneten Skalarproduktes $\langle ., . \rangle$ gilt

$$\langle Q(x), x\rangle < 0 \ \forall x \neq 0. \tag{2.5.5}$$

Man beachte, daß deswegen d ungerade ist. Wir zeigen nun, für ein solches f die gewünschten Eigenschaften. Für $y \in S^{n-1}, r \in \mathbb{R}$, setzen wir $x = ry$. Damit erhält man das folgende Paar von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \lambda r + r^d \langle Q(y), y\rangle \\ \dot{y} &= r^{d-1}(Q(y) - \langle Q(y), y\rangle y). \end{aligned}$$

Falls wir uns auf $\lambda > 0$ einschränken und die Koordinatentransformation $r = \lambda^{\frac{1}{d-1}} R$, $s = \lambda t$ betrachten, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R + R^d \langle Q(y), y\rangle \\ \dot{y} &= R^{d-1}(Q(y) - \langle Q(y), y\rangle y).\end{aligned}$$

Hier und im weiteren steht der Punkt für die Aleitung nach s. Aufgrund der Bedingung (2.5.5) ist die Lösung dieser Gleichung für alle Zeiten definiert. Die Sphäre $S^{n-1} \times \{0\}$ ist offensichtlich abstoßend. Aus der Invarianz folgt, daß eine Lösung $(R(s), y(s))$ mit $R(0) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ eine von Null verschiedene erste Komponente $R(s)$ hat.

Setze $C = \min\{\langle Q(y), y\rangle \mid y \in S^{n-1}\}$ und $R_\rho = (-1/C)^{\frac{1}{d-1}}$. Nun folgt sogar aus $R(0) > R_\rho$, daß $R(s) > R_\rho$ für alle $s > 0$.

Sei nun $E = C(S^{n-1}, \mathbb{R})$ mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz und $F \subset E$ der Unterraum aller $q \in C(S^{n-1}, \mathbb{R})$ mit $f(S^{n-1}) \subset [R_\rho, \infty)$. Ist $q \in F$, so definiert

$$\operatorname{graph}(q) : S^{n-1} \to S^{n-1} \times \mathbb{R} : y \mapsto (y, q(y))$$

eine stetige Abbildung, die sogenannte Graphenabbildung. Im weiteren sei $F_{\mathbf{graph}}$ die F zugeordnete Menge von Graphenabbildungen. Zum Beweis der Existenz der invarianten Sphären konstruieren wir eine Transformation dieser Graphenabbildung, weisen nach, daß dies eine Kontraktion ist. Der zugehörige Fixpunkt ist dann die invariante Sphäre. Betrachte die modifizierte Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R^{2-d} + R\langle Q(y), y\rangle \\ \dot{y} &= Q(y) - \langle Q(y), y\rangle y.\end{aligned}$$

Diese hat das gleiche Phasenportrait wie die obige Gleichung. Die zugehörige Lösung sei $\Phi = (\Phi_R, \Phi_y) : \mathbb{R} \times S^{n-1} \to \mathbb{R} \times S^{n-1}$. Φ_y hängt nicht von R ab. Nun ist die Abbildung $y \mapsto \Phi_y(1, y)$ ein Diffeomorphismus von S^{n-1} in sich. Daher können wir eine Graphenabbildung $(y, q(y))$ transformieren zu

$$(y, q(y)) \mapsto (y, \mathcal{Q}(y)) \text{ mit } \mathcal{Q}(\Phi_y(1, y)) = \Phi_R(1, (y, q(y))).$$

Diese Transformation sei Γ. Es bleibt nachzuweisen, daß Γ eine Kontraktion ist, und daß der Fixpunkt die gewünschten Eigenschaften besitzt. Dies sei zur Übung empfohlen! $\square$

Um diesen Satz zum Auffinden von Lösungen mit nichtmaximaler Isotropie anzuwenden, braucht man die Euler–Charakteristik einer Mannigfaltigkeit. Hier benötigen wir nur,

(i) daß die Euler–Charakteristik $\chi(M)$ einer Mannigfaltigkeit M gegeben ist, durch die Summe der Indizes der singulären Punkte eines beliebigen Vektorfeldes auf M, das nur der Einschränkung unterliegt, daß alle singulären Punkte regulär sind, d.h. die Linearisierung am singulären Punkt hat keinen Eigenwert 0.

(ii) die Euler–Charakterisitk der n–Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist $1 + (-1)^n$. Genau wie im Argument des Beweises des Satzes 2.5.6 kann man ein generisches Problem anschauen, bei dem z.B. alle Orbits verzweigender Lösungen hyperbolisch sind und dann die Beiträge zur Euler–Charakteristik auf der invarianten Sphäre in $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ der Lösungen mit maximaler Isotropie $\Delta \supset \Sigma$ ausrechnen,

(iii) die Existenz von Lösungen mit nichtmaximaler Isotropie unabhängig von $\beta \in \mathbb{R}$ ist.

Während die beiden ersten Aussagen allgemein bekannt sein dürften, ist die letzte Aussage nicht offenkundig. Der Beweis dieser Aussage ist recht lang und auch schwierig, wir wollen zumindest die zugrundeliegende Konstruktion angeben, die Ausgangspunkt neuerer Entwicklungen der Theorie ist. Dabei werden Fragestellungen über verzweigende Lösungen und ihre Symmetrie auf geometrische, bzw. algebraisch geometrische Fragestellungen zurückgeführt.

Seien $e_1, \dots, e_k$ eine minimale Menge von Erzeugenden des Moduls äquivarianter Abbildungen $P_G(V,V)$. Dann ist dies natürlich auch eine minimale Menge von Erzeugenden von $P_G(\mathbb{R}^s \times V, V)$, wobei die Akion von G auf dem Parameter trivial sein soll. Setze

$$\mathcal{F} : V \times R^k \to V : (x, t_1, \dots, t_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} t_i e_i(x).$$

Mit der trivialen Aktion auf den t's ist $\mathcal{F}$ eine äquivariante Abbildung. Sei $\mathcal{E} = \mathcal{F}^{-1}(0)$. $\mathcal{E}$ ist eine G–invariante, abgeschlossene, reell algebraische Teilmenge von $V \times \mathbb{R}^k$. (Reell algebraisch bedeutet, es ist die gemeinsame Nullstellenmenge einer endlichen Anzahl reellwertiger Polynome mit reellen Koeffizienten). Für einen Orbittyp τ sei $V_\tau = \{x \in V \mid \tau(x) = \tau\}$ und dann

$$\mathcal{E}_\tau = \{(x,t) \in \mathcal{E} \mid x \in V_\tau\}.$$

Wie wir wissen, ist die Menge der Orbittypen halbgeordnet und es gilt

$$\tau_1 \geq \tau_2 \Leftrightarrow V_{\tau_1} \subset \overline{V_{\tau_2}}.$$

Dies überträgt sich sofort auf die $\mathcal{E}_\tau$, d.h.

$$\mathcal{E}_{\tau_1} \cap \mathcal{E}_{\tau_2} \neq \emptyset \Leftrightarrow \tau_2 \leq \tau_1.$$

Aufgabe 2.5.9 *In der folgenden Definition sind g_τ und n_τ wohl definiert.*

Definition 2.5.10 *Zu einem Orbittyp τ sei g_τ die Dimension des Orbits eines Punktes vom Orbittyp τ und $n_\tau = \dim(N(\mathrm{Stab}(x))/\mathrm{Stab}(x))$.*

Damit kommt man zu dem folgenden einfachen Lemma.

Lemma 2.5.11 *Für einen Orbittyp τ gilt*

(i) $\mathcal{E}_\tau$ ist eine glatte G–invariante Mannigfaltigkeit der Dimension $(k + g_\tau - n_\tau)$.

(ii) Identifiert man V und $\mathbb{R}^k$ mit dem entsprechenden Faktor in $V \times \mathbb{R}^k$ so gilt

(a) $\mathcal{E}_\tau \cap V = V_\tau$.

(b) $\mathcal{E}_\tau \cap R^k = \emptyset$ *falls* $\tau \neq G$

(c) $\mathcal{E}_\tau \cap R^k = \mathbb{R}^k, \tau = G$.

Beweis:

(i) Die G–Invarianz von $\mathcal{E}_\tau$ ist klar.

(ii) Folgt sofort aus den Definitionen.

□

Bemerkung 2.5.12 *Die $\mathcal{E}_\tau$ sind i.a. keine reell algebraischen Mengen, sondern nur noch reell semialgebraisch!*

Definition 2.5.13

$$A_\tau = \overline{\mathcal{E}_\tau} \cap \mathbb{R}^k.$$

Satz 2.5.14 *Es ist genau dann eine generische Eigenschaft für ein Verzweigungsproblem, daß Lösungen vom Orbittyp τ auftreten, wenn* $\operatorname{codim} A_\tau = 1$ *ist.*

Beweis: siehe Field & Richardson [10]. □

Aus diesem Satz folgt sofort, daß das (generische) Auftreten von Lösungen mit gegebenem Orbittyp nicht von speziellen Koeffizienten in der Gleichung abhängt!

Auf diese Weise erhält man Bedingungen, die jenen gleichen, die im obigen Satz angegeben wurden.

2.6 Sphärische Probleme

In diesem Abschnitt wollen wir kurz das Verzweigungsverhalten für Probleme mit sphärischer Symmetrie untersuchen. Wie wir bereits wissen, gibt es zu jeder ungeraden Zahl, bis auf Äquivalenz, genau eine Darstellung der Gruppe $\mathbf{SO}(3)$ und zwei Darstellungen der Gruppe $\mathbf{O}(3)$. Diese beiden Darstellungen unterscheiden sich durch die Wirkung des Elementes $-\mathbb{1}$, dies kann als $\pm\mathbb{1}_V$ auf dem Darstellungsraum V operieren. Da die Gruppe $\mathbf{SO}(3)$ auf Funktionen u durch $(\gamma, u) \mapsto u \circ \gamma^{-1}$wirkt, hat man die folgende Festlegung.

Definition 2.6.1 *Sei $\rho_\ell : \mathbf{SO}(3) \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{2\ell+1})$ die irreduzible Darstellung von $\mathbf{SO}(3)$ in der entsprechenden Dimension. Die Darstellung von $\mathbf{O}(3)$, welche die von $\mathbf{SO}(3)$ fortsetzt mit*

$$-\mathbb{1}u = (-1)^\ell u$$

heißt die natürliche Darstellung von $\mathbf{O}(3)$ in der Dimension $2\ell + 1$.

Im folgenden beschränken wir uns auf die irreduzible, natürliche Darstellung von $\mathbf{O}(3)$ in der entsprechenden Dimension. Zunächst brauchen wir die Dimensionen der Fixräume der Untergruppen von $\mathbf{O}(3)$ und eine Aussage, welche dieser Untergruppen Isotropieuntergruppen, welche maximale Isotropieuntergruppen sind. Wir beginnen mit einer Beschreibung aller (abgeschlossenen) Untergruppen von $\mathbf{SO}(3)$ und $\mathbf{O}(3)$.

Lemma 2.6.2 *(i) Die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbf{SO}(3)$, sind bis auf Konjugation gegeben in den folgenden Listen, zunächst die planaren Untergruppen, die eine ausgezeichnete Achse besitzen,*

$$\mathbb{1}, \mathbb{Z}_n, D_n, \mathbf{SO}(2), \mathbf{O}(2)$$

die nichtplanaren, auch exzeptionell genannten Gruppen sind die Symmetriegruppe des Tetraeders $\mathbb{T}$, die des Oktaeders $\mathbb{O}$ und des Ikosaeders $\mathbb{I}$.

(ii) Bei den Untergruppen von $\mathbf{O}(3)$ unterscheidet man drei Klassen:

Klasse I *Untergruppen der Form $L \subset \mathbf{SO}(3)$.*

Klasse II *Untergruppen der Form $L \oplus \mathbb{Z}_2^c$, mit $L \subset \mathbf{SO}(3)$ und $\mathbb{Z}_2^c = \{\pm\mathbb{1}\}$.*

Klasse III *Untergruppen $L \subset \mathbf{O}(3)$, $L \not\subset \mathbf{SO}(3)$, $-\mathbb{1} \notin L$.*

Jede Gruppe L der Klasse III hat die folgende Eigenschaften (i) $H = L \cap \mathbf{SO}(3)$ ist eine Gruppe vom Index 2 in L und (ii) die kanonische Projektion K von L auf $\mathbf{SO}(3)$ ist isomorph zu L, jedoch nicht konjugiert in $\mathbf{O}(3)$. Andrerseits gibt es zu jedem Paar (K, H) von Untergruppen von $\mathbf{SO}(3)$ mit $H \subset K$ vom Index 2 genau eine Untergruppe der Klasse III $L \subset \mathbf{O}(3)$, mit $H = L \cap \mathbf{SO}(3)$, $K = \pi(L)$, wobei π für die kanonische Projektion steht. Mit der Schreibweise $L = (K, H)$ erhält man bis auf Konjugation die folgende Liste von Untergruppen der Klasse III

$$\mathbb{Z}_{2n}^- = (\mathbb{Z}_{2n}, \mathbb{Z}_n),\ D_{2n}^d = (D_{2n}, D_n),\ D_n^z = (D_n, \mathbb{Z}_n),$$
$$\mathbb{O}^- = (\mathbb{O}, \mathbb{T}),\ \mathbf{O}(2)^- = (\mathbf{O}(2), \mathbf{SO}(2)).$$

Beweis: Aus den Übungen kennen wir bereits die Liste von abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbf{SO}(3)$. Wir müssen nur noch überlegen, wie wir daraus die Untergruppen von $\mathbf{O}(3)$ gewinnen. Klar ist, daß jede Untergruppe von $\mathbf{O}(3)$ in einer der Klassen I, II oder III sein muß. Damit muß nur noch gezeigt werden, daß die Untergruppen der Klasse III die dargestellte Form haben.

Da $-\mathbb{1} \notin L$ ist $\pi : L \to \pi(L)$ ein Gruppenisomorphismus. Da $L = H \cup gH$ für ein $g \in L \setminus H$, hat man $\pi(L) = H \cup \pi(g)H$ und H ist vom Index 2 in $\pi(L)$.

Ist (K, H) ein Paar von Untergruppen von $\mathbf{SO}(3)$ mit $K \supset H$ vom Index 2, so ist $H \cup -\mathbb{1}(K \setminus H)$ eine Untergruppe von $\mathbf{O}(3)$, und sie ist von der Klasse III.

Um die Vollständigkeit der Liste von Klasse III Untergruppen nachzuprüfen, muß man nur alle Paare (K, H) von Untergruppen von $\mathbf{SO}(3)$, $K \supset H$ vom Index 2 anschreiben. □

Während es bei den Untergruppen der Klassen I, II klar ist, wann eine Gruppe in der anderen enthalten ist, ist dies für Gruppen der Klasse III weniger offensichtlich.

Lemma 2.6.3 *Eine Untergruppe $L_1 = (K_1, H_1)$ der Klasse III ist genau dann in einer anderen Untergruppe $L_2 = (K_2, H_2)$ der Klasse III enthalten, wenn gilt*

(i) $H_1 \subset H_2$

(ii) $K_1 \subset K_2$

(iii) $K_1 \not\subset H_2$.

Beweis: Die ersten beiden Bedingungen sind offensichtich notwendig. Angenommen $K_1 \subset H_2$. Sei $g \in K_1 \setminus H_1$. Dann ist $-g \in L_1$, aber $-g \notin L_2$, denn $g \in L_2$, $-g \in L_2$ bedeuten $-\mathbb{1} \in L_2$ im Widerspruch zur Annahme, daß L_2 eine Untergruppe der Klasse III ist.

Sind (i)-(iii) erfüllt, $g \in L_1$. Ist $g \in H_1$, so ist $g \in H_2 \subset L_2$. Ist $g \notin H_1$, so ist $-g \in K_1$, also $-g \in K_2$. Wäre $-g \in H_2$, so betrachteten wir die kleinste Gruppe M welche H_1 umfaßt und $-g$ enthält. Da $-g \in K_1$, $H_1 \subset K_1$ und H_1 in K_1 Index 2 hat, ist $K_1 = M$. Wegen (i) und $-g \in H_2$ ist $M \subset H_2$, also $K_1 \subset H_2$ im Widerspruch zu (iii). □

Beispiel 2.6.4 *Hier zeigen wir, daß dieses Lemma mit Sorgfalt angewendet werden sollte. Wir stellen uns die Frage, ob $D_3^z \subset D_6^d$? Zur Erinnerung $D_3^z = (D_3, \mathbb{Z}_3)$, $D_6^d = (D_6, D_3)$. Also sind (i), (ii) erfüllt, (iii) ist nicht erfüllt und $D_3^z \not\subset D_6^d$. Diese Antwort ist falsch! Es gibt zwei Untergruppen $D_3^{(1)}, D_3^{(2)}$ in D_6. Ist nun $D_3^z = (D_3^{(1)}, \mathbb{Z}_3)$ und $D_6^d = (D_6, D_3^{(2)})$, so sind (i)-(iii) erfüllt, und $D_3^z \subset D_6^d$. Normalerweise ist für diese Betrachtungen nur interessant, ob die Enthaltensbeziehung bis auf Konjugation erfüllt ist.*

Von großem Nutzen ist oft die sogenannte Zerlegung der Untergruppen in eine disjunkte Vereinigung von Untergruppen.

Definition 2.6.5 *Eine Gruppe H ist die disjunkte Vereinigung von Untergruppen H_i, wenn gilt*

$$H = \bigcup_i H_i, \tag{2.6.6}$$

und für $i \neq j$ ist

$$H_i \cap H_j = \{\mathbb{1}\}. \tag{2.6.7}$$

Wir schreiben dafür

$$H = \dot{\bigcup_i} H_i.$$

In diesem Sinne kann jede endliche Untergruppe von $\mathbf{O}(3)$ als disjunkte Vereinigung zyklischer Untergruppen aufgefaßt werden. Im folgenden bedeutet $\dot{\bigcup}^n H$ die disjunkte Vereinigung von n zu H konjugierten Untergruppen.

Lemma 2.6.6

$$D_n = \mathbb{Z}_n \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{n} \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{T} = \dot\bigcup^{4} \mathbb{Z}_3 \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{3} \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{O} = \dot\bigcup^{3} \mathbb{Z}_4 \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{4} \mathbb{Z}_3 \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{6} \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{I} = \dot\bigcup^{6} \mathbb{Z}_5 \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{10} \mathbb{Z}_3 \dot\cup \dot\bigcup^{15} \mathbb{Z}_2$$

$$D_n^z = \mathbb{Z}_n \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{n} \mathbb{Z}_2^-$$

$$D_{2n}^d = \mathbb{Z}_{2n}^- \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{n} \mathbb{Z}_2 \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{n} \mathbb{Z}_2^-$$

$$\mathbb{O}^- = \dot\bigcup^{3} \mathbb{Z}_4^- \,\dot\cup\, \bigcup^{4} \mathbb{Z}_3 \,\dot\cup\, \dot\bigcup^{6} \mathbb{Z}_2^-$$

Beweis: Einfach nachzuprüfen! □

Diese Zerlegungen ermöglichen es, geschlossene Formeln für die Dimensionen der Fixräume aller Untergruppen von $\mathbf{SO}(3)$, bzw. $\mathbf{O}(3)$ in den irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{SO}(3)$ (bzw. $\mathbf{O}(3)$) anzugeben.

Lemma 2.6.7 *Die folgende Liste gibt für die irreduzible Darstellung der Dimension $2\ell+1$ von $\mathbf{SO}(3)$ die Dimensionen der Fixräume aller abgeschlossenen Untergruppen.*

Σ	$\dim \mathrm{Fix}(\Sigma)$
$\mathbb{Z}_n$	$2\left[\frac{\ell}{n}\right]+1$
D_n	$\left[\frac{\ell}{n}\right]$ *ℓ ungerade* $\left[\frac{\ell}{n}\right]+1$ *ℓ gerade*
$\mathbf{SO}(2)$	*1*
$\mathbf{O}(2)$	0 *ℓ ungerade* 1 *ℓ gerade*
$\mathbb{T}$	$2\left[\frac{\ell}{3}\right]+\left[\frac{\ell}{2}\right]-\ell+1$
$\mathbb{O}$	$\left[\frac{\ell}{4}\right]+\left[\frac{\ell}{3}\right]+\left[\frac{\ell}{2}\right]-\ell+1$
$\mathbb{I}$	$\left[\frac{\ell}{5}\right]+\left[\frac{\ell}{3}\right]+\left[\frac{\ell}{2}\right]-\ell+1$

Beweis: Wir wollen den Beweis in die Übungen verlegen. □

Lemma 2.6.8 *Die Dimensionen der Fixräume in Darstellungen der Gruppe $\mathbf{O}(3)$ erhält man aus folgenden Regeln: ist ℓ gerade, so entnimmt man die Dimension für Untergruppen L der Klasse I oder Untergruppen der $L \oplus \mathbb{Z}_2^c$ der Klasse II aus dem entsprechenden Eintrag für L in obiger Liste.*

Für ungerades ℓ sind Untergruppen der Klasse II niemals Isotropieuntergruppen. Für Untergruppen der Klasse I findet man die Werte im obigen Eintrag. Für Untergruppen der Klasse III gibt die folgende Tabelle Auskunft.

Σ	$\dim \mathrm{Fix}(\Sigma)$
$\mathbb{Z}_{2n}^-$	$2\left[\frac{\ell+n}{2n}\right]$
D_n^z	$\left[\frac{\ell}{n}\right]+1$ ℓ *ungerade* $\left[\frac{\ell}{n}\right]$ ℓ *gerade*
D_{2n}^d	$\left[\frac{\ell+n}{2n}\right]$
$\mathbf{O}(2)^-$	0 ℓ *gerade* 1 ℓ *ungerade*
$\mathbb{O}^-$	$\left[\frac{\ell}{3}\right]-\left[\frac{\ell}{4}\right]$

Als nächstes verschaffen wir uns die Normalisatoren der Untergruppen von $\mathbf{O}(3)$.

Lemma 2.6.9 *Die Normalisatoren der Unterguppen von* $\mathbf{SO}(3)$ *sind:*

(i) $N(\mathbb{Z}_n) = N(\mathbf{SO}(2)) = N(\mathbf{O}(2)) = \mathbf{O}(2)$,

(ii) $N(D_n) = D_{2n}$ *für* $n > 2$,

(iii) $N(D_2) = N(\mathbb{T}) = N(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$,

(iv) $N(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$.

Beweis: Zunächst sind $\mathbf{O}(2), \mathbb{O}, \mathbb{I}$ maximale Untergruppen und damit normal oder der jeweilige Normalisator stimmt mit der Gruppe selbst überein. Man rechnet leicht nach, daß $\mathbf{SO}(3)$ keine normalen (nichttrivialen) Untergruppen besitzt, deshalb hat man die zweite Alternative. Der Normalisator von $\mathbf{SO}(2)$ ist mindestens $\mathbf{O}(2)$, wegen der Maximalität von $\mathbf{O}(2)$ also gleich $\mathbf{O}(2)$. $\mathbb{Z}_n$ ist die einzig zyklische Untergruppe von $\mathbf{SO}(2)$, daher ist der Normalisator von $\mathbb{Z}_n$ gleich dem von $\mathbf{SO}(2)$. Damit sind (i), (iv) gezeigt. $\mathbb{T}$ ist normal in $\mathbb{O}$, also folgt wieder aus der Maximalität von $\mathbb{O}$, daß $N(\mathbb{T}) = \mathbb{O}$. D_2 ist die einzige vierelementige Untergruppe von $\mathbb{T}$, also normal in $\mathbb{T}$. Daraus folgt dann sofort $N(\mathbb{D}_2) = \mathbb{O}$. Damit bleibt (ii). $D_{2n} \subset N(D_n)$ folgt aus einfachen geometrischen Überlegungen. Für $n > 2$ ist sind nur Gruppen der Form D_m und $\mathbf{O}(2)$ über D_{2n}. Man sieht auch leicht, daß es Elemente in D_{2kn}, $k \geq 1$ gibt, die nicht im Normalisator $N(D_n)$ sind. □

Für die Normalisatoren vereinbaren wir die folgende Schreibweise: $N(L)$ steht für den Normalisator in der jeweilig zu betrachtenden Gruppe G. Ist diese aus dem Kontext nicht ersichtlich, so schreiben wir $N_G(L)$.

Lemma 2.6.10 *Die Normalisatoren der Untergruppen von* $\mathbf{O}(3)$ *erhält man aus denen für die Untergruppen von* $\mathbf{SO}(3)$.

(i) Ist $L \oplus \mathbb{Z}_2^c$ *eine Gruppe der Klasse II, so ist der Normalisator* $N_{\mathbf{O}(3)}(L \oplus \mathbb{Z}_2^c) = N_{\mathbf{SO}(3)}(L) \oplus \mathbb{Z}_2^c$.

(ii) Ist $L \subset \mathbf{O}(3)$ *eine Untergruppe der Klasse III, d.h.* $L = (K, H)$, *so ist* $N_{\mathbf{O}(3)}(L) = (N_{\mathbf{SO}(3)}(K) \cap N_{\mathbf{SO}(3)}(H)) \oplus \mathbb{Z}_2^c$.

Beweis:

(i) Klar ist, daß $N_{\mathbf{SO}(3)}(L) \oplus \mathbb{Z}_2^c$ im Normalisator enthalten ist. Andrerseits folgt aus $g \in N_{\mathbf{O}(3)}(L \oplus \mathbb{Z}_2^c)$, daß $gLg^{-1} \subset \mathbf{SO}(3)$, da $\mathbf{SO}(3)$ normal in $\mathbf{O}(3)$ ist (als Untergruppe vom Index 2). Dann muß aber gelten, $gLg^{-1} = L$. Dann ist aber $g \in N_{\mathbf{O}(3)}(L) = N_{\mathbf{SO}(3)}(L) \oplus \mathbb{Z}_2^c$.

(ii) Es ist klar, daß jedes Element aus $(N_{\mathbf{SO}(3)}(K) \cap N_{\mathbf{SO}(3)}(H)) \oplus \mathbb{Z}_2^c$ $L = (K, H)$ normalisiert, denn es normalisiert beide Gruppen K, H. Andrerseits muß der Normalisator auch beide normalisieren, dies zeigt die zweite Aussage.

□

Um die Frage, ob eine gegebene Untergruppe Σ Isotropieunterguppe ist, zu entscheiden, reicht es nicht nachzuprüfen, ob $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) > 0$. Entscheidend ist, ob es ein $x_0 \in V$ gibt mit $\Sigma = \mathrm{Stab}(x_0)$. Es könnte passieren, daß, mit $\tilde{I}_\rho(\Sigma) = \{\Delta \in I_\rho(G) \mid \Delta \supset \Sigma,\ \Delta \neq \Sigma\}$, gilt

$$\mathrm{Fix}(\Sigma) = \bigcup_{\Delta \in \tilde{I}_\rho(\Sigma)} \mathrm{Fix}(\Delta).$$

Dieser Fall tritt nicht ein, wenn Σ maximal ist, oder $\tilde{I}_\rho(\Sigma)$ ist endlich und für alle $\Delta \in \tilde{I}_\rho(\Sigma)$ gilt

$$\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) > \dim \mathrm{Fix}(\Delta).$$

Genau um diese Frage zu klären, wurde die Menge $N(\Sigma, \Delta)$ von Ihrig & Golubitsky [15] eingeführt. Überhaupt wurden in dieser Arbeit zum ersten Mal sphärische Probleme systematisch untersucht. Die genauesten Ergebnisse waren zuvor von Busse[15] [2], bzw. Busse & Riahi [3] erzielt worden.

Neben $N(\Sigma, \Delta)$ spielen, wie gerade gesehen, die Anzahlen von Unterguppen eine große Rolle.

Definition 2.6.11 *Für zwei Untergruppen $\Sigma \subset \Delta$ von G sei $n(\Sigma, \Delta)$ die Anzahl der zu Δ konjugierten Untergruppen Δ' von G mit $\Delta' \supset \Sigma$. Entsprechend sei*

$$m(\Sigma, \Delta) = |\{\Sigma' \subset \Delta \mid \exists \gamma \in G : \ \Sigma' = \gamma \Sigma \gamma^{-1}\}|.$$

Lemma 2.6.12

$$|N(\Sigma, \Delta)| = n(\Sigma, \Delta)|N(\Delta)| = m(\Sigma, \Delta)|N(\Sigma)|$$

Beweis: Betrachte Äquivalenzklassen! □

Korollar 2.6.13 *Ist $n(\Sigma, \Delta) = 1$ oder $m(\Sigma, \Delta) = 1$, so ist $N(\Sigma, \Delta)$ eine Gruppe und es gilt $N(\Sigma, \Delta) = N(\Delta)$ oder $N(\Sigma, \Delta) = N(\Sigma)$.*

[15] F. Busse, zeitgenössischer deutscher Physiker an der Universität Bayreuth

Beweis: Klar im Fall wenn alle Größen im vorigen Lemma endlich sind. Im anderen Fall folgt es aus dem Beweis von Lemma 2.6.12. □

Satz 2.6.14 *Die Werte der* $n(\Sigma, \Delta)$ *und* $m(\Sigma, \Delta)$ *sind wie folgt:*

	Σ	Δ	$m(\Sigma,\Delta)$	$n(\Sigma,\Delta)$	Bedingung
Klasse I - Klasse I					
(1)	$\mathbf{SO}(2)$	$\mathbf{O}(2)$	1	1	
(2)	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}_n$	1	1	$n/m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$
(3)	$\mathbb{Z}_m$	D_n	1	∞	$n/m \in \mathbb{Z}, m \geq 3$
(4)	$\mathbb{Z}_2$	D_n	n	∞	n ungerade
(5)	$\mathbb{Z}_2$	D_n	$n+1$	∞	n gerade
(6)	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbf{SO}(2)$	1	1	
(7)	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbf{O}(2)$	1	1	$m \geq 3$
(8)	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbf{O}(2)$	∞	∞	
(9)	D_m	D_n	$\frac{n}{m}$	1	$n/m \in \mathbb{Z}, m \geq 3$
(10)	D_2	D_n	$\frac{n}{2}$	3	n gerade
(11)	D_m	$\mathbf{O}(2)$	∞	1	
(12)	D_2	$\mathbf{O}(2)$	∞	3	
(13)	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{T}$	3	∞	
(14)	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{T}$	4	∞	
(15)	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{O}$	9	∞	
(16)	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{O}$	4	∞	
(17)	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{O}$	3	∞	
(18)	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{I}$	15	∞	
(19)	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{I}$	10	∞	
(20)	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{I}$	6	∞	
(21)	D_3	$\mathbb{O}$	4	2	
(22)	D_4	$\mathbb{O}$	3	2	
(23)	D_3	$\mathbb{I}$	10	2	
(24)	D_5	$\mathbb{I}$	6	2	
(25)	D_2	$\mathbb{T}$	1	1	
(26)	D_2	$\mathbb{O}$	4	4	
(27)	D_2	$\mathbb{I}$	5	2	
(28)	$\mathbb{T}$	$\mathbb{O}$	1	1	
(29)	$\mathbb{T}$	$\mathbb{I}$	5	2	
Klasse I–Klasse III					
(2′)	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}_{2n}^-$	1	1	$n/m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$
(2′)	$\mathbb{Z}_m$	D_n^z	1	∞	$n/m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$
(3′)	$\mathbb{Z}_m$	D_{2n}^d	1	∞	$n/m \in \mathbb{Z}, m \geq 3$
(4′)	$\mathbb{Z}_2$	D_{2n}^d	n	∞	n ungerade
(5′)	$\mathbb{Z}_2$	D_{2n}^d	$n+1$	∞	n gerade
(6′)	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbf{O}(2)^-$	1	1	
(9′)	D_m	D_{2n}^d	$\frac{n}{m}$	1	$n/m \in \mathbb{Z}, m \geq 3$
(10′)	D_2	D_{2n}^d	$\frac{n}{2}$	3	n gerade
(13′)	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{O}^-$	3	∞	
(14′)	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{O}^-$	4	∞	
(25′)	D_2	$\mathbb{O}^-$	1	1	
	$\mathbf{SO}(2)$	$\mathbf{O}(2)^-$	1	1	
	$\mathbb{T}$	$\mathbb{O}^-$	1	1	

	Σ	Δ	$m(\Sigma,\Delta)$	$n(\Sigma,\Delta)$	Bedingung
Klasse III–Klasse III					
	$\mathbb{Z}_{2m}^-$	$\mathbb{Z}_{2n}^-$	1	1	$m\|n, 2m \nmid n$
	$\mathbb{Z}_{2m}^-$	D_{2n}^d	1	∞	$m\|n, 2m \nmid n$
	D_m^z	D_n^z	$\frac{n}{m}$	1	$n/m \in \mathbb{Z},\ m \geq 3$
	D_2^z	D_n^z	$\frac{n}{2}$	1	n *gerade*
	D_m^z	D_{2n}^d	$\frac{n}{m}$	1	$n/m \in \mathbb{Z},\ m \geq 3n$
	D_2^z	D_{2n}^d	$\frac{n}{2}$	1	n *gerade*
	D_2^z	D_{2n}^d	n	2	n *ungerade*
	D_m^z	$\mathbf{O}(2)^-$	∞	1	
	D_{2m}^d	D_{2n}^d	$\frac{n}{m}$	1	$m\|n, 2m \nmid n,\ m \geq 2$
	D_2^z	$\mathbb{O}^-$	3	1	
	D_3^z	$\mathbb{O}^-$	4	2	
	D_4^d	$\mathbb{O}^-$	3	1	

Beweis: Im Beweis werden wiederholt drei Techniken angewendet

(i) Sylow Sätze,

(ii) maximale Tori,

(iii) disjunkte Zerlegungen.

Wir wollen kurz die ersten beiden Themen betrachten, disjunkte Zerlegungen wurden ja gerade in erforderlicher Breite abgehandelt.

(i) Jedes Standardwerk der Algebra (z.B. LANG [20]) stellt diese Sätze vor. Diese besagen, daß für eine endliche Gruppe G und zu jedem Primteiler p der Gruppenordnung $|G|$ eine maximale p-Untergruppe existiert. Dabei heißt jede Gruppe deren Ordnung eine Potenz von p ist eine p–Gruppe. Diese maximale p–Untergruppe ist i.a. nicht eindeutig, man nennt sie eine p-Sylowgruppe, je zwei p–Sylowuntergruppen sind konjugiert, jedes Element dessen Ordnung ein Potenz von p ist, ist in einer p–Sylowuntergruppe enthalten, und schließlich teilt ihre Anzahl $|G|$ und ist kongruent $1 \bmod p$. Beispiel: die Gruppe $\mathbb{Z}_5$ ist die 5-Sylowuntergruppe von $\mathbb{I}$, die Anzahl der Untergruppen der Ordnung 5 teilt 60 und ist $1 \bmod 5$. Es gibt also entweder 1 oder 6 solcher Untergruppen, da $\mathbb{I}$ keinen Normalteiler besitzt, müssen es 6 sein. Damit haben wir schon (20) gezeigt. (ii) Die maximalen Tori sind in gewissem Sinne ein Analogon der p-Sylowuntergruppen. Dies sind die maximalen Untergruppen der Form $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. Je zwei sind konjugiert und in einer zusammenhängenden, kompakten Lie–Gruppe ist jedes Element in mindestens einem maximalen Torus enthalten, vgl. BRÖCKER & T. DIECK [1]. In der $\mathbf{SO}(3)$ liegt sogar jedes von $\mathbb{1}$ verschiedene Element in genau einem maximalen Torus, dies folgt aus der Eindeutigkeit des Eigenwertes 1. Damit hat man zum Beispiel $n(\mathbb{Z}_m, \mathbf{SO}(2)) = m(\mathbb{Z}_m, \mathbf{SO}(2)) = 1$, also (6).

Wir wollen nicht alle ausstehenden Fälle behandeln, sondern einige ausgewählte. Wir beginnen mit (26). Wir wissen bereits, daß es eine normale Untergruppe $D_2 \subset \mathbb{O}$

gibt. Sei M die Menge der nichtnormalen, in $\mathbf{SO}(3)$ zu D_2 konjugierten Untergruppen. $\mathbb{O}$ operiert auf M durch Konjugation. Die Länge jedes Orbits ist ein Teiler von 24. Da $D_2 \subset \mathbb{T} \subset \mathbb{O}$ impliziert, daß D_2 normal in $\mathbb{O}$ ist, liegt keine der Unterguppen in M in der Tetraedergruppe $\mathbb{T} \subset \mathbb{O}$. Da der Normalisator eine Untergruppe von $\mathbb{O}$ ist und D_2 enthält, verbleiben nur noch $N_{\mathbb{O}}(D_2){=}D_2$ oder $N_{\mathbb{O}}(D_2) = D_4$. Aufgrund der Sylowsätze ist D_2 in einer 2–Sylowuntergruppe von $\mathbb{O}$, die bis auf Konjugation die eindeutige Untergrupppe der Ordnung acht ist, also D_4. Da D_2 in D_4 Index 2 hat, ist D_2 normal in D_4 und jedes Element hat einen Orbit der Länge drei. Also ist $m(D_2, \mathbb{O}) \equiv 1 \bmod 3$. Aufgrund von (10) und (22) ist $m(D_2, D_4) = 2$ und $m(D_4, \mathbb{O}) = 3$, insbesondere $m(D_2, D_4) \leq 6$. Damit bleibt $m(D_2, \mathbb{O}) = 4$.

(27) D_2 ist die 2–Sylowuntergruppe von $\mathbb{I}$, also liegen alle D_2 in $\mathbb{I}$ auf einem Orbit unter der Konjugation mit Elementen von $\mathbb{I}$. Da $N_{\mathbb{I}}(D_2) = \mathbb{I} \cap N_{\mathbf{SO}(3)}(D_2) = \mathbb{I} \cap \mathbb{O} = \mathbb{T}$ ist, hat jeder Orbit die Länge 5. Man beachte, daß $\Sigma \subset \mathbb{I} \cap \mathbb{O}$ und $D_2 \subset \Sigma$ impliziert $\Sigma = D_2$ oder $\Sigma = \mathbb{T}$. Da zu jeder Gruppe $D_2 \subset \mathbb{I}$ eine Gruppe der Form $\mathbb{T}$ mit $D_2 \subset \mathbb{T} \subset \mathbb{I}$ existiert und $N_{\mathbb{I}}(D_2) \supset T$ folgt die obige Gleichung.

(29) Aufgrund von Lemma 2.6.14 ist $m(\mathbb{T}, \mathbb{I})$ ein Vielfaches von 5. Wir zeigen, daß $m(\mathbb{T}, \mathbb{I}) \leq 5$, woraus die Behauptung folgt. Wir wissen bereits, daß jede Untergruppe konjugiert zu $\mathbb{T}$ in $\mathbb{I}$ eine Gruppe der Form D_2 enthält, und daß es fünf von diesen gibt. Wir nehmen an, daß zwei Tetraedergruppen $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$ die gleiche Untergruppe D_2 enthalten. Dann ist aber D_2 normal in $\mathbb{O}_1 \supset \mathbb{T}_1$ und normal in $\mathbb{O}_2 \supset \mathbb{T}_2$, also $\mathbb{O}_1 = \mathbb{O}_2$ und $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2$.

Für die Fälle Klasse III - Klasse III braucht man ähnliche Techniken, jedoch ist der Fall $D_2^z \subset D_{2n}^d$ für ungerades n subtil und wir wollen diesen ausführen. Die Gruppe D_{2n}^d hat $4n$ Elemente. Da n ungerade ist, hat die 2–Sylowuntergruppe 4 Elemente und ist gleich D_2^z. Da die Anzahl der 2–Sylowuntergruppen ungerade und ein Teiler von $4n$ ist, ist $m(D_2^z, D_{2n}^d) \leq n$. Aus der disjunkten Zerlegung, wissen wir, daß D_{2n}^d n–Kopien von $\mathbb{Z}_2$ enthält. Jede dieser Kopien liegt in einer D_2^z (nach Sylow). Also gilt $m(D_2^z, D_{2n}^d) \geq n$. Damit hat man die Behauptung. □

Als nächstes beschreiben wir die maximalen Isotropieuntergruppen und solche mit eindimensionalen Fixpunkträumen.

Satz 2.6.15 *Die folgende Tabelle gibt zu jedem ℓ die maximalen Isotropieuntergruppen bezüglich der natürlichen Darstellung von $\mathbf{O}(3)$.*

ℓ	Δ	*Bedingung*
1	$\mathbf{O}(2)^-$	
2	$\mathbf{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2^c$	
3	$\mathbf{O}(2)^-, \mathbb{O}^-, D_6^d$	
4, 8, 14	$\mathbf{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2^c, \mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^c$	
5	$\mathbf{O}(2)^-, D_{2m}^d$	$2 \leq m \leq 5$
7, 11	$\mathbf{O}(2)^-, \mathbb{O}^-, D_{2m}^d$	$\ell/3 < m \leq \ell$
9, 13, 17, 19, 23, 29	$\mathbf{O}(2)^-, \mathbb{O}^-, \mathbb{O}, D_{2m}^d$	$\ell/3 < m \leq \ell$
alle anderen ungeraden ℓ	$\mathbf{O}(2)^-, \mathbb{O}^-, \mathbb{O}, \mathbb{I}, D_{2m}^d$	$\ell/3 < m \leq \ell$
alle anderen geraden ℓ	$\mathbf{O}(2)^- \oplus \mathbb{Z}_2^c, \mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^c, \mathbb{I} \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$\ell/3 < m \leq \ell$

Beweis: Um diesen Satz zu beweisen, beweist man entsprechende Sätze für die Darstellungen, wobei jeweils $-\mathbb{1}$ als Identität bzw. als minus Identität operiert. Man muß dabei genau darauf achten, welche Dimension die Fixräume haben. Das wesentliche Kriterium ist dabei: $\dim \mathrm{Fix}(\Delta) > 0$ und für alle Untergruppen oberhalb Δ ist der zugehörige Fixraum trivial. Nun muß man alle Fälle durchgehen. ∎

Satz 2.6.16 *Die maximalen Isotropieuntergruppen mit eindimensionalem Fixpunktraum sind:*

Δ	ℓ	*Bedingung*
$\mathbf{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2^c$	*alle geraden* ℓ	
$\mathbf{O}(2)^-$	*alle ungeraden* ℓ	
$\mathbb{O}^-$	$3, 7, 9, 11, 13, 17$	
$\mathbb{O}$	$9, 13, 15, 17, 19, 23$	
$\mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$4, 6, 8, 10, 14$	
$\mathbb{I} \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$6, 10, 12, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 32, 34, 38, 44$	
D_6^d	3	
D_{2m}^d	$\ell/3 < m \leq \ell$	$\ell \geq 5$, *ungerade*

Beweis: Folgt sofort aus dem vorigen Satz. ∎

Wir kommen nun dazu konkretes Verzweigungsverhalten zu untersuchen.

Satz 2.6.17 *Sei $\ell = 1$. Dann hat man generischerweise das gleiche Verzweigungsbild, wie für die $\mathbb{Z}_2$–Aktion auf $\mathbb{R}$, nämlich die Standard–Pitchfork. Der Orbittyp der verzweigenden Lösungen ist $\mathbf{O}(2)^-$.*

Beweis: Es gibt einen einzigen nichttrivialen Orbittyp. Der Fixraum einer zugehörigen Untergruppe $\mathbf{O}(2)^-$ ist eindimensional und der Normalisator $N(\mathbf{O}(2)^-)$ operiert als $\mathbb{Z}_2 = N(\mathbf{O}(2)^-)/\,\mathbf{O}(2)^-$. Damit erhält man das angegebene Verhalten. ∎

Satz 2.6.18 *Im Fall $\ell = 2$ hat man als Poset von Isotropieuntergruppen das Diagramm in der folgenden Abbildung 2.1.*

Es gibt ein minimales Erzeugendensystem für die Algebra der invarianten Funktionen mit zwei Elementen π_1, π_2 mit den Graden $\mathrm{grad}(\pi_i) = i + 1,\ i = 1, 2$. Die Gradienten $e_i = \nabla \pi_i$ erzeugen den Modul der äquivarianten Abbildungen. Bis auf Skalierung hat eine generische Verzweigungsgleichung die Form

$$\lambda x + \alpha_2 e_2(x) + h.o.t. = 0.$$

Das daraus resultierende generische Verzweigungsbild ist das einer transkritischen Verzweigung. Alle verzweigenden Lösungen sind instabil. Für generische Verzweigungsprobleme hat man keine Lösungen mit nichtmaximaler Isotropie.

Beweis: Die maximalen Isotropieuntergruppen liest man aus den vorhergehenden Sätzen ab. Man kann zu jeder Untergruppe feststellen, ob sie positiv dimensionalen Fixpunktraum hat, danach muß überprüft werden, ob die Untergruppe Stabilisator eines der Punkte ist. Dies ist in diesem Fall einfach. ∎

$$\mathbf{O}(3)^{(0)}$$

$$|$$

$$\mathbf{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2^{c\,(1)}$$

$$|$$

$$D_2 \oplus Z_2^{c\,(2)}$$

Abbildung 2.1: Die partiell geordnete Menge der Isotropieuntergruppen für die $\ell = 2$ Darstellung von $\mathbf{O}(3)$. Die Zahlen in Klammern geben hier, wie auch in den weiteren Abbildungen, die Dimension des Fixraumes für eine Isotropieuntergruppe der entsprechenden Konjugationsklasse an. Man beachte, daß $D_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$ die prinzipale Isotropie ist.

Satz 2.6.19 *Im Fall $\ell = 3$ bekommt man als partiell geordnete Menge von Isotropieuntergruppen das Diagramm aus Abbildung 2.2.*

Es gibt zwei äquivariante Abbildungen dritten Grades $e_1(x) = \|x\|^2 x$ und $e_2(x)$. Mit der Schreibweise $x = (x_3, x_2, x_1, x_0, x_{-1}, x_{-2}, x_{-3})$ bzw.

$$e_2(x) = (e_2^3(x), \ldots, e_2^{-3}(x)),$$

und mit $\eta = \sqrt{\frac{3}{5}}$ sind die einzelenen Komponenten gegeben durch

$$\begin{aligned}
e_2^3(x) &= 3\eta x_{-3}x_3^2 - 3\eta x_{-2}x_2x_3 + \eta x_{-1}x_1x_3 + x_{-1}x_2^2 - \sqrt{2}\eta x_0x_1x_2 + \frac{2}{5}x_1^3 \\
e_2^2(x) &= 3\eta x_{-3}x_2x_3 - 2x_{-2}x_1x_3 - \frac{4}{\sqrt{15}}z_{-2}z_2^2 + \sqrt{2}\eta x_{-1}x_0x_3 \\
&\quad + \frac{7}{3}\eta x_{-1}x_1x_2 - 2\eta x_0^2x_2 + \frac{\sqrt{2}}{5}x_0x_1^2 \\
e_2^1(x) &= \eta x_{-3}x_1x_3 + x_{-3}x_2^2 + \sqrt{2}\eta x_{-2}x_0x_3 - \frac{7}{3}\eta x_{-2}x_1x_2 + \frac{6}{5}x_{-1}^2x_3 - \frac{2}{5}\sqrt{2}x_{-1}x_0x_2 \\
&\quad + \frac{41}{15}\eta x_{-1}x_1^2 - \frac{6}{5}\eta x_0^2x_1 \\
e_2^0(x) &= \sqrt{2}\eta x_{-3}x_1x_2 + \sqrt{2}\eta x_{-2}x_{-1}x_3 - 4\eta x_{-2}x_0x_2 + \sqrt{\frac{2}{5}}x_{-2}x_1^2 + \sqrt{\frac{2}{5}}x_{-1}^2x_2 \\
&\quad + \frac{36}{15}\eta x_{-1}x_0x_1 - \frac{6}{5}\eta x_0^3.
\end{aligned}$$

Die Komponenten e_2^{-j} erhält man mittels

$$e_2^{-j}(x_3, \ldots, x_{-3}) = e_2^j(x_{-3}, \ldots, x_3).$$

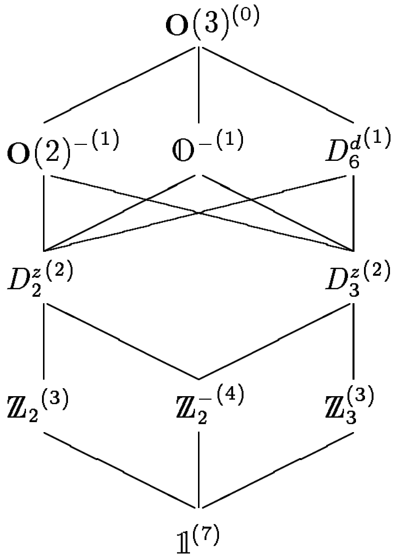

Abbildung 2.2: Die partiell geordnete Menge der Isotropieuntergruppen für die $\ell = 3$ Darstellung von $\mathbf{O}(3)$.

Das generische Verzweigungsverhalten ist gegeben durch die Lösungen von

$$\lambda x + \alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) = 0.$$

Sei Z die Vereinigung der Geraden

$$\begin{aligned} Z &= \{(\alpha_1,\alpha_2) \mid \alpha_1 = 0\} \cup \{(\alpha_1,\alpha_2) \mid \alpha_2 = \frac{2}{3}\eta\alpha_1\} \\ &\quad \cup \{(\alpha_1,\alpha_2) \mid \alpha_2 = \frac{6}{5}\eta\alpha_1\} \cup \{(\alpha_1,\alpha_2) \mid \alpha_2 = \frac{3}{2}\eta\alpha_1\} \end{aligned}$$

Z zerlegt die Ebene in acht Bereiche, siehe Abbildung 2.3. Für $(\alpha_1,\alpha_2) \notin Z$ gibt es nur Lösungen mit maximaler Isotropie, die Verzweigungsrichtungen und die Stabilität sind aus dem folgenden Diagramm 2.6.8 ersichtlich

Für jede Region geben wir das Verzweigungsverhalten durch eine Matrix an, deren erste Zeile die Verzweigungsrichtung für die Gruppen $\mathbb{O}^-, \mathbf{O}(2)^-, D_6^d$ (in dieser Reihen-

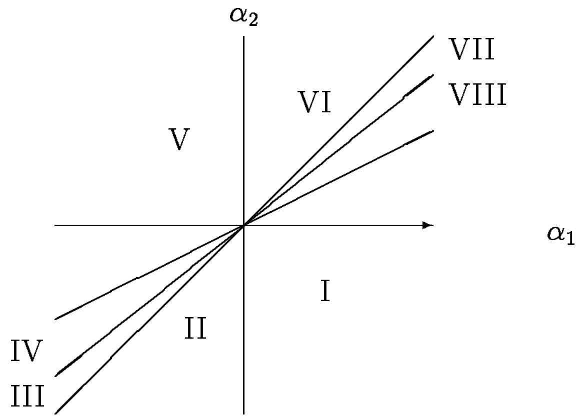

Abbildung 2.3: Die Einteilung der Ebene in die acht Bereiche unterschiedlichen Verzweigungsverhaltens, man beachte, daß die α_1–Achse keine Bereiche trennt, während die α_2–Achse Bereichte trennt.

folge) angibt, die zweite Zeile gibt die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit wieder.

Region	*Verzweigungsmatrix*
I	$\begin{pmatrix} r & r & r \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
II	$\begin{pmatrix} r & r & r \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
III	$\begin{pmatrix} r & r & l \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
IV	$\begin{pmatrix} r & l & l \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
V	$\begin{pmatrix} l & l & l \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
VI	$\begin{pmatrix} l & l & l \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
VII	$\begin{pmatrix} l & l & r \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
VIII	$\begin{pmatrix} l & r & r \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2.6.8)

Beweis: Der erste Schritt entspricht dem des vorigen Beweises, nämlich die Bestimmung der partiell geordneten Menge von Isotropieuntergruppen, einschließlich der Dimensionen der entsprechenden Fixräume. Aus den Übungen ist die Existenz genau zweier kubischer äquivarianter Abbildungen bekannt, mittels der Operatoren $J_\pm$ werden diese bestimmt. Daraufhin kann man das Verzweigungsverhalten und die Stabilitäten ausrechnen. Um auszuschließen, daß keine Lösungen mit nichtmaximaler Isotropie verzweigen, kann man zunächst die Verzweigungsgleichung einschränken auf den Fixraum von $\mathbb{Z}_2^-$, dort ist die Gleichung noch explizit behandelbar, mit den nachfolgenden Lemmata. Man weist nach, daß in diesem Raum nur Lösungen mit maximaler Isotropie auftreten. Danach muß noch der Fall trivialer Isotropie nachgerechnet werden. Auch hier besteht der wesentliche Schritt aus den folgenden Lemmata. □

Lemma 2.6.20 *Sei G eine kompakte Lie–Gruppe, welche orthogonal auf dem Raum V operiere, $E \subset G$ sei eine einparameter Untergruppe. Wir zerlegen V*

$$V = \mathrm{Fix}(E) \oplus \mathrm{Fix}(E)^\perp.$$

Es sei $W \subset \mathrm{Fix}(E)^\perp$ ein Unterraum der Kodimension 1. Dann gibt es zu jedem $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \mathrm{Fix}(E), v_2 \in Fix(E)^\perp$ ein $g \in E$ mit $gv = v_1 + w$, $w \in W$.

Beweis: Da $v_1 \in \mathrm{Fix}(E)$, reicht es zu zeigen, daß es ein $g \in E$ gibt mit $gv_2 \in W$. Sei h ein lineares Funktional auf $\mathrm{Fix}(E)^\perp$ mit $\ker h = W$. Sei J der infinitesimale Erzeuger von E. Da G orthogonal operiert, ist J schiefsymmetrisch und $\mathrm{IM}(J) = \mathrm{Fix}(E)^\perp$. Also ist $J : \mathrm{Fix}(E)^\perp \to \mathrm{Fix}(E)^\perp$ ein Isomorphismus. Betrachte $h(\exp(Jt)J^{-1}v_2)$. Diese Funktion nimmt ein Minimum an, sagen wir bei t'. Differentiation nach t bei t' gibt $\exp(Jt')v_2 \in \ker h = W$. □

Das nächste Lemma liefert die Verallgemeinerung, daß man für $G = \mathbf{O}(3)$ sogar in Räumen der Kodimension zwei landen kann. Während das erste Lemma reicht, um nachzuweisen, daß alle Lösungen der Verzweigungsgleichung für $\ell = 3$ und $(\alpha_1, \alpha_2) \notin Z$ in $\mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2^-)$ schon maximale Isotropie haben, brauchen wir die Verallgemeinerung für den vollen Beweis um Lösungen mit nichtmaximaler Isotropie auszuschließen.

Definition 2.6.21 *(i) Es seien L_i die Standarderzeuger der Lie–Algebra $\mathbf{so}(3)$, d.h.*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Es seien $\mathcal{L}_i$ die zugehörigen Differentialoperatoren, d.h.

$$\mathcal{L}_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \mathcal{L}_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \mathcal{L}_2 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$

(iii) Setze

$$J_0 = i\mathcal{L}_1, J_\pm = \mathcal{L}_2 \pm i\mathcal{L}_3.$$

(iv) Schließlich sei $J_1 = J_+ + J_-, J_2 = J_+ - J_-$.

Wie in den Übungen besprochen, seien die Koordinaten in V_ℓ und die äquivarianten Abbildungen mittels dieser Operatoren konstruiert. Sei $V_\ell^{\mathbf{C}}$ der komplexifizierte Raum V_ℓ mit Koordinaten $z = (z_3, \ldots, z_{-3})$. V_ℓ ist darin durch die Realitätsbedingung $z_{-i} = (-1)^i \overline{z}_i$ eingebettet. Wir schreiben $z_j = x_j + iy_j$. Dies sind die natürlichen Koordinaten auf V_ℓ. Die Operatoren $J_0, J_\pm$ wirken in diesen Koordinaten als $J_0 z_j = j z_j$ und $J_\pm z_j = \gamma_{\pm j} z_{j\pm 1}$ mit $\gamma_j = \sqrt{(\ell + j + 1)(\ell - j)}$. Diese Normierung wurde auch verwendet um die oben angegebene äquivariante Abbildung im Fall $\ell = 3$ zu konstruieren. Durch entsprechende Skalierung der Operatoren $J_\pm$ kann man Basen mit ganzzahligen Koeffizienten konstruieren.

Lemma 2.6.22 *In der $\ell = 3$–Darstellung von $\mathbf{O}(3)$ schneidet jeder Orbit den Unterraum $y_1 = y_3 = 0$.*

Beweis: In komplexer Schreibweise sind die Kerne von J_1, J_2 gegeben durch

$$\ker J_1 = \operatorname{span} i(-A, 0, 1, 0, 1, 0, -A) = v_1$$

und

$$\ker J_2 = \operatorname{span}(-A, 0, -1, 0, 1, 0, A) = v_2.$$

mit $A = \gamma_{-2}/\gamma_2$. Setze $v_3 = i(1, 0, A, 0, A, 0, 1)$ und bilde eine orthogonale Basis $v_1, \ldots, v_7$ und schreibe $z = \sum_j a_j v_j$. Da $v_1 \in \ker(J_2)^\perp$ kann man nach Lemma 2.6.20 die von J_2 erzeugte einparameter Untergruppe nutzen um $a_1 = 0$ zu setzen. Nun ist $v_1 \in \ker J_1$ und $v_3 \perp v_1$. Demzufolge gibt eine erneute Anwendung von Lemma 2.6.20, daß $a_3 = 0$ durch die Aktion von $\exp(tJ_1)$ errreicht werden kann. In den zugrundeliegenden Koordinaten heißt dies, daß $y_1 = y_3 = 0$. □

Mit dieser Vereinfachung läßt sich die vollständige Verzweigungsgleichung für $\ell = 3$ lösen.

Bemerkung 2.6.23 *Man kann zeigen, daß auch für $\ell = 4$ in generischer Weise keine Lösungen mit nicht-maximaler Isotropie auftreten, vgl. [21]. Dazu braucht man eine weitere Verschärfung der beiden vorangehenden Lemmata. Man kann für jede Darstellung von $\mathbf{O}(3)$ die Existenz von Unterräumen der Kodimension drei zeigen, so daß jeder Orbit diese Unterräume schneidet. Im Fall $\ell = 4$ verbleibt eine quadratische Gleichung in sechs Variablen. Man erkennt schnell, daß diese Technik jenseits von $\ell = 4$ nicht mehr angewendet werden kann. Man kann zeigen, daß für $\ell = 5$ Lösungen mit nicht-maximaler Isotropie auftreten [5]. Bisher konnte allerdings nicht nachgewiesen werden, daß keine außer den bekannten Lösungen auftreten.*

Für die Fälle $\ell = 1, \ell = 2$ ist die Dynamik nahe dem Verzweigungspunkt recht einfach. Beginnend mit $\ell = 3$ wird sie komplizierter. Man kann aber auch für nicht generische Probleme schon bei $\ell = 2$ recht komplexe Dynamiken, inklusive heterokliner Zykeln beobachten.

Lemma 2.6.24 *Wir betrachten eine Abbildung der Form*

$$F(\lambda, x) = \lambda x + h_1(x, \lambda) + h_2(x, \lambda),$$

wobei $h_1(x,0)$ homogen polynomial sei und $h_2(x,0)$ von höherer Ordnung sei. Ist $h_1(x,0)$ ein Gradient, und sind alle Lösungen von $F(\lambda, x) = 0$ hyperbolisch bezüglich

$$\frac{dx}{dt} = F(\lambda, x),$$

so gibt es eine Umgebung der Null, in der der Fluß gradientenähnlich ist. Alle ω-Limesmengen sind Gleichgewichte.

Beweis: Sei p der Grad von $h_1(x,0)$. Mit der Skalierung $\lambda = \pm\varepsilon^{p-1}, x = \varepsilon u, t = \varepsilon^{1-p}s$ erhalten wir, bis auf Terme höherer Ordnung in ε die Gleichung

$$\frac{du}{ds} = \pm u + \varepsilon h_1(u, 0).$$

Dieses Vektorfeld ist von Gradientenstruktur. Sei K eine kompakte Umgebung von 0, so daß ∂K keine Ruhelage dieses Vektorfeldes enthält. Für jede Nullstelle u_m in K sei U_m^δ eine Umgebung, für die x_m die einzige in beiden Zeitrichungen beschränkte Lösung ist. Auf $K \setminus \cup_m U_m^\delta$ ist das Vektorfeld gleichmäßig von 0 wegbeschränkt. Daher gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$, so daß für alle $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ das gestörte Vektorfeld noch gradientenähnlich ist. In U_m^δ verhalten sich die Lösungen, wegen der Hyperbolizität (Satz von Hartman-Grobman) von x_m wie Lösungen eines Gradientensystems. □

Das vorangegangene Lemma ist nur für äquivariante Systeme mit endlichen Symmetriegruppen geeignet. Im andern Fall läuft der Beweis genauso, wenn wir normale Hyperbolizität der kritischen Orbits voraussetzen. Wir haben also:

Lemma 2.6.25 *Die Aussage des Lemmas 2.6.24 bleibt wahr, wenn F bezüglich einer kompakten Lie–Gruppe äquivariant ist, und man die Voraussetzung der Hyperbolizität durch normale Hyperbolizität (hier benutzt man den Satz über Zentrumsmannigfaltigkeiten und beachtet, daß der Fluß auf ddieser trivial ist) der Gruppenorbits ersetzt.*

Satz 2.6.26 *(i) Ist $(\alpha_1, \alpha_2) \notin Z$, so gibt es eine Umgebung U in V_3 und ein $\lambda_0 > 0$, so daß in $(-\lambda_0, \lambda_0) \times U$ der Fluß zu*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) + h.o.t.$$

gradientenähnlich ist.

(ii) Jede Trajektorie, die vollständig in $(-\lambda_0, \lambda_0) \times U$ liegt, ist entweder eine stationäre Lösung oder ein heterokliner Orbit, der zwei stationäre Lösungen verbindet.

(iii) Seien x_1, x_2 zwei stationäre Lösungen, sei $u(x_i)$ die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit von x_i. Ist $u(x_1) > u(x_2)$ und gibt es keine stationäre Lösung x mit $u(x_1) > u(x) > u(x_2)$, so gibt es ein $g \in \mathbf{O}(3)$ und eine Lösung $x_0(t)$ mit $gx_1 = \alpha(x_0), x_2 = \omega(x_0)$.

Speziell hat man folgende verbindende Orbits, die jeweils durch einen Pfeil angedeutet werden. Genau lautet die jeweilige Aussage $\Delta \to \Sigma$: zu jeder Lösung vom Orbittyp $[\Delta]$ existiert eine Lösung vom Orbittyp $[\Sigma]$ und eine verbindende Trajektorie zwischen den beiden Lösungen, deren Durchlaufrichtung dem Pfeil entspricht.

Sektor I

$$\begin{array}{lll} \mathbf{O}(3) & \to & D_6^d, \mathbf{O}(2)^-, \mathbb{O}^- \\ D_6^d & \to & \mathbf{O}(2)^-, \mathbb{O}^- \\ \mathbf{O}(2)^- & \to & \mathbb{O}^- \end{array}$$

Sektor II

$$\begin{array}{lll} \mathbf{O}(3) & \to & \mathbb{O}^-, D_6^d, \mathbf{O}(2)^- \\ \mathbb{O}^- & \to & \mathbf{O}(2)^-, D_6^d \\ \mathbf{O}(2)^- & \to & D_6^d \end{array}$$

Sektor III *(i)* $\lambda > 0$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{O}(3) & \to & \mathbb{O}^-, \mathbf{O}(2)^- \\ \mathbb{O}^- & \to & \mathbf{O}(2)^- \end{array}$$

(ii) $\lambda < 0$

$$D_6^d \to \mathbf{O}(3),$$

Sektor IV *entsteht durch Zeitumkehr aus Sektor VIII,*

Sektor V *entsteht durch Zeitumkehr aus Sektor I,*

Sektor VI *entsteht durch Zeitumkehr aus Sektor II,*

Sektor VII *entsteht durch Zeitumkehr aus Sektor III,*

Sektor VIII *(i)* $\lambda > 0$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{O}(3) & \to & D_6^d, \mathbf{O}(2)^- \\ D_6^d & \to & \mathbf{O}(2)^- \end{array}$$

(ii) $\lambda < 0$

$$\mathbb{O}^- \to \mathbf{O}(3)$$

.

Beweis: Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten. Wir zeigen also die Aussagen (i), (iii). Aus der Poincaré–Reihe für $\ell = 3$ schließen wir, daß die beiden äquivarianten Abbidlungen e_1, e_2 Gradienten von invarianten Polynomen sind. Damit folgt der erste Teil aus den beiden vorstehenden Lemmata.

(iii) Für diese Aussage schauen wir uns die beiden zweidimensionalen Fixpunkträume $\mathrm{Fix}(D_2^z)$ und $\mathrm{Fix}(D_3^z)$ an. Die verbindenden Trajektorien werden mit dem Satz von Poincaré–Bendixson[16] konstruiert. Zunächst betrachten wir die Geometrie der Fixräume, speziell die Frage nach der Lage der Fixpunkträume zu maximalen Isotropieuntergruppen in $\mathrm{Fix}(D_2^z)$, bzw. $\mathrm{Fix}(D_3^z)$. Aus der Tabelle in Satz 2.6.14 ist die Anzahl der jeweiligen Kopien über der Gruppe D_2^z, bzw. D_3^z bekannt. So ist $n(D_2^z, \mathbb{O}^-) = 1$, $n(D_2^z, \mathbf{O}(2)^-) = 1$ und $n(D_2^z, D_6^d) = 2$, während sich für D_3^z folgende Zahlen ergeben $n(D_3^z, \mathbb{O}^-) = 2$, $n(D_3^z, \mathbf{O}(2)^-) = 1$ und $n(D_3^z, D_6^d) = 1$. Betrachtet man die Aktionen der Normalisatoren von D_2^z, D_3^z, so ergeben sich folgende Lagen für diese Räume:

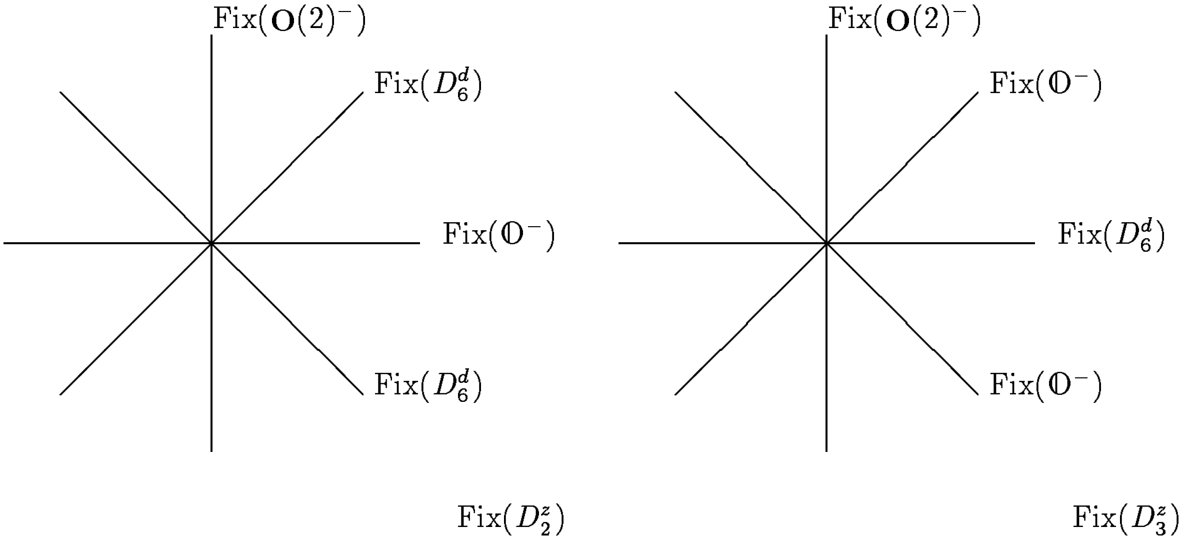

Abbildung 2.4: Hier wird die Lage der eindimensionalen Fixräume innerhalb von $\mathrm{Fix}(D_2^z)$ und $\mathrm{Fix}(D_3^z)$ gezeigt. Im linken Bild erkennt man, daß $\mathrm{Fix}(D_6^d)$ verbindende Orbits zwischen Lösungen mit Isotropie $\mathbf{O}(2)^-$ und $\mathbb{O}^-$ blockiert, in diesem Raum können nur verbindende Orbits unter Beteiligung von Punkten in $\mathrm{Fix}(D_6^d)$ gesehen werden. Beim Übergang zu $\mathrm{Fix}(D_3^z)$ vertauschen D_6^d und $\mathbb{O}^-$ die Rollen.

Die Beweise der Existenz der angegebenen verbindenden Orbits sind alle sehr ähnlich, wir betrachten nur einen Fall, wir zeigen im Sektor VIII, für $\lambda > 0$ die Existenz der Verbindung von D_6^d nach $\mathbf{O}(2)^-$. Alle anderen der in diesem Fall angegebenen Verbindungen sind klar. Es muß gezeigt werden, daß die instabile Mannigfaltigkeit der Lösung mit Diedersymmetrie x_D in der stabilen Mannigfaltigkeit der achsensymmetri-

[16] Ivar Otto Bendixson, 1.8.1861–29.11.1935 (das Sterbedatum scheint nicht eindeutig geklärt zu sein). Bendixson arbeitete über abelsche Gruppen, Auflösbarkeit von Gleichungen. Er widmete sich auch der Frage nach der Existenz geschlossener Trajektorien für gewöhnliche Differentialgleichungen.

schen Lösung x_A enthalten ist. Zunächst kann man die Linearisierung beim Punkt x_D betrachten und auf $\mathrm{Fix}(D_2^z)$ einschränken. Man sieht, daß es einen positiven Eigenwert gibt, der zugehörige Eigenvektor ist nicht in $\mathrm{Fix}(D_6^d)$. Sei $x(t)$ eine Lösung auf der instabilen Mannigfaltigkeit. Nach Poincaré–Bendixson tritt nun einer von drei Fällen ein: die ω-Limesmenge der Lösung ist leer, sie enthält einen periodischen Orbit oder eine stationäre Lösung. Im letzten Fall ist nichts zu zeigen. Der zweite Fall widerspricht der gradientenähnlichen Struktur. Um den ersten Fall auszuschließen, zeigt man, daß das Vektorfeld längs eines genügend großen Kreises im entsprechenden Sektor nach innen zeigt. □

Ein alternativer Zugang um die Existenz dieser verbindenden Orbits nachzuweisen geht auf FIEDLER & MISCHAIKOV [8] zurück.

Wir kommen nun zum angekündigten Resultat über submaximale Verzweigung in sphärischen Problemen.

Satz 2.6.27 *Ist*

$$2 < \left[\frac{\ell}{3}\right] \leq m \leq \frac{2\ell}{3},$$

so existieren Lösungen in $\mathrm{Fix}(D_{2m}^d)$*, welche nicht maximal sind.*

Beweis: Aus unserer Liste finden wir, daß für den angegebenen Bereich $\dim \mathrm{Fix}(D_{2m}^d) = 2$ ist. Die Bedingung $\Delta \supset D_{2m}^d$, $\dim \mathrm{Fix}(\Delta) = 1$ kann nur von Gruppen der Form $\Delta = D_{2n}^d$ mit $m|n$ und $2m \not| n$ erfüllt werden. Die einzige Zahl n welche den Bedingungen genügt ist $n = 3m$. Nun ist $m(D_{2m}^d, D_{2n}^d) = 1$, also sind die Voraussetzungen des Satzes 2.5.6 erfüllt und es folgt die Existenz von Lösungen mit submaximaler Isotropie. □

2.7 Heterokline Zykel und Symmetrie

Eine wichtige Frage beim Studium dynamischer Systeme ist das Auftreten von komplexer Dynamik. Ein Indiz dafür sind sogenannte heterokline Zykel. Wir wollen hier ein einfaches Kriterium anführen, welches heterokline Zykel in Systemen mit Symmetrie erzwingt. Auch hier wurden Klassifikationen für das Auftreten heterokliner Zykel in direkten Summen von Darstellungen von $\mathbf{O}(3)$ angegeben. Wir beschränken uns auf ein einfaches Kriterium

Definition 2.7.1 *Sei* $\dot{x} = f(x)$ *eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Fluß* Φ*. Eine endliche Folge* $(e_i, x_i(t))$ $i = 1, \ldots, n$ *von stationären Punkten* e_i *und Lösungen* $x_i(t)$ *heißt heterokliner Zyklus, wenn*

$$\alpha(x_i) = e_i, \omega(x_i) = e_{i+1 \bmod n}.$$

Satz 2.7.2 *Sei* G *eine kompakte Lie-Gruppe,* Δ *eine maximale Isotropieuntergruppe mit eindimensionalem Fixpunktraum. Seien* Σ_1, Σ_2 *zwei Isotropieuntergruppen mit*

$\dim \mathrm{Fix}(\Sigma_i) = 2$ *und* $\mathrm{Fix}(\Sigma_1) \cap \mathrm{Fix}(\Sigma_2) = \mathrm{Fix}(\Sigma)$. *Ferner seien* e_1, e_2 *zwei Gleichgewichte in* $\mathrm{Fix}(\Delta)$. *Wir nehmen an, daß die Linearisierung von* e_i *in* $\mathrm{Fix}(\Sigma_j)$ *hyperbolisch ist, wobei o.B.d.A.* e_1 *in* $\mathrm{Fix}(\Sigma_1)$ *stabil und in* $\mathrm{Fix}(\Sigma_2)$ *instabil sei und* e_2 *das umgekehrte Verhalten zeigt. Gilt es in jedem* $\mathrm{Fix}(\Sigma_j)$ *eine Kugel* K_j *mit* $e_{1,2}$ *in* K_j, *so daß* K_j *positiv invariant ist, dann existiert ein heterokliner Zykel.*

Beweis: Anwendung des Satzes von Poincaré–Bendixson. □

Bemerkung 2.7.3 *Man kann auf diese Weise auch längere heterokline Zykel konstruieren, wenn entsprechend mehr Ebenen* $\mathrm{Fix}(\Sigma_j)$ *vorhanden sind.*

Kapitel 3

Hopf Verzweigung mit Symmetrie

In diesem Kapitel wollen wir uns mit periodischen Lösungen in Systemen mit Symmetrien beschäftigen, insbesondere die Verzweigung periodischer Lösungen mit räumlich-zeitlichen Symmetrien aus Gleichgewichtslagen untersuchen.

3.1 Lyapunov–Schmidt Reduktion für periodische Lösungen

In diesem Abschnitt werden die technischen Grundlagen für die weiteren Darstellungen in diesem Kapitel gelegt. Wir wollen dabei Gleichungen der Form

$$\frac{dx}{dt} = G(\lambda, x)$$

studieren. Es sei X ein Banachraum, $A \in \mathcal{C}(X)$ ein abgeschlossener linearer Operator, $A(\lambda)$ eine Familie von abgeschlossenen linearen Operatoren mit $A(0) = A$ und $D(A(\lambda)) = D(A)$. Wir nehmen an, A habe kompakte Resolvente und sei sektoriell. Es sei $X^\alpha = D(A^\alpha)$ und $F : X^\alpha \times \mathbb{R} \to X$ sei genügend glatt, $F(0, \lambda) = 0$ und $DF(0, \lambda) = 0$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + A(\lambda)x = F(x, \lambda).$$

Wir wollen diese Gleichung auf Hopf–Verzweigung untersuchen und nehmen deshalb an, A habe halbeinfache Eigenwerte $\pm i\omega_0$ für ein $\omega_0 > 0$. Halbeinfach heißt hier, daß die algebraische und die geometrische Vielfachheit gleich sind. Diese Vielfachheit sei $\mu \geq 1$. Aufgrund der Annahme, daß A eine kompakte Resolvente hat, sind die Eigenwerte isoliert im Spektrum, und es gibt einen Projektor P auf den Eigenraum zu den Eigenwerten $\pm i\omega_0$. Ferner soll im folgenden immer gelten, daß A keine Eigenwerte der Form $in\omega_0$, $n \in \mathbb{N}, n \neq \pm 1$ hat. Wie bereits in Kapitel II, ist die Annahme $\mu > 1$ im allgemeinen nicht generisch, jedoch in Systemen mit Symmetrie oft erzwungen. Für die Reduktion spielt die Ursache der Degeneriertheit der Eigenwerte keine Rolle, erst wenn es darum geht die Symmetrieeigenschaften der reduzierten Gleichung anzusehen, dann muß dieser Punkt behandelt werden. Weiter nehmen wir die Existenz von differenzierbaren Kurven von Eigenwerten $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ von $A(\lambda)$ mit $\alpha(0) = 0$ und $\beta(0) = \omega_0$ an. Wir setzen desweiteren voraus, daß die sogenannte Hopfsche[1] Transversalitätsbedingung

$$\alpha'(0) \neq 0 \tag{3.1.1}$$

erfüllt ist. Wir führen die Frage nach der Existenz periodischer Lösungen auf ein algebraisches Problem zurück. Dazu führen wir Räume periodischer Funktionen ein und schreiben die Differentialgleichung als Operator zwischen zwei solchen Räumen.

Definition 3.1.1 *Für einen Banachraum X sei*

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}, X) = \{u : \mathbb{R} \to X \mid u(t+2\pi) = u(t), u \textit{ ist stetig}\}.$$

Mit $C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ werde der Unterraum der stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet.

Wir können nicht erwarten, daß die verzweigenden periodischen Lösungen die Periode 2π haben, deshalb müssen wir die Zeit mit der unbekannten Periode τ skalieren, τ ist eine der Größen, die aus dem Ansatz mit ausgerechnet werden müssen. Für periodische Lösungen, die bei $(0,0)$ von der trivialen Lösung verzweigen, erwarten wir, daß die Periode nahe $\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}$ liegt. Wir nehmen an, daß die gesuchte Periode unserer neuen Lösungen die Form $\tau_0 + \tau$ für ein kleines τ hat. Sei

$$s = \frac{2\pi t}{\tau_0 + \tau}$$

Dann ist

$$\frac{2\pi}{\tau_0 + \tau}\frac{dx}{ds} + A(\lambda)x = F(x, \lambda).$$

Wir setzen mit $\frac{2\pi}{\tau_0+\tau} = \omega_0 + \omega$

$$J_0 = \omega_0 \frac{d}{ds} + A.$$

Ist $A : X_2 \to X_2$ ein sekorieller Operator mit $D(A) = X_1 \subset X_2$ mit kompakter Resolvente (entsprechend unseren bisherigen Definitionen), so ist J_0 ist ein linearer Operator in $\mathcal{C}(C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X_2), C_{2\pi}(\mathbb{R}, X_2))$ mit $D(J_0) = C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X_1)$. Im folgenden verzichten wir auf die Unterscheidung von X_1 und X_2, für X sind die entsprechenden Räume X_1, X_2, bzw. X_2^α einzusetzen, genaueres findet man bei [17].

Lemma 3.1.2 *(i) J_0 ist abgeschlossen.*

(ii) J_0 hat kompakte Resolvente.

(iii) J_0 hat einen halbeinfachen Eigenwert der Vielfachheit 2μ.

[1]Eberhard Hopf, 17.4.1902-24.7.1983, angewandter Mathematiker mit Arbeiten über partielle Differentialgleichungen, Ergodentheorie und last not least Hopf Verzweigung

(iv) J_0 ist Fredholm Operator vom Index 0.

Beweis:

(i) Dies ist leicht nachzuprüfen.

(ii) Die Kompaktheit der Resolvente von J_0 sieht man wie folgt. Sei ζ kein Eigenwert von A. Dann ist $\zeta \in P(A)$ in der Resolventenmenge von A. Für $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ ist die Lösung x von
$$(J_0 - \zeta \mathbb{1})x = f$$
gegeben durch
$$x(t) = \exp(-(A + \zeta\mathbb{1})t/\omega_0)x_0 + \int_0^t \exp(-(A + \zeta\mathbb{1})(t - s)/\omega_0)f(s)ds,$$
mit geeignetem x_0. Die rechte Seite stellt einen kompakten Operator dar, demzufolge hat J_0 kompakte Resolvente.

(iii) Sind $\phi_1, \ldots, \phi_\mu$ die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $i\omega_o$ im komplexifizierten Raum $V^{\mathbb{C}}$. Betrachte ϕ_j für ein $j \in 1, \ldots, \mu$, $\overline{\phi}_j$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $-i\omega_0$. Sei
$$\phi_j^r = \frac{1}{2}(\phi_j + \overline{\phi}_j)$$
und
$$\phi_j^i = \frac{1}{2i}(\phi_j - \overline{\phi}_j).$$
Dann sind $\varphi_j(t) = \cos(t)\phi_j^r + \sin(t)\phi_j^i$ und $\varphi_{-j}(t) = -\sin(t)\phi_j^r + \cos(t)\phi_j^i$ Eigenvektoren von J_0 zum Eigenwert 0. Damit hat man zumindest die Vielfachheit 2μ für den Eigenwert 0. Andrerseits ist bekannt, daß jede Eigenfunktion von J_0 zum Eigenwert 0 die obige Form hat. Wegen (ii) ist 0 isoliert im Spektrum von J_0.

(iv) Klar!

□

Damit haben wir die Frage nach der Existenz periodischer Lösungen zurückgeführt auf die Gleichung
$$\left(\omega\frac{d}{ds} + J_0 + (A(\lambda) - A)\right) x = F(x, \lambda), \tag{3.1.2}$$
mit $x \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$. Dies ist ein zweiparameter System, das sich in der Form nicht vom Verzweigungsproblem, welches mit dem Satz 2.3.2 auf ein endlich-dimensionales Problem reduziert wurde, unterscheidet. Abstrakt schreiben wir Gleichung 3.1.2 als $G(\omega, \lambda, x) = 0$. Ist P_0 der Eigenprojektor auf den Kern von J_0, Q der Projektor auf das Bild von J_0 in $C_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$, so zerlegt sich die Gleichung in $v = P_0x, w = (\mathbb{1} - P_0)x$ und
$$\begin{aligned} QG(\omega, \lambda, v + w) &= 0 \\ (\mathbb{1} - Q)G(\omega, \lambda, v + w) &= 0 \end{aligned}$$

Nun ist mit

$$\frac{\partial}{\partial w} QG(\omega, \lambda, v + w)_{|(0,0,0)} = J_0$$

die Gleichung $QG\omega, \lambda, v + w) = 0$ lokal nach dem Satz über implizite Funktionen auflösbar, durch $w = w(\omega, \lambda, v)$. Durch Einsetzen erhält man nun die reduzierte Gleichung

$$g(\omega, \lambda, v) = (\mathbb{1} - Q)G(\omega, \lambda, v + w(\omega, \lambda, v)) = 0,$$

wobei

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ker J_0 \to \operatorname{coker} J_0.$$

Nachdem man Koordinaten $x_1, \ldots x_\mu, x_{-1}, \ldots, x_{-\mu}$ einführt, $v = \sum_j x_j\varphi_j + x_{-j}\varphi_{-j}$, erhält man die Abbildung (die wir der Einfachheit halber wieder mit g bezeichnen)

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2\mu} \to \mathbb{R}^{2\mu}.$$

Im Unterschied zur vorherigen Lyapunov–Schmidt Reduktion hat man hier eine zusätzliche Größe, die unbekannte Periode, zu bestimmen. Allerdings hat man eine zusätzliche Struktur, die noch auszunutzen ist. Eine Zeitverschiebung wirkt als Drehung auf jeder der Ebenen welche von φ_j, φ_{-j} erzeugt wird. Dadurch kann man erreichen, daß eine der Koordinaten, o.B.d.A. x_{-1}, den Wert 0 annimmt. Damit hat man eine Gleichung

$$\hat{g}(\omega, \lambda, x_1, x_2, x_{-2}, \ldots, x_\mu, x_{-\mu}) = 0$$

zu lösen, wobei $\hat{g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\mu-1} \to \mathbb{R}^{2\mu}$. Ist $\mu = 1$, so bleibt ein System von zwei algebraischen Gleichungen in drei Unbekannten zu lösen. Durch Einsetzen von $v = x_1\varphi_1 + x_{-1} + \varphi_{-1}$ in die Ausgangsgleichung (3.1.2) und Anwenden der Projektoren erhält man

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda)x_1 &= \hat{h}_1(\omega, \lambda, x_1) \\ \omega x_1 &= \hat{h}_{-1}(\omega, \lambda, x_1). \end{aligned}$$

Für jede Komponente $\hat{g}_j$ von $\hat{g}$ gilt, daß $\hat{g}_j(\omega, \lambda, 0) = 0$. Damit kann man die zweite Gleichung durch x_1 dividieren und nach $\omega = \omega(\lambda, x_1)$ auflösen. Damit bleibt

$$\alpha(\lambda)x_1 = \hat{g}_1(\omega(\lambda, x_1), \lambda, x_1).$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0) \neq 0$. Damit bekommt man mit dem Satz über implizite Funktionen die Lösung $\lambda = \lambda(x_1)$. Damit haben wir den ursprünglichen Satz von Hopf [14] gezeigt.

Satz 3.1.3 *Ist $\mu = 1$, $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0$, so verzweigt ein eindeutig bestimmter Zweig periodischer Lösungen bei $\lambda = 0$ von der trivialen Lösung. Die Periode ist nahe $1/\omega_0$.*

Eine ausführliche Darstellung der Lyapunov-Schmidt Reduktion für den Hopf Fall findet man bei CRANDALL & RABINOWITZ [7], vgl. auch [18]. Stabilitätsaussagen für die verzweigenden periodischen Lösungen sind in [19] zu finden.

3.2 Der einfache Hopf–Satz mit Symmetrie

Im ersten Schritt wollen wir der Rolle der Symmetrie im obigen Reduktionsverfahren nachgehen, dann werden wir einen einfachen Satz beweisen, der die Beweisgedanken aus dem Satz von Hopf und dem Satz über äquivariante Verzweigung ausnutzt und Aussagen über periodische Lösungen mit räumlicher Symmetrie macht. Im folgenden sei G eine kompakte Lie–Gruppe, welche auf X operiere durch $\rho : G \to \mathcal{L}(X)$. Die Aktion von G läßt sich in natürlicher Weise fortsetzen zu Aktionen ρ_1 auf $C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$, bzw. ρ_0 auf $C_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$. Offensichtlich ist $\rho_1 \subset \rho_0$. Wie bei der Verzweigung stationärer Lösungen, kann man die Projektoren P, Q äquivariant wählen. An dieser Stelle muß man sich anschauen, wie sich komplexe Eigenwerte auf die Darstellung von Gruppen auswirken. Dazu sei V eine reelle, endlich dimensionale Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe. Ist $A \in \mathcal{L}(X)$ ein äquivarianter Operator, der $\pm i\omega$ als Eigenwerte hat, so ist es unmöglich, daß die Darstellung absolut irreduzibel ist.

Definition 3.2.1 *Die Darstellung von G auf V heißt einfach, wenn sie eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) sie ist irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel.

(ii) $V = W \oplus W$ und die Darstellung auf W ist absolut irreduzibel.

Beispiel 3.2.2 *Beide Möglichkeiten treten auf: die Gruppe $\mathbf{SO}(2)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist ein Beispiel für (i), $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ auf $\mathbb{R}^2$ ist eines für (ii). In beiden Fällen kommutiert $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit der Gruppenaktion.*

Im weiteren benötigen wir Funktionenräume entsprechend denen aus Definition 2.2.1.

Definition 3.2.3 *Seien X_1, X_2 Banachräume, $X_1 \subset X_2$ kompakt und dicht eingebettet. $\rho_2 \supset \rho_1$ seien zwei unendlich dimensionale Darstellungen der kompakten Lie–Gruppe G.*

(i) Sei
$$T_{i\omega_0}(X_1, X_2) = \{A \in T(X_1, X_2) \mid i\omega_0 \in \Sigma(A)\}.$$

(ii) Sei $\tilde{E} = E_{i\omega_0} \oplus E_{-i\omega_0}$, $T = T(X_1, X_2)$. Mit $T^{reg}_{i\omega_0}(X_1, X_2)$ bezeichnen wir die Menge
$$T_{i\omega_0}(X_1, X_2) \cap \{A \in T \mid \tilde{E} \text{ ist einfache Darstellung von } G\,, \forall\, n > 1\ in\omega_0 \notin \Sigma(A)\}.$$

Wiederum ist $T^{reg}_{i\omega_0}(X_1, X_2)$ eine glatte Banachmannigfaltigkeit, vgl. Definition 2.2.3 und Satz 2.2.4. Entsprechend dem Satz 2.2.7 gilt eine Generizitätsaussage für Probleme mit imaginären Eigenwerten.

Satz 3.2.4 *Die Menge der $f \in C^\infty(I, T(X_1, X_2))$, für die gilt*
$$f(s) \in T_{i\omega_0}(X_1, X_2) \Rightarrow f(s) \in T^{reg}_{i\omega_0}(X_1, X_2)$$
und f ist transversal zu $T^{reg}_{i\omega_0}(X_1, X_2)$ ist offen und dicht in $f \in C^\infty(I, T(X_1, X_2))$.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist eine wörtliche Wiederholung des Beweises von Satz 2.2.7. □

Lemma 3.2.5 *Es sei $f \in C^\infty(I, T(X_1, X_2))$ mit $f(s) \in T^{reg}_{i\omega_0}(X_1, X_2)$ und f schneidet $T^{reg}_{i\omega_0}(X_1, X_2)$ transversal und $ni\omega_0 \notin \Sigma(f(0)) \ \forall \ n > 1$. Dann gibt es glatte Kurven $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ von Eigenwerten von $f(\lambda)$ mit $\alpha(0) = 0$ und $\beta(0) = \pm\omega_0$.*

Beweis: Der Eigenprojektor $P(\lambda)$ auf den Raum $\tilde{E}$ hängt glatt von λ ab. Damit folgt die Aussage sofort wenn wir zeigen, daß es für λ nahe 0 nur einen Eigenwert nahe $i\omega_0$ gibt. Im Fall daß der Eigenraum die direkte Summe zweier isomorpher Darstellungen ist, ist dies klar. Im andern Fall wissen wir aus Satz 2.1.9, daß die Darstellung auf dem Eigenraum für λ nahe 0 irreduzibel, jedoch nicht absolut irreduzibel ist. Angenommen $\mu_{1,2}$ wären zwei Eigenwerte nahe $i\omega_0$. Sei V_i der verallgemeinerte Eigenraum zu μ_i und $\overline{\mu}_i$. Dann ist aber jeder dieser Unterräume invariant und damit die Darstellung reduzibel. □

Lemma 3.2.6 *Sei V eine reelle, endlich dimensionale, einfache Darstellung einer kompakten Lie–Gruppe G. Hat eine Matrix A, die mit der Aktion von G vertauscht, einen rein imaginären Eigenwert, so ist V gerade dimensional und es gibt es eine reguläre, mit G kommutierende Matrix S, so daß SAS^{-1} die Form*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Einheitsmatrix $I_{n/2}$ auf $\mathbb{R}^{n/2}$ hat. Insbesondere hat jede kommutierende Matrix, bis auf Ähnlichkeitstransformationen, die Gestalt $a\mathbb{1}_V + bJ$ mit reellen Zahlen a, b.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus dem vorherigen Lemma. Die Form der kommutierenden Matrizen erhält man durch die Überlegung, daß alle Eigenwerte von der Form $\pm is,\ s > 0$ und alle gleich sind. Darüberhinaus sind alle Eigenwerte halbeinfach. Sonst wäre der geometrische Eigenraum invariant. Die kommutierenden Matrizen im allgemeinen Fall erhält man nun als triviale Folgerung. □

Satz 3.2.7 *Es seien $\rho_{1,2}$ unendlich dimensionale Darstellungen der kompakten Lie–Gruppe G, $\rho_2 \supset \rho_1$. Wir betrachten die Gleichung*

$$\frac{dx}{dt} + A(\lambda)x = F(x, \lambda),$$

wobei $A(\lambda)$ eine glatte Familie G-äquivarianter abgeschlossener linearer Abbildungen von $X_2 \to X_2$ sei mit $D(A(\lambda)) = X_1$ für alle λ. Für jedes λ habe $A(\lambda)$ eine kompakte Resolvente, und sei sektoriell. $A = A(0)$ habe einen Eigenwert $i\omega_0$ der Vielfachheit μ mit G–einfachem Eigenraum $\tilde{E}$. $F : \mathbb{R} \times X_2^\alpha \to X_2$ sei genügend glatt. Sei V der Kern von J_0. Ferner sei $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ die glatte Fortsetzung des Eigenwertes $\pm i\omega_0$. Ist $\alpha'(0) \neq 0$ und gibt es eine Isotropiegruppe Δ in G mit $\dim \mathrm{Fix}(\Delta) = 2$, so verzweigt eine Schar periodischer Lösungen $\lambda(s), x_s(t), s < s_0$ bei $\lambda = 0$ von der trivialen Lösung. Für jedes $\delta \in \Delta, s < s_0$ gilt

$$\rho_2(\delta)x_s(t) = x_s(t).$$

Beweis: Betrachte die Aktion von G auf X_2. Dann ist $\mathrm{Fix}(\Delta) \subset X_2$ ein abgeschlossener Unterraum, also ein Banachraum. Gleiches gilt für X_1 und X_2^α. Der Halbfluß zu unserer Differentialgleichung respektiert $\mathrm{Fix}(\Delta)$. Außerdem hat die Linearisierung einen einfachen Eigenwert $\pm i\omega_0$. Also können wir den Satz 3.1.3 in $\mathrm{Fix}(\Delta)$ anwenden, um die Existenz der behaupteten Lösungen zu erhalten. □

3.3 Räumlich–zeitliche Symmetrien

Wir betrachten wieder eine Gleichung des Typs

$$\frac{dx}{dt} + A(\lambda)x = F(x, \lambda),$$

welche äquivariant bezüglich der Aktion einer kompakten Lie–Gruppe G ist, und suchen periodische Lösungen. Sei $x(t)$ eine solche Lösung. Wir definieren zwei Typen von Symmetrien.

Definition 3.3.1 *(i) Gibt es ein Gruppenelement $g \in G$ mit $gx(t) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so nennt man g eine räumliche Symmetrie.*

(ii) Gibt es ein $g \in G$ und ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit

$$gx(t) = x(t + \theta),$$

so sprechen wir von einer räumlich–zeitlichen Symmetrie.

Um diesen Begriff gruppentheoretisch verstehen zu können, schauen wir uns erneut die Aktion von G auf den Räumen $C_{2\pi}(\mathbb{R}, X_2)$ an. Wie bereits bemerkt ist die Gleichung äquivariant bezüglich dieser Aktion. Jedoch hat die Gleichung noch weitere Äquivarianzeigenschaften. Sei $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dann operiert die Gruppe S^1 auf den 2π–periodischen Funktionen durch Zeitverschiebung

$$(\theta, u) \mapsto \theta u : \theta u(t) = u(t - \theta).$$

Die Gleichung, da autonom, ist sogar äquivariant bezüglich dieser Aktion. Also hat man eine Aktion der Gruppe $\Gamma = G \times S^1$ auf $C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X_2)$ bzw. auf $C_{2\pi}(\mathbb{R}, X_2)$. Das Element $\gamma = (g, \theta)$ operiert durch

$$((g, \theta), u) \mapsto \gamma u : \gamma u(t) = gu(t - \theta).$$

Räumlich-zeitlichen Symmetrien von Funktionen treten genau dann auf, wenn die entsprechende Funktion in Γ einen nichttrivialen Stabilisator Σ hat und $\Sigma \not\subset G$. Wegen der Äquivarianz der Gleichung, ist der Kern von J_0 ein invarianter Unterraum für die Aktion von Γ. Man hätte nun gerne den Satz, daß ein zweidimensionaler Fixraum $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ einer Untergruppe $\Sigma \subset \Gamma$ zur Verzweigung periodischer Lösungen führt. Versucht man den

Beweis des einfachen Hopf Satzes zu übertragen, so bemerkt man, daß dies scheitert, da $\text{Fix}(\Sigma)$ als Unterraum von X_2 bezüglich der Aktion von ρ_2 kein invarianter Unterraum für die Dynamik ist. Der folgende Satz geht auf GOLUBITSKY & STEWART[2] zurück: [11]

Satz 3.3.2 *Es seien $X_{1,2}$ unendlich dimensionale Darstellungen der kompakten Lie–Gruppe G, $\rho_2 \supset \rho_1$. Wir betrachten die Gleichung*

$$\frac{dx}{dt} + A(\lambda)x = F(x, \lambda),$$

wobei $A(\lambda)$ eine glatte Familie G-äquivarianter abgeschlossener linearer Abbildungen von $X_2 \to X_2$ sei mit $D(A(\lambda)) = X_1$ für alle λ. Für jedes λ habe $A(\lambda)$ eine kompakte Resolvente, und sei sektoriell. $A = A(0)$ habe einen Eigenwert $i\omega_0$ der Vielfachheit μ mit G–einfachem Eigenraum $\tilde{E}$. $F : \mathbb{R} \times X_2^\alpha \to X_2$ sei genügend glatt. Sei V der Kern von J_0. Ferner sei $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ die glatte Fortsetzung des Eigenwertes $\pm i\omega_0$. Ist $\alpha'(0) \neq 0$ und gibt es eine Isotropiegruppe Δ in Γ mit $\dim \text{Fix}(\Delta) = 2$, so verzweigt eine Schar periodischer Lösungen $\lambda(s), x_s(t), s < s_0$ bei $\lambda = 0$ von der trivialen Lösung. Für jedes $\delta \in \Delta, s < s_0$ δ gilt ist räumlich-zeitliche Symmetrie von $x(t)$.

Beweis: Zunächst folgt aus der Äquivarianz von

$$(\omega\frac{d}{ds} + J_0 + (A(\lambda) - A))x - F(\lambda, x)$$

als Abbildung $C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X^\alpha) \to C_{2\pi}(\mathbb{R}, X_2)$, daß der Kern von J_0 ein invarianter Unterraum ist, und daß es eine äquivariante Lyapunov–Schnidt Reduktion gibt. Sei $V = \ker J_0$ und $g : \mathbb{R}^2 \times V \to V$ die aus der Lyapunov-Schmidt Gleichung erhaltene Abbildung. Diese ist Γ äquivariant und respektiert demzufolge den Raum $\text{Fix}(\Delta)$. Sei $g_1 : \mathbb{R}^2 \times \text{Fix}(\Delta) \to \text{Fix}(\Delta)$. Man überlegt sich leicht, daß die gleichen Argumente wie beim ursprünglichen Beweis des Hopfschen Satzes die Form der Abbildung bestimmen und die Abbildung die gleichen Eigenschaften hat, wie dort gezeigt. Dann kann man durch Fixierung der Phase eine Variable eliminieren und die verbleibenden beiden Gleichungen mit dem Satz über implizite Funktionen lokal nach τ und λ auflösen. □

.

3.4 Anwendungen und Beispiele

Wir gehen von einer kompakten Lie–Gruppe G aus und wollen Hopf–Verzweigung zu periodischen Lösungen mit räumlich-zeitlichen Symmetrien verstehen. Sei $\Gamma = G \times S^1$.

[2] Ian Stewart, zeitgenössischer Mathematiker an der University of Warwick, arbeitet über Singularitätentheorie und nichtlineare Dynamik, von ihm stammen nicht nur sehr viele mathematische Lehrbücher und Monographien, sondern er ist auch als Schreiber von populärwissenschaftlichen Büchern und Artikeln und, last not least, als Science Fiction Autor sehr erfolgreich.

Wir betrachten eine G–äquivariante Gleichung

$$\frac{dx}{dt} + A(\lambda)x = f(x, \lambda)$$

auf dem Banachraum X, wobei $A(\lambda) = A + o(|\lambda|)$ eine Familie von abgeschlossenen linearen Operatoren auf X mit Definitionsbereich $D(A(\lambda)) = D(A)$ unabhängig von λ wie zuvor definiert sei. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß A eine kompakte Resolvente habe. Sei

$$J_0 = \omega_0 \frac{dx}{dt} + A.$$

J_0 ist eine Abbildung $J_0 : C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$. Wir setzen voraus A habe Eigenwerte $\pm i$ und keine Eigenwerte der Form $\pm ki$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$. Es sei E_i der Eigenraum von A zum Eigenwert i. Dann ist leicht zu sehen, daß $\ker J_0$ in natürlicher Weise isomorph zu

$$E_i = \{x \in X \mid (A - i)(A + i)x = (A^2 + \mathbb{1})x = 0\}$$

ist. Der Isomorphismus ist einfach gegeben durch

$$x \mapsto \exp(-At)x.$$

Wir setzen ferner voraus, daß G auf $\ker J_0$ einfach operiere. Um die Darstellung von Γ auf E_i zu beschreiben, gehen wir nochmal zur Konstruktion des Kernes von J_0 zurück. Für $\varphi_{\pm j}$ hat man

$$\begin{aligned}
\varphi_j(t+s) &= \cos(t+s)\phi_j^r + \sin(t+s)\phi_j^i \\
&= \cos(s)\left(\cos(t)\phi_j^r + \sin(t)\phi_j^i\right) + \sin(s)\left(-\sin(t)\phi_j^r + \cos(t)\phi_j^i\right) \\
&= \cos(s)\varphi_j(t) + \sin(s)\varphi_{-j}(t),
\end{aligned}$$

und entsprechend gilt für $\varphi_{-j}(t+s)$

$$\varphi_{-j}(t+s) = -\sin(s)\varphi_j(t) + \cos(s)\varphi_{-j}(t).$$

Ist nun J der infinitesimale Erzeuger der Gruppe der Translationen auf $\ker J_0$, so hat dieser die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} \\ -\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt wirkt eine Drehung nun durch $\exp(tJ)$ auf $\ker J_0$ und damit auf E_i. Insgesamt hat man die Aktion der Gruppe $\Gamma = G \times S^1$ auf $\ker J_0$ durch

$$(g, s)\varphi_j(t) = g\varphi_j(t+s),$$

wobei die Aktion von G auf φ_j durch

$$g\varphi_j(t) = \cos(t)g\phi_j^r + \sin(t)g\phi_j^i$$

definiert ist. Die natürliche Frage in diesem Zusammenhang ist die nach Isotropieuntergruppen in $\Gamma = G \times S^1$.

Definition 3.4.1 *Es sei $H \subset G$ eine Untergruppe, und $\theta : H \to S^1$ ein Gruppenhomomorphismus, so heißt*

$$H^\theta = \{(h, \theta(h)) \in G \times S^1 \mid h \in H\}$$

eine (θ-)verdrillte Untergruppe von Γ. Ist θ aus dem Zusammmenhang klar, so sprechen wir einfach von einer verdrillten Untergruppe.

Nun hat man das folgende Lemma.

Lemma 3.4.2 *Es sei G eine kompakte Lie–Gruppe, V ein endlich dimensionaler G–einfacher Raum mit Aktion von $\Gamma = G \times S^1$ wie gerade definiert. Es sei $\Pi : \Gamma \to G : \Pi(g, s) = g$ die natürliche Projektion. Ist $\Sigma \subset \Gamma$ eine Isotropieuntergruppe und $H = \Pi(\Sigma)$, so gilt*

(i) $\Pi : \Sigma \to H$ *ist ein Isomorphismus,*

(ii) es existiert ein Gruppenhomomorphismus $\theta : H \to S^1$, so daß $\Sigma = H^\theta$.

Beweis: Aufgrund der Darstellung der Aktion der Gruppe S^1 als nichttriviale Rotation in der $(\varphi_{-j}, \varphi_j)$-Ebene ist klar, daß diese Aktion fixpunktfrei ist. Daher ist

$$\Sigma \cap (\mathbb{1} \times S^1) = \{\mathbb{1}, \mathbb{1}\}.$$

Sei $\Pi : G \times S^1 \to \mathbb{G}$ die Projektion, so ist $\ker \Pi = S^1$ und $\ker \Pi_{|\Sigma} = \{\mathbb{1}, \mathbb{1}\}$, also $\Pi_{|\Sigma}$ injektiv, also ein Isomorphismus. Nun müssen wir zeigen, daß θ ein Homomorphismus ist. Sei $\sigma \in \Sigma$, dann ist $\sigma = (h, s)$ mit $h \in H, s \in S^1$. Da Π ein Isomorphismus von Σ auf H ist, gibt es zu $h \in H$ genau ein Element $s = \theta(h)$ mit $(h, s) \in \Sigma$. Um einzusehen, daß θ ein Homomorphismus ist, beachten wir, daß für $h, k \in H$ gilt

$$(h, \theta(h))(k, \theta(k)) = (hk, \theta(h)\theta(k)) \in \Sigma,$$

also aufgrund der eben gemachten Beobachtung $\theta(h)\theta(k) = \theta(hk)$. □

Bemerkung 3.4.3 *Das soeben gezeigte Lemma besagt also, daß jede Isotropieuntergruppe eine verdrillte Untergruppe ist.*

Bemerkung 3.4.4 *Sei G eine kompakte Lie–Gruppe mit einer einfachen Darstellung. Für eine Isotropieuntergruppe Σ gilt dann,* $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) \geq 2$. *Um dies einzusehen, beachtet man zunächst, daß, da S^1 abelsch ist, gilt, $N_\Gamma(\Sigma) \supset S^1$. Ist $D(\Sigma) = N_\Gamma(\Sigma)/\Sigma$, so ist $S^1 \subset D(\Sigma)$. $D(\Sigma)$ operiert fixpunktfrei, also ist* $\dim(\mathrm{Fix}(\Sigma)) \geq 2$.

Als nächstes stellt sich die Frage nach einem Kriterium für konjugierte Isotropieuntergruppen. Wie wir wissen, ist die Konjugiertheit von Σ_1 und Σ_2 notwendig dafür, daß beide auf dem gleichen Orbit liegen.

Lemma 3.4.5 *(i) Sind H^{θ_1} und K^{θ_2} konjugierte, verdrillte Untergruppen von Γ, so sind H und K konjugiert.*

(ii) Sind H^{θ_1} und H^{θ_2} verdrillte Untergruppen von Γ, und $K_{\theta_1} = \ker\theta_1$, bzw. $K_{\theta_2} = \ker\theta_2$ sind die zugehörigen rein räumlichen Symmetrien. Sind H^{θ_1} und H^{θ_2} in Γ konjugiert, so existiert ein $g \in N_G(H)$ mit $K_{\theta_2} = gK_{\theta_1}g^{-1}$.

Beweis:

(i) Seien H^{θ_1} und K^{θ_2} konjugiert in Γ, so existiert ein Element $(g,s) \in G \times S^1$, so daß für alle $(h, \theta_1(h)) \in H^{\theta_1}$ gilt

$$(g,s)^{-1}(h,\theta_1(h))(g,s) = (g^{-1}hg, s^{-1}\theta_1(h)s) = (g^{-1}hg, \theta_2(h)) \in K^{\theta_2}.$$

Also ist $g^{-1}Hg \subset K$. Durch Vertauschen der Rollen von H, K erhält man die umgekehrte Beziehung, und H, K sind konjugiert.

(ii) Seien H^{θ_1}, bzw. H^{θ_2} verdrillt und konjugiert. Wähle $(g,s) \in G \times S^1$ mit

$$(g,s)^{-1}H^{\theta_1}(g,s) = H^{\theta_2}.$$

Insbesondere $g^{-1}Hg = H$, also $g \in N_G(H)$. Aufgrund der Definition von Konjugation gilt für $h \in H^{\theta_1}$

$$(g^{-1}hg, \theta_1(h)) = (h', \theta_2(h')),$$

also

$$\theta_1(h) = \theta_2(h') = \theta_2(g^{-1}hg),$$

und damit

$$\ker\theta_1 = g\ker\theta_2 g^{-1}$$

oder

$$K_{\theta_1} = gK_{\theta_2}g^{-1}.$$

□

Bemerkung 3.4.6 *Aufgrund des Lemmas hat man folgende Möglichkeiten für Verdrillungen. Wie oben sei $H^\theta \subset G \times S^1 = \Gamma$ eine verdrillte Untergruppe und $K_\theta = \ker\theta$. K_θ ist per definitionem Kern eines Homomorphismus und damit normal in H. Nach dem Isomorphiesatz für Gruppen ist H/K_θ isomorph zum Bild von θ, also zu einer abgeschlossenen Untergruppe von S^1. Diese sind schnell klassifiziert: jede abgeschlossenene Untergruppe von S^1 ist isomorph zu $\{\mathbb{1}\}$, $\mathbb{Z}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder zu S^1.*

Bemerkung 3.4.7 *Die Umkehrung des vorigen Lemmas ist falsch, es kann sein, daß K_{θ_1} unter der Konjugation eines Elementes des Normalisators in K_{θ_2} übergeht, ohne daß H^{θ_1} und H^{θ_2} konjugiert sind. Ein Beispiel dafür ist $G = H = \mathbb{Z}_3$ mit erzeugendem Element ω. Ist $\theta_1(\omega) = \omega^2$ und $\theta_2(\omega) = \omega$, so ist $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \{\mathbb{1}\}$, aber H^{θ_1} ist nicht konjugiert zu H^{θ_2}, da S^1 abelsch ist.*

Beispiel 3.4.8 *Wir betrachten im folgenden die Gruppe* $G = \mathbf{O}(2)$ *und damit* $\Gamma = \mathbf{O}(2) \times S^1$ *mit der Aktion dieser Gruppe auf* $\mathbb{C}^2$. *Sei* r_ϕ *die Drehung in* $\mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{O}(2)$, κ *eine Spiegelung in* $\mathbf{O}(2)$ *und schließlich* R_ϕ *die Drehung um den Winkel* ϕ *in* S^1. *Die Aktion von* Γ *sei gegeben durch*

$$\begin{aligned} r_\phi(\zeta_1, \zeta_2) &= (e^{-i\phi}\zeta_1, e^{i\phi}\zeta_2) \\ \kappa(\zeta_1, \zeta_2) &= (\zeta_2, \zeta_1) \\ R_\psi(\zeta_1, \zeta_2) &= (e^{i\psi}\zeta_1, e^{i\psi}\zeta_2). \end{aligned}$$

Lemma 3.4.9 *Für die im Beispiel angegebene Aktion hat man folgende Dimensionen der Fixräume. Wir geben dabei immer einen typischen Punkt des angegebenen Orbittyps, die Isotropie dieses Punktes, den Fixraum und schließlich dessen Dimension an:*

Vertreter	IsotropieΣ	$\mathrm{Fix}(\Sigma)$	$\dim \mathrm{Fix}(\Sigma)$
$(0,0)$	$\mathbf{O}(2) \times S^1$	$\{0\}$	0
$(a,0),\ a>0$	$\widetilde{\mathbf{SO}(2)} = \{(r_\phi, R_\phi) \mid \phi \in S^1\}$	$\{(\zeta_1, 0) \mid \zeta_1 \in \mathbb{C}\}$	2
$(a,a),\ a>0$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$\{(\zeta,\zeta) \mid \zeta \in \mathbb{C}\}$	2
$(a,b),\ a>b>0$	$\mathbb{Z}_2^c$	$\mathbb{C}^2$	4

Dabei steht $\mathbb{Z}_2^c$ *für* $\{(0,0), (r_\pi, R_\pi)\}$

Bemerkung 3.4.10 *Aufgrund des Hopf Satzes bekommt man periodische Lösungen mit Isotropie* $\widetilde{\mathbf{SO}(2)}$ *und mit Isotropie* $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$. *Lösungen des zuerst genannten Typs nennt man* **rotierende Wellen**, *des an zweiter Stelle genannten Typs* **stehende Wellen**. *Bei der rotierenden Welle entspricht die Zeitverschiebung um Winkel* ϕ *einer Translation um die Zeit* ϕ.

Beweis von Lemma 3.4.9: Zunächst stellen wir fest, daß durch die Drehungen r_ϕ, R_ψ erreicht werden kann, daß beide Koordinaten reell und positiv sind: sei $\zeta_1 = r_1 e^{i\alpha}, \zeta_2 = r_2 e^{i\beta}$, so ist $(r_\phi, R_\psi)(\zeta_1, \zeta_2) = (r_1 e^{i\alpha - i\phi + i\psi}, r_2 e^{i\beta + i\phi + i\psi})$ und durch Lösen eines linearen Gleichungssystems erhält man (r_1, r_2). Mittels κ errreicht man $r_1 \geq r_2$. Da der Isotropietyp längs des Orbits erhalten bleibt, haben wir die erste Teilbehauptung gezeigt. Es bleiben vier Fälle

$a = b = 0:$ Hier folgt sofort $\Sigma = \mathbf{O}(2) \times S^1$ und $\mathrm{Fix}(\Sigma) = (0,0)$.

$a > 0, b = 0:$ Hier ist offensichtlich für jedes ϕ das Element $(r_\phi, R_\phi) \in \Sigma$, denn $(r_\phi, R_\phi)(a, 0) = (e^{i\phi - i\phi}a, 0)$.

$a = b > 0:$ Hier ist offensichtlich $\kappa \in \Sigma$, darüberhinaus sieht man leicht, daß $(r_\phi, R_\psi) \in \Sigma$ genau dann der Fall ist, wenn $\phi + \psi$ und $\phi - \psi$ Vielfache von 2π sind, d.h. $\phi = \psi = \pi$. Also ist Σ, die von $\kappa, (r_\pi, R_\pi)$ erzeugte Untergruppe.

$a > b > 0:$ Die gleiche Rechnung wie oben zeigt, daß Σ von (r_π, R_π) erzeugt wird. Für jedes der hier angegebenen Σ rechnet man leicht den Fixpunktraum und damit dessen Dimension aus.

□

Der nächste Schritt besteht darin, die Äquivarianten und Invarianten zu bestimmen. Zunächst wollen wir uns die Poincaré–Reihen ansehen. Nach Satz 1.7.2 haben diese für eine gegebene Darstellung ρ die Gestalt ($|t| < 1$):

$$\begin{aligned} p_R^\rho(t) &= \int_G \frac{1}{\det(1 - t\rho(g))} d\mu(g) \\ p_M^\rho(t) &= \int_G \frac{\overline{\chi_\rho(g)}}{\det(1 - t\rho(g))} d\mu(g). \end{aligned}$$

Lemma 3.4.11 *Für die angegebene Darstellung erhält man*

$$\begin{aligned} p_R^\rho(t) &= \frac{1}{(1-t^2)(1-t^4)} \\ p_M^\rho(t) &= \frac{t+t^3}{(1-t^2)(1-t^4)} \end{aligned}$$

Beweis: Sei T^2 der maximale Torus in $\mathbf{O}(2) \times S^1$, also $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Für unsere Darstellung der Gruppe

$$\Gamma = \mathbf{O}(2) \times S^1 = \mathbf{SO}(2) \times S^1 \dot{\cup} \kappa\, \mathbf{SO}(2) \times S^1 = T^2 \dot{\cup} \kappa T^2$$

ergibt sich

$$p_R^\rho(t) = \frac{1}{2}\left(\int_{T^2} \frac{1}{\det(1 - t\rho(g))} d\mu(g) + \int_{\kappa T^2} \frac{1}{\det(1 - t\rho(g))} d\mu(g) \right). \tag{3.4.3}$$

Wir schreiben die Aktion von Γ in der Form (r_ϕ, τ, R_ψ) mit $\tau = 0$ oder $\tau = \kappa$. Dann hat man die Matrixdarstellung für die Aktion

$$\rho(r_\phi, 0, R_\psi) = \left(\begin{array}{cc|cc} e^{i(\phi-\psi)} & & & \\ & e^{i(\phi+\psi)} & & \\ \hline & & e^{-i(\phi-\psi)} & \\ & & & e^{-i(\phi-\psi)} \end{array} \right). \tag{3.4.4}$$

Als Determinante erhält man

$$\det(\mathbb{1} - t\rho(\phi, 0, \psi)) = (1 - te^{i(\phi-\psi)})(1 - te^{i(\phi+\psi)})(1 - te^{-i(\phi-\psi)})(1 - te^{-i(\phi+\psi)}).$$

Wir setzen $z_1 = e^{i\phi}$, $z_2 = e^{i\psi}$ und erhalten für die Determinante den Ausdruck

$$\det(\mathbb{1} - t\rho(\phi, 0, \psi)) = (1 - tz_1^{-1}z_2)(1 - tz_1z_2)(1 - tz_1z_2^{-1})(1 - tz_1^{-1}z_2^{-1}).$$

Nun ergibt sich, einschließlich der Transformation der Integrationsvariablen,

$$\begin{aligned}
&\int_{T^2} \frac{1}{\det(\mathbb{1} - t\rho(\phi, 0, \psi))} d(\phi, \psi) = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{|z_1|=1} \oint\limits_{|z_2|=1} \frac{1}{z_1 z_2} \frac{1}{(1 - tz_1^{-1}z_2)(1 - tz_1z_2)(1 - tz_1z_2^{-1})(1 - tz_1^{-1}z_2^{-1})} d(z_1 z_2) \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{|z_1|=1} \oint\limits_{|z_2|=1} \frac{z_1 z_2}{(z_1 - tz_2)(1 - tz_1z_2)(z_2 - tz_1)(z_1z_2 - t)} dz_2 dz_1
\end{aligned}$$

Wir werten zuerst das innere Integral aus und erhalten mit dem Residuensatz [6]

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z_2|=1} \frac{z_1 z_2}{(z_1 - tz_2)(1 - tz_1z_2)(z_2 - tz_1)(z_1z_2 - t)} dz_2 = \\
&= \sum_i \operatorname{res}\left(\frac{z_1 z_2}{(z_1 - tz_2)(1 - tz_1z_2)(z_2 - tz_1)(z_1z_2 - t)}, z_2^i\right),
\end{aligned}$$

wobei $\operatorname{res}(f, z_0)$ das Residuum einer Funktion $f(z)$ an einer Polstelle $z = z_0$ ist. In diesem Falle findet man die Pole bei $z_2 = tz_1$ und $z_2 = \frac{t}{z_1}$, also ergibt sich für den letzten Ausdruck

$$g(z_1) = \frac{(1 + t^2)z_1}{(-1 + t^2)(t^2 - z_1^2)(1 - t^2z_1^2)},$$

eine analytische Funktion in z_1, deren Integral wieder mit dem Residuensatz ausgewertet werden kann. Es ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z_1|=1} g(z_1) dz_1 = \sum_j \operatorname{res}(g, z_1^j) = \frac{1}{(1 - t^2)^2}. \tag{3.4.5}$$

Wir kommen nun zur Berechnung des Integrals über κT^2 Dies hat die Matrixdarstellung

$$\rho(\phi, \kappa, \psi) = \left(\begin{array}{cc|cc} & e^{i(\phi+\psi)} & & \\ e^{i(\phi-\psi)} & & & \\ \hline & & & e^{-i(\phi+\psi)} \\ & & e^{-i(\phi-\psi)} & \end{array}\right),$$

und damit wird die Determinante von $(\mathbb{1} - t\rho(\phi, \kappa, \psi))$ zu

$$\det(\mathbb{1} - t\rho(\phi, \kappa, \psi)) = (1 - t^2e^{2i\phi})(1 - t^2e^{-2i\phi}).$$

Durch das Umschreiben auf die z_1, z_2-Koordinaten in $\mathbb{C}^2$ muß schließlich das folgende Integral ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}
&\int_{\kappa T^2} \frac{1}{\det(\mathbb{1} - t\rho(\phi,\kappa,\psi))} d\phi d\psi = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z_2|=1} \oint_{|z_1|=1} \frac{1}{z_1 z_2 (1 - t^2 z_2^2)(1 - t^2 z_2^{-2})} dz_1 dz_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z_2|=1} \oint_{|z_1|=1} \frac{z_2}{z_1 (1 - t^2 z_2^2)(z_2^2 - t^2)} dz_1 dz_2
\end{aligned}$$

Der Integrand hat bezüglich z_1 einen einfachen Pol bei $z_1 = 0$ und es bleibt auszuwerten das Integral

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z_2|=1} \frac{z_2}{(1 - t^2 z_2^2)(z_2 - t)(z_2 + t)} dz_2 = \\
&= \operatorname{res}\left(\frac{z_2}{(1 - t^2 z_2^2)(z_2 - t)(z_2 + t)}, z_2 = t\right) + \operatorname{res}\left(\frac{z_2}{(1 - t^2 z_2^2)(z_2 - t)(z_2 + t)}, z_2 = -t\right) \\
&= \frac{1}{1 - t^4}.
\end{aligned}$$

Alles in allem ergibt sich für die Poincaré–Reihe

$$p_R^\rho(t) = \frac{1}{(1 - t^2)(1 - t^4)}.$$

Als nächster Schritt wird die Poincaré–Reihe p_M^ρ für den Modul der äquivarianten Abbildungen berechnet. Zunächst müssen wir die Spur der darstellenden Matrix angeben. Wir haben

$$\begin{aligned}
\chi_\rho(\phi, 0, \psi) &= e^{i(\phi-\psi)} + e^{i(\phi+\psi)} + e^{-i(\phi-\psi)} + e^{-i(\phi+\psi)} \\
&= z_1^{-1} z_2 + z_1 z_2 + z_1 z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1} \\
&= (z_1 + z_1^{-1})(z_2 + z_2^{-1}) \\
&= \frac{(z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)}{z_1 z_2}, \\
\chi_\rho(\phi, \kappa, \psi) &= 0.
\end{aligned}$$

Für p_M^ρ ergibt sich nun

$$p_M^\rho(t) = \frac{1}{2} \int_{T^2} \frac{\overline{\chi_\rho(\phi,\psi)}}{\det(\mathbb{1} - t\rho(\phi, 0, \psi))} d(\phi, \psi)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{|z_2|=1}\oint\limits_{|z_1|=1}\frac{(z_2^2+1)(z_1^2+1)}{(z_1-tz_2)(1-tz_1z_2)(z_2-tz_1)(z_1z_2-t)}dz_1dz_2.$$

Integration bezüglich z_1 führt auf die Betrachtung der Pole bei $z_1 = tz_2$ und $z_1 = t/z_2$. Wir erhalten daraus

$$\frac{2t(1+z_2^2)}{(-1+t^2)z_2(-t^2+z_2^2)(-1+t^2z_2^2)}. \tag{3.4.6}$$

Aufaddieren der Residuen bei $z_2 = 0$, bzw. $z_2 = \pm t$ ergibt schließlich

$$p_M^\rho(t) = 2\frac{t+t^3}{(1-t^2)(1-t^4)}.$$

$\square$

Warnung: Im folgenden Lemma steht $P_\Gamma(\mathbb{C}^2)$ für den Raum der Polynome in $z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}$, d.h. für reelle Polynome in komplexer Schreibweise und nicht etwa für einen Raum komplexer Polynome. Entsprechendes gilt für $P_\Gamma(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

Lemma 3.4.12 *(i) Die folgenden Polynome erzeugen die Algebra $P_\Gamma(\mathbb{C}^2)$ der invarianten Polynome*

$$\begin{aligned} \pi_1(\zeta_1,\zeta_2) &= |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 \\ \pi_2(\zeta_1,\zeta_2) &= \left(|\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2\right)^2 \end{aligned}$$

(ii) Der Modul der äquivarianten, polynomialen Abbildungen $P_\Gamma(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ über $P_\Gamma(\mathbb{C}^2)$ wird erzeugt von den Gradienten $e_j = \overline{\nabla_z \pi_j}$, $j = 1, 2$.

Beweis:

(i) Zunächst ist $\pi_1(\zeta_1,\zeta_2) = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2$ offensichtlich eine quadratische Invariante. Die Funktion

$$\tilde{\pi}_2(\zeta_1,\zeta_2) = |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2$$

ist invariant unter den Drehungen aber wechselt ihr Vorzeichen unter κ. Also ist $\pi_2 = \tilde{\pi}_2{}^2$ invariant.

(ii) Die Gradienten sind äquivariant und errechnen sich zu

$$e_1(\zeta_1,\zeta_2) = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix},$$

bzw. zu

$$e_2(\zeta_1,\zeta_2) = 2\tilde{\pi}_2 \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ -\zeta_2 \end{pmatrix}.$$

□

Im nächsten Schritt betrachten wir die Hilbertabbildung.

Lemma 3.4.13 *Der Bildbereich der Hilbertabbildung ist gegeben durch*

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^2) = \{(\pi_1, \pi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \pi_2 \leq \pi_1^2\}.$$

Dabei entsprechen Punkte im Inneren Punkten der Isotropie $\mathbb{Z}_2^c$. Die Punkte $\pi_2 = 0, \pi_1 > 0$ entsprechen den Punkten mit Symmetrie $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$. Der Ursprung ist Orbit des Ursprungs in $\mathbb{C}^2$ und hat demzufolge die Isotropie $\mathbf{O}(2) \times S^1$. Schließlich fehlen noch die Punkte auf der Parabel $\pi_2 = \pi_1^2$, $\pi_1 > 0$. Diese sind die Orbits der Punkte mit Isotropie $\widetilde{\mathbf{SO}(2)}$.

Beweis: π_1 nimmt nur nichtnegative Werte an. Für festes π_1 ermittelt man das zugehörige Intervall für π_2 durch maximieren. □

Wir betrachten nun spezielle Gleichungen und ihr Verzweigungsverhalten. Die allgemeine Gleichung bis zur dritten Ordnung lautet für komplexe Zahlen a, b

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega)e_1 + a\pi_1 e_1 + b e_2.$$

Umschreiben der Differentialgleichung für die Invarianten liefert

$$\dot{\pi}_i = \nabla_z \pi_i \dot{z} + \nabla_{\overline{z}} \pi_i \dot{\overline{z}} = \overline{e_i}\dot{z} + e_i \dot{\overline{z}} = 2\mathrm{Re}(\overline{e}_i \dot{z}).$$

Man prüft nun folgende innere Produkte nach

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 e_1 &= \pi_1, \\ \overline{e}_1 e_2 &= 2\pi_2, \\ \overline{e}_2 e_1 &= 2\pi_2, \\ \overline{e}_2 e_2 &= 4\pi_1\pi_2. \end{aligned}$$

Damit erhält man als Gleichung auf dem Orbitraum mit $a^r = \mathrm{Re}a$, bzw. $b^r = \mathrm{Re}b$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= 2((\lambda + a^r\pi_1)\pi_1 + 2b^r\pi_2) \\ \dot{\pi}_2 &= 4\pi_2(\lambda + \pi_1(a^r + 2b^r)). \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß der Rand des Bildes von $\mathcal{H}$ invariant unter dem zugehörigen Fluß ist. Wir machen die Generizitätsannahme

$$a^r \neq 0, \quad a^r + 2b^r \neq 0. \tag{3.4.7}$$

Um Lösungen mit den entsprechenden Orbittypen zu erhalten, schränkt man sich auf die zugehörigen Untermannigfaltigkeiten ein. Für die Gruppe $\widetilde{\mathbf{SO}(2)}$ ist dies $\pi_2 = \pi_1^2$. Die Gleichungen $\dot{\pi}_1 = \dot{\pi}_2 = 0$ liefern dann

$$\pi_1 = -\frac{\lambda}{a^r + 2b^r}$$

Die Eigenwerte der Linearisierung an diesem Punkt sind -2λ und $\frac{8b^r\lambda}{a^r+2b^r}$. Für die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$ ergibt sich $\pi_2 = 0$. Als nichttriviale Lösung folgt somit

$$\pi_1 = -\frac{\lambda}{a^r}.$$

In diesem Fall sind die Eigenwerte der Linearisierung -2λ und $-8\lambda\frac{b^r}{a^r}$. Damit ergibt sich das Verzweigungsdiagramm Wir verlassen nun das Beispiel und stellen uns die Frage, wie man die Dimensionen der Fixräume ausrechnen kann. Dazu dient das nachstehende Lemma. Wir gehen dabei von einer Gruppe $\Gamma = G \times S^1$ aus, welche auf $V \oplus V$ operiere, und betrachten verdrillte Untergruppen H^θ mit $K_\theta = \ker\theta \subset H$.

Lemma 3.4.14 *Für die Dimensionen der Fixräume ergeben sich folgende Formeln. Dabei sei L, M die eindeutig bestimmte Untergruppe $K_\theta \subset L, M \subset H$ mit $|H/L| = 3$ und $|H/M| = 2$.*

(i) $\theta(H) = \mathbb{1}$. *Dann ist* $\dim \mathrm{Fix}(H^\theta) = 2 \dim \mathrm{Fix}(H)$.

(ii) $\theta(H) = \mathbb{Z}_2$. *Jetzt gilt* $\dim \mathrm{Fix}(H^\theta) = 2(\dim \mathrm{Fix}(K_\theta) - \dim \mathrm{Fix}(H))$.

(iii) $\theta(H) = \mathbb{Z}_3$. *Nun findet man* $\dim \mathrm{Fix}(H^\theta) = \dim \mathrm{Fix}(K_\theta) - \dim \mathrm{Fix}(H)$.

(iv) $\theta(H) = \mathbb{Z}_4$. *Man findet fast die gleiche Formel wie oben, also* $\dim \mathrm{Fix}(H^\theta) = \dim \mathrm{Fix}(K_\theta) - \dim \mathrm{Fix}(L)$.

(v) $\theta(H) = \mathbb{Z}_6$. *Nun ist* $\dim \mathrm{Fix}(H^\theta) = \dim \mathrm{Fix}(H) + \dim \mathrm{Fix}(K_\theta) - \dim \mathrm{Fix}(L) - \dim \mathrm{Fix}(M)$.

Beweis:

(i) Dieser Fall ist trivial.

(ii) Dies ist eine Anwendung der Spurformel. Wir identifiezoiern die Aktion von H^θ mit einer Aktion von H und erhalten die Formel

$$\dim \mathrm{Fix}(H^\theta) = 2\int_H \mathrm{Tr}(h)\cos(\theta(h)dh.$$

Damit ist

$$\dim \mathrm{Fix}(H^\theta) = 2\left(\int_K \mathrm{Tr}(h)dh - \int_{H\setminus K} Tr(h)dh\right)$$

denn $\cos(\theta(h)) = 1$ für $h \in K$ und $\cos(\theta(h)) = -1$ für $h \notin K$. Da K in H Index 2 hat, gilt

$$\dim \mathrm{Fix}(H) = \int_K \mathrm{Tr}(h)dh + \int_{H\setminus K} \mathrm{Tr}(h)dh = 2\int_K \mathrm{Tr}(h)dh.$$

Hieraus folgt die angegebene Formel.

Abbildung 3.1: In der (a, b)-Ebene sind die verschiedenen Verzweigungsbilder wiedergegeben. Die Stabilität der Zweige ist durch s für stabil und u für instabil angegeben.

Die anderen Fälle lassen sich auf ähnliche Weise zeigen. □

Wir wenden nun die bisherigen Methoden auf den Fall der Gruppe $\mathbf{O}(3)$ mit $V = V_\ell$ an. Zunächst stellt sich die Frage, welche Verdrillungen möglich sind. Wir erinnern, daran, daß $K = \ker\theta$ normal in H ist, und $\theta(H)$ isomorph zu H/K ist. Insbesondere ist H/K isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von S^1, insbesondere abelsch. Daher ist zu erwarten, daß die Kommutatoruntergruppe eine entscheidende Rolle spielt.

Definition 3.4.15 *Sei H eine Gruppe, die Kommutatoruntergruppe $H' \subset H$ ist die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe, also*

$$H' =< g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in H > .$$

Die wichtigsten Eigenschaften sind im folgenden Lemma zusammengefaßt.

Lemma 3.4.16 *(i) H' ist Normalteiler von H. Der Quotient H/H' ist abelsch.*

(ii) Ist $K \subset H$ eine Untergruppe mit H/K abelsch, so ist $H' \subset K$.

Beweis: s. Lang [20]. □

Definition 3.4.17 *$H^{ab} = H/H'$ heißt die Abelianisierung von H.*

Aus dem Lemma 3.4.16 folgt sofort:

Lemma 3.4.18 *Ist H^θ eine verdrillte Untergruppe, so ist $H' \subset K$.*

Beweis: Klar, wegen Lemma 3.4.16. □

Daraus folgt nun, daß mögliche Verdrillungstypen einer Untergruppe durch die Abelianisierung H^{ab} gegeben sind.

Lemma 3.4.19 *Gegeben sei eine einfache Darstellung von $\mathbf{O}(3)$ auf $V_\ell \oplus V_\ell$.*

(i) Operiert $-\mathbb{1} \in \mathbf{O}(3)$ als $\mathbb{1}_{V_\ell}$, so liegt $(-\mathbb{1}, 0)$ in jeder Isotropieuntergruppe und $(-\mathbb{1}, \pi)$ in keiner.

(ii) Operiert $-\mathbb{1}$ als $-\mathbb{1}_{V_\ell}$, so ist $(-\mathbb{1}, \pi)$ in jeder Isotropieuntergruppe und $(-\mathbb{1}, 0)$ in keiner.

Beweis: Klar! □

Aus Lemma 3.4.19 folgt sofort:

Lemma 3.4.20 *Ist H^θ eine Isotropieuntergruppe, so gilt $\mathbb{Z}_2^c \subset H$. Daher hat H die Form $H = \mathbb{Z}_2^c \oplus J$ mit $J \subset \mathbf{SO}(3)$. (D.h. es treten nur Untergruppen der Klasse II auf.)*

Beweis: Klar! □

Lemma 3.4.21 *Sei H^θ eine Isotropieuntergruppe mit zweidimensionalem Fixpunktraum. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle auf:*

H	J	H'	H^{ab}	Verdrillungstyp $\theta(H)$
$\mathbf{O}(3)$	$\mathbf{SO}(3)$	$\mathbf{SO}(3)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{1},\ \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus \mathbf{O}(2)$	$\mathbf{O}(2)$	$\mathbf{SO}(2)$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{1},\ \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus \mathbf{SO}(2)$	$\mathbf{SO}(2)$	$\mathbb{1}$	$\mathbf{SO}(2) \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{1}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{SO}(2)$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus \mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{1},\ \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus \mathbb{O}$	$\mathbb{O}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{1}, \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus \mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	D_2	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_6$	$\mathbb{1}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus D_n$	D_n	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_2^2$ *n ungerade*	$\mathbb{1},\ \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus D_n$	D_n	$\mathbb{Z}_{n/2}$	$\mathbb{Z}_2^3$ *n gerade*	$\mathbb{1},\ \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^c \oplus \mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{1}, \mathbb{Z}_d$

Im letzten Fall treten für n ungerade solche d auf, für die gilt $d|2n$, für gerade n solche mit $d|n$.

Beweis: Nachprüfen! □

Bemerkung 3.4.22 *Im letzten Fall, der von $\mathbb{Z}_n$ herrührenden Verdrillungen, werden bei $2'$-dimensionalen Fixpunkträumen nur Einschränkungen der Verdrillung $(\alpha, k\alpha)$ der S^1-Fälle wiedergegeben. Diese liefern somit keine neuen Isotropieuntergruppen mit zweidimensionalen Fixräumen und können daher bei der Suche nach solchen Isotropieuntergruppen wegfallen.*

Bemerkung 3.4.23 *Es treten nur Verdrilllungen der Form 1, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6$ auf. Deren Fixpunktraumdimensionen sind mit Lemma 3.4.14 behandelbar.*

Die jetzt erhaltenen Informationen müsen nun noch mit bereits bekannten Tatsachen zusammengefügt werden, dann kann man das Verzweigungsverhalten diskutieren. Unser Vorgehen läßt sich folgendermaßen skizzieren

(i) Berechne $\dim \mathrm{Fix}(J)$ mit $J \subset \mathbf{SO}(3)$ bezüglich der Aktion auf V_ℓ.

(ii) Berechne $\dim \mathrm{Fix}(H^\theta)$ mit $\theta(H) \in \{\mathbb{1}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_6, S^1\}$.

(iii) Wende das Lemma über mögliche Verdrillungen an.

Damit erreichen wir das Ziel die Isotropieuntergruppen von $\mathbf{O}(3) \times S^1$ auf $V_\ell \oplus V_\ell$ in der $(-1)^\ell$ (natürliche Darstellung) mit zweidimensionalem Fixpunktraum zu bestimmen. Man erhält

Lemma 3.4.24 *Für $1 \leq \ell \leq 3$ erhält man folgende Beschreibung der Zweige, deren Existenz aus dem Hopf Satz für äquivariante Probleme folgt.*

ℓ	$\theta(H)$	J	$\#\{Zweige\}$
1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbf{O}(2)$	2
	S^1	$\mathbf{SO}(2)$	
2	$\mathbb{1}$	$\mathbf{O}(2)$	5
	$\mathbb{Z}_2$	D_4	
	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{T}$	
	S^1 $(k = 1, 2)$	$\mathbf{SO}(2)$	
3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbf{O}(2),\ \mathbb{O},\ D_2,\ D_3$	7
	S^1 $(1 \leq k \leq 3)$	$\mathbf{SO}(2)$	

In den Fällen $\ell = 2, 3$ mit $\theta(H) = S^1$ treten als Verdrillungen auf $(\phi, k\phi)$.

Bemerkung 3.4.25 *Die Cartan–Zerlegung von V_ℓ bezüglich der Aktion von $\mathbf{SO}(3)$ hat die Form*

$$V_\ell = W_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_\ell.$$

Damit ist

$$\dim \operatorname{Fix}(H^\theta) = 2 \int\limits_{\mathbf{SO}(2)} \cos(\theta(\phi)) \operatorname{tr}(\rho(\phi)) d\phi.$$

Ist $\theta(\alpha) = k\alpha$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$\operatorname{tr} \rho(\alpha) = 1 + 2\cos(\alpha) + \ldots + \cos(\ell\alpha)$$

und damit

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Fix}(H^\theta) &= 2\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (1 + 2(\cos\alpha + \ldots + \cos(\ell\alpha)) \cos(k\alpha) d\phi \\ &= \begin{cases} 2 & 1 \leq k \leq \ell; \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Kapitel 4

Erzwungene Symmetriebrechung

In diesem Kapitel wolen wir daran gehen Effekte zu untersuchen, die auftreten wenn die Symmetrie eines Problems durch Störungen gebroche wird. Insbesondere interessiert uns die Frage was inder Nähe von Manngifaltigkeiten von Ruhelagen geschieht.

4.1 Erzwungene Symmetriebrechung und dynamische System auf homogenen Räumen

Definition 4.1.1 *Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Eine Mannigfaltigkeit M der Form $M = G/H$ heißt homogener Raum.*

Bemerkung 4.1.2 *Die homogenen Räume bilden eine reichhaltige Klasse von Mannigfaltigkeiten. Sind gehören zu beststudierten Objekten der Differentialgeometrie, bzw. der Differentialtopologie.*

Mit dieser Definition werden die Gruppenorbits stationärer Lösungen äquivarianter dynamischer Systeme zu homogenen Räumen. Wir gehen im folgenden von folgender Situation aus: es sei V eine endlichdimesnionale Darstellung der kompakten Lie–Gruppe G, $f : V \to V$ sei G-äquivariant. Weiter sei $K \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G. Wir nehmen an, daß $x_0 \in V$ eine stationäre Lösung von

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1.1}$$

sei. Sei $H = \mathrm{Stab}(x_0)$ die Isotropieuntergruppe von x_0. Wir betrachten K–äquivariante Abbildungen $g : V \to V$ und Störungen

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) \tag{4.1.2}$$

von (4.1.1) für kleine $\varepsilon > 0$. Solche Aufgabenstellungen bezeichnen wir als *erzwungene Symmeriebrechung.*

Bevor wir uns der Untersuchung der erzwungenen Symmetriebrechung zuwenden, wollen wir erst kurz eine Probleme aufzeigen, wo dies eine Rolle spielen könnte.

Beispiel 4.1.3 *(i) In einem Experiment hat der Versuchsaufbau eine Symmetrie G, die Gleichungen haben die entsprechenden Äquivarianzeigenschaften. Imperfektionen des Aufbaus führen auf ein gestörtes System, das sich in erster Näherung noch wie ein System mit voller Symmetrie G verhält, erst genaueres Hinsehen zeigt die Asymmetrie des Aufbaus und der erzielten Resultate.*

(ii) In der Modellierung von Vorgängen in der realen Welt sieht man oft eine Symmetrie und nutzt diese bei der Modellierung aus, wiederum kann erst ein genaueres Modell die Störung in Betracht ziehen. Beispiel ist die Theorie des Erdmagnetismus, in erster Näherung hat man die sphärische Geometrie der Erde, das nächst genauere Modell bezieht die Erdrotation ein und damit tritt in den Gleichungen für die Bewegung elektrisch geladener Flüsigkeitsströmungen im Magnetfeld (eine Kopplung der Navier-Sokes'schen Gleichungen mit den Maxwell–Gleichungen[1]) ein Term für die Trägkeitskraft auf, die sogenannte Coriolis–Kraft[2]. Die verbleibende Symmetrie, ist die der Kreisscheibe. Natürlich führen noch genauere Betrachtungen zu einem System ohne Symmetrie.

(iii) Aus den genannten Beispielen kann man erkennen, daß eine realistische Betrachtung zu mehreren erzwungenen Symmetriebrechungen führt, die aufgrund einer Hierarchie von Symmetrien auf verschiedenen Skalen der Approxiamtion auftreten.

In allen genannten Beispielen könnte man natürlich eine Behandlung des Systems in der Klasse der Probleme mit der gestörten Symmetrie K vorschlagen, allerdings gehen bei diesem Zugang alle Informationen verloren, die davon kommen, daß man sich in der Nähe eines Systems mit einer größeren Symmetriegruppe befindet. Wir wollen versuchen einige Techniken zu entwickeln, die genau auf diese Fragestellung abzielen. Natürlich werden wir dieses komplizierte Problem nicht vollständig lösen können, sondern wir werden uns auf die Dynamik in der Nähe von Orbits von stationären Lösungen beschränken. Diese sind wir bereits erwähnt diffeomorph zu homogenen Räumen und wir werden daher dynamische system auf diesen Räumen betrachten. Dazu braucht man die Existenz von invarianten Mannigfaltigkeiten für (4.1.2)in der Nähe dieser Gruppenorbits von stationären Lösungen von (4.1.1). Dazu brauchen wir einige Aussagen über normal hyperbolische Mannigfaltigkeiten.

Definition 4.1.4 *Sei $\dot{x} = f(x)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der zugehörige Fluß. Sei M eine Φ-invariante, kompakte Mannigfaltigkeit in*

[1]James Clerk Maxwell, 13.6.1831–5.11.1879, britischer Physiker der einen entscheidenden Beitrag zu der Theorie der elektromagnetischen Wellen und der Wechselwirkung zwischen den elektrischen und den magnetischen Feldern leistete. Er lehrte in Aberdeen und London, zuletzt in Cambridge. Ab 1860 beschäftigte er sich mit statistischen Methoden in der kinetischen Gastheorie.

[2]Gaspard Gustave de Coriolis, 21.5.1792–19.9.1843, französischer Ingenieur ind Physiker, gab als erster moderne exakte Definitionen von mechanischer Arbeit und kinetischer Energie. Er beschäftigte sich mit dem Einfluß der Rotation auf die Bewegung eines Körpers, einem Problem, das nicht nur in verschiedenen Sportarten zu interessanten Phänomenen führt.

$\mathbb{R}^n$. Mit TM bezeichnen wir das Tangentialbündel an M. NM sei das Normalenbündel.

Definition 4.1.5 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine bezüglich Φ invariante Manngifaltigkeit. Zu $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$ definieren wir $D\Phi(x,t) : \{x\} \times \mathbb{R}^n \to \{\Phi(x)\} \times \mathbb{R}^n$ durch $(x,v) \mapsto \Phi(x,t) D_v \Phi(x,t)$.*

Definition 4.1.6 *Sind E_1, E_2, E Bündel über M mit $E \subset M \times \mathbb{R}^n$, und $E = E_1 \oplus E_2$ so sagen wir E_1, E_2 sind eine eine $D\Phi$-invariante Zerlegung von E, falls $D\Phi E_j \subset E_j$ für $j = 1, 2$ gilt.*

Definition 4.1.7 *Gibt es eine stetige Zerlegung von NM in*

$$N_x M = W^s(x) \oplus W^u(x),$$

welche $D\Phi$ invariant ist, so bezeichnen wir mit

$$T\Phi = D\Phi_{|_{TM}}$$

und entsprechend

$$S\Phi = D\Phi_{|_{W^s}},$$

bzw.

$$U\Phi = D\Phi_{|_{W^u}}.$$

Definition 4.1.8 *Ist X eiin Banachraum, $A \in \mathcal{L}(X)$, so nennt man*

$$m(A) = \inf \{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$$

die minimale Norm von A.

Definition 4.1.9 *Die Φ-invariante Mannigfaltigkeit M heißt normal hyperbolisch (dies ist eine Kurzform für eine Eigenschaft, doe oft mit unmittelbar, relativ r-normal hyperbolisch bezeichnet wird), falls für alle $x \in M, o \leq r \leq k$ und ein $t > 0$ gilt*

$$\begin{aligned} m(U\Phi(x,t)) &> \|T\Phi(x,t)\|^k \\ \|T\Phi(x,t)\| &< m(S\Phi(x,t))^k. \end{aligned}$$

Für normal hyperbolische Mannigfaltigkeiten hat man die folgende Ausasge

Satz 4.1.10 *Ist $x\dot{x} = f(x)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^n$, $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Φ-invariante Manngifaltigkeit. Ist M normal hyperbolisch, so gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von M mit kompakten Abschluß $\overline{U}$ und eine Umgebung V von $f_{|_{\overline{U}}} \in C^r(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, so daß für alle $g \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $g_{|_{\overline{U}}} \in V$ eine eindeutige Φ_g-invariante Mannigfaltigkeit M_g existiert, welche normal hyperbolisch und C^k-diffeomorph zu M ist.*

Beweis: siehe [13], Satz 4.1. □

Bemerkung 4.1.11 *Man kann zeigen, daß es eine eindeutige invariante C^1–Mannigfaltigkeit gibt, welche dann C^r-diffeomorph zu M und normal hypbolisch ist.*

Satz 4.1.12 *Ist f im vorigen Satz G–äquivariant, g K-äquivariant und M wie gehabt. Dann ist die Mannigfaltigkeit M_g, deren Existenz durch den vorigen Satz garantiert wird K–äquivariant diffeomorph zu M.*

Beweis: Ist M_g die gesuchte invariante Manngfaltigkeit, so ist für $\gamma \in K$ γM_g wiederum eine invariante Mannigfaltigkeit. Natürlich kann U so gewählt werden, daß mit M_g auch γM_g darin liegt (indem man U als Vereinigung offener Kugeln mit jeweils gleichem Radius wählt). Aus der Eindeutigkeit folgt dann daß $M_g = \gamma M_g$ ist. Die K-äquivarianz des Diffeomorphismus von M nach M_g folgt aus dem Beweis in [13]. □

Bemerkung 4.1.13 *(i) Im Spezialfall eines trivialen Flusses auf M wird die Bedingung der normalen Hyperbolizität wesentlich einfacher. Hier muß man nur nachprüfen daß die Linearisierung des Vektorfeldes an jeder Stelle genau* $\dim M$ *Eigenwerte auf der imaginären Achse hat.*

(ii) Diese vereinfachte Bedingung ist für Verzweigungslösungen generischerweise erfüllt, vgl. des Satz von Field 2.5.4.

Bemerkung 4.1.14 *Sei $\Psi : M \to M_g$ der K–äquivariante Diffeomorphismus und $x_0 \in M$. Mit der Orbitabbildung $\eta : G/\operatorname{Stab}(x_0) \to M : g \mapsto gx_0$ und dem Diffeomorphismus Ψ hat man einen Diffeomorphismus*

$$\mathcal{D} : G/\operatorname{Stab}(x_0) \to M_g : [g] \mapsto \Psi(\eta([g])).$$

$\mathcal{D}$ ist K-äquivariant. Damit hat man die Untersuchung von Flüssen auf der i.a. unbekannten Manngifaltigkeit M zurückgeholt auf die Betrachtung von K–äquivarianten dynamischen Systemen auf $G/\operatorname{Stab}(x_0)$.

Natürlich stellt sich die Frage inwieweit die Resultate einer abstrakten Untersuchung von K–äquivarianten Flüssen auf $G/\operatorname{Stab}(x_0)$ für die Störung eines konkret gegebenen Systemes von Bedeutung sind. Eine erste Antwort gibt der folgende Satz.

Satz 4.1.15 *Sei f ein G–äquivariantes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, Φ der zugehörige Fluss und Φ_m die Einschränkung auf die Φ-invariante Manngifaltigkeit M. Für jede Umgebung U von M mit kompaktem Abschluß $\overline{U}$ und für jedes $\varepsilon > 0$, existiert ein $\delta > 0$, so daß zu jedem K–äquivarianten Fluß Γ_M auf M mit*

$$\|\Phi_M - \Gamma_M\|_{C^1(M,\mathbb{R}^n)} < \delta$$

ein K–äquivarianter Fluß Γ auf $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$\|\Phi - \Gamma\|_{C^1(\overline{U},\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Beweis: Es genügt den Fluß auf eine Umgebung $\tilde{U}$ von M fortzusetzen und dabei die C^1-Norm zu kontrollieren. Denn dann kann man den Fluß mit Hilfe einer geeigneten Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ leicht auf den ganzen Raum fortsetzen. Dazu konstruiert man ein G–invariantes χ, indem man eine Funktion $\chi_1 \in C_0^\infty(U, \mathbb{R})$ über den Gruppenorbit mittelt, also

$$\chi(x) = \int_G \chi_1(\gamma x) d\mu(\gamma).$$

Dann ist χ G–invariant. Ist Γ_U eine K–äquivariante Fortsetzung auf $\tilde{U}$ und Γ_1 eine beliebige Fortsetzung von Γ_U auf $\mathbb{R}^n$, und g_1 das dazugehörige Vektorfeld, so ist $g(x) = \chi(x)g_1(x)$ eine K–äquivariante Fortsetzung auf von g_1 auf $\mathbb{R}^n$. Γ ist dann der zu g gehörige Fluß.

Wir müssen nun also die Fortsetzbarkeit auf eine Umgebung U zeigen. Sei g_M das Vektorfeld zu Γ_M auf M. Wir betrachten $f_M = f_{|M}$ und die Differenz $g_m - f_M$. Zu jedem Punkt $x \in M$, gibt es eine Umgebung, die sich als Produkt $V \times K$ mit $x \in V \subset M$ und K einer Kreisscheibe in einem Raum $\mathbb{R}^m$ schreiben läßt. Auf $V \times K$ kann $f_M - g_M$ trivial zu einem Vektorfeld $f - g_{V \times K}$ fortgesetzt werden. Sei $\mathcal{V} = \{V_j \times K_j\}$ eine lokal endliche Überdeckung ein er Umgebung von M mit solchen Produkten $V \times K$. Ferner sei ξ_j eine dieser Überdeckung subordinierte Partition der Eins.Dann ist

$$\sum_j \xi_j(f - g_j)$$

eine Fortsetzung auf $\cup_j V_j \times K_j$. Wiederum mitteln wir nun über einen Gruppenorbit von K. Die triviale Fortsetzung läßt die C^1-Norm invariant. Die Mittelung über K ist stetig und erlaubt die C^1-Norm zu kontrollieren. □

Grundlegend für die weiteren Betrachtungen ist das folgende Lemma.

Lemma 4.1.16 *Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer G-Aktion auf X (X ist eine glatte G–Mannigfaltigkeit). Ist Φ ein G-äquivarianter Fluß auf X, so ist für jede Untergruppe $L \subset G$* Fix(L) *Φ–invariant.*

Beweis: Wie im linearen Fall: ist $x \in Fix(L)$, so ergibt die G–Äquivarianz

$$l\Phi(x,t) = \Phi(lx,t) = \Phi(x,t)\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Daher ist $\phi(x,t) \in \mathrm{Fix}(L)$. □

Vieles von dem was hier gesagt wird, ist für allgemeinere Situationen richtig. Um diese Sitation beschreiben zu können, geben wir die folgende Definition eines sehr wichtigen Begriffes. Wir werden allerdings nicht unmitelbar damit arbeiten.

Definition 4.1.17 *Ein Gruppenorbit, der invariant unter dem Fluß Φ ist, heißt relativesd Gleichgewicht für Φ.*

Aus der Äquivarianz von ϕ folgt das folgende Lema.

Lemma 4.1.18 *Ist Gx_0 ein relatives Gleichgewicht, so gibt es ein Element L in der Lie–Algebra von G mit*

$$\Phi(x_0, t) = \exp(tL)x_0.$$

Beweis: Sei v das Vektorfeld zu Φ uns

$$\frac{d\Phi(x_0, t)}{dt} = v(x_0) = \exp(L)x_0.$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt}\exp(tL)x_0 = L\exp(tL)x_0.$$

Andrerseits ist

$$\frac{d}{dt}\Phi(\exp(tL)x_0, 0) = v(exp(tL)x_0) = \exp(tL)v(x_0) = \exp(tL)Lx_0.$$

Wegen der Existenz und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen sind beide Kurven gleich. □

4.2 Gruppenaktionen auf homogenen Räumen

Sei G eine kompakte Lie–Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe. Die Elemente von G/H bezeichnen wir mit $[g]$ oder $[g]_H$ für $g \in G$. Wir betrachten nun die Aktion von K auf G/H durch

$$k[g]_H = [kg]_H.$$

Vertauscht man in der Formulierung der vorigen Sektion den Punkt x_0 gegen einen Punkt x_0' so bedeuted dies, daß wir die Isotropiegruppe H durch eine konjugierte Gruppe H' ersetzen. Wir erwarten, daß die Resultate nicht von der Wahl des Elementes x_0 abhängen, da ja der Orbit der gleiche bleibt. Um dies zu zeigen beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.2.1 *Sind H, H' und K, K' jeweils Paare konjugierter Untergruppen von G. Sei $\gamma \in G$, so daß $\gamma H\gamma^{-1} = H'$. Dann existiert ein Diffeomorphismus*

$$\mu : G/H \to G/H' : \mu([kg]_H) = \kappa_\gamma(k)\mu([g]),$$

mit $\kappa(k) = \gamma^{-1}h\gamma$, d.h. die Aktionen von K auf G/H und von K' auf G/H' sind diffeomorph.

Beweis: Wir erbringen den Beweis in zwei Schritten: im ersten zeigen wir, daß wir H innerhalb der Konjugationsklasse fixieren können, wenn wir bereit sind, K durch eine konjugierte Untergruppe zu ersetzen, im zweiten betrachten wir die Aktionen zweier konjugierter Untergruppen K und K' auf G/H und zeigen, daß diese Aktionen diffeomorph sind.

Seien nun H und H' konjugiert, K operiere auf G/H und $H' = \gamma H \gamma^{-1}$. Sei

$$\mu_1 : G/H \to G/H' : [g] \mapsto [\gamma^{-1} g h]'_H.$$

Diesde Abbildung ist wohldefiniert, da $g^{-1}g' \in H$ impliziert, daß $h^{-1}g^{-1}g'h \in H'$. Also ist

$$\mu_1([kg]) = \gamma^{-1} k g \gamma H' = \gamma^{-1} k \gamma \gamma^{-1} g \gamma = \kappa_\gamma(k)\mu_1([g]).$$

Für den Beweis des zweiten Schrittes nehmen wir an, daß H fixiert, K konjugiert zu K ist und beide Gruppen K, K' durch Linksmultiplikation auf G/H operieren. Wir müssen zeigen, daß es einen Diffeomorphismus $\mu_2 : G/H \to G/H$ gibt mit

$$\mu_2([k'g]) = \kappa_k(k')\mu_2([g]),$$

wobei κ_k die Konjugation von K auf K' ist. Sei $k \in G$ mit $k^{-1}Kk = K'$. Setze

$$\mu_2([g]) = [k^{-1}g].$$

Die Äquivarianzeigenschaft ist sofort einzusehen:

$$\mu_2([g'g]) = [k^{-1}g'k^{-1}kg] = \kappa_k(g')\mu([g]).$$

□

Definition 4.2.2 *Ist Σ eine Untergruppe von K und gibt es ein $\gamma \in G$ mit $\gamma\Sigma\gamma^{-1} \subset H$, so sagen wir Σ ist subkonjugiert zu H. In diesem Zusammenhang nennen wir die Menge $N(\Sigma, H)$ den Subnormalisator von Σ in H.*

Aufgrund von Lemma 4.1.16 untersuchen wir nun die Fixmengen der Aktion von K auf G/H.

Lemma 4.2.3 *K operiere auf G/H durch Linksmultiplikation und es sei $\Sigma \subset K$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann gilt*

(i) $\mathrm{Fix}(\Sigma) \neq \emptyset \Leftrightarrow \Sigma$ *ist konjugiert zu einer Untergruppe von H.*

(ii) $\mathrm{Fix}(\Sigma) = N(\Sigma, H)/H$.

Beweis: Sei $[g] \in G/H$ gegeben mit $[g] \in \mathrm{Fix}(\Sigma)$. Dann gilt für $\sigma \in \Sigma$

$$\sigma g H = gH \text{ oder } g^{-1}\sigma g H = H.$$

Damit ist $g^{-1}\sigma g \in H$. Also folgt $g^{-1}\Sigma g \subset H$. Andrerseits gilt falls $g \in G$ mit $g^{-1}\Sigma g \subset H$ gegeben ist, daß $g^{-1}\Sigma g H = H$ oder $\Sigma[g]_h = [g]_H$. Daraus folgt auch sofort die im zweiten teil angegebene Formel.

Lemma 4.2.4

$$\mathrm{Stab}([g]) = K \cap gHg^{-1}.$$

Beweis: Ist $k \in \mathrm{Stab}([g])$, so ist $[kg] = [g]$ oder $kgH = gH$ oder $g^{-1}kg \in H$ oder $k \in gHg^{-1}$. Die andere Richtung ist auch einfach ist $k = ghg^{-1}$, so ist $kgH = ghg^{-1}gH = ghH = gH$. □

Dieses Lemma legt nahe eine Dualität zwischen der Aktion von K auf G/H und der von H aug G/K zu sehen. Wir wollen dieser Frage kurz nachgehen. Offensichtlich ist für eine Untergruppe $\Sigma \subset K$ die subkonjugiert zu H ist, also $\gamma\Sigma\gamma^{-1} \subset H$, die konjugierte Gruppe $\Sigma_H = \gamma\Sigma\gamma^{-1}$ subkonjugiert zu K und demzufolge ist der Fixraum von Σ bezüglich der Aktion von K auf G/H genau dann nicht leer, wenn der Fixraum von Σ' bezüglich der Aktion von H auf G/K nicht leer ist. Ist $[g]_H \in \mathrm{Fix}(\Sigma)$, so ist $[g^{-1}]_K \in Fix(H)$. Diese Dualität geht wesdentlich tiefer und wir werden darauf zurückkommen.

Bemerkung 4.2.5 *(i) Nicht jede abgeschlossene Untergruppe von K, welche subkonjugiert zu H ist, ist Isotropieuntergruppe. Wir sehen dies am Beispiel $G = \mathbf{SO}(3)$, $H = \mathbf{SO}(2)$ und $K = D_6$. $\Sigma = \mathbb{Z}_3 \subset K$ ist subkonjugiert zu H, allerdings wird jedes Element $g \in G$, welches Σ in H konjugiert auch $\mathbb{Z}_6$ in H konjugieren. Also ist $\mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_3) = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_6)$ und damit ist $\mathbb{Z}_3$ keine Isotropieuntergruppe.*

(ii) Die oben beschriebene Dualität gibt keine Bijektion der Konjugationsklassen der Isotropieuntergruppen. Um dies einzusehen wählen wir $G = \mathbf{SO}(3)$, $H = \mathbb{Z}_2$ und $K = \mathbb{O}$. Innerhalb von K gibt es G–konjugierte Untergruppen, welche konjugiert zu H sind, jedoch sind nicht alle solchen Untergruppen K–konjugiert.

4.3 Quotienten und Dualität

Es sei M eine K–Mannigfaltigkeit, dann ist die Menge der K–Orbits ein topologischer Raum $K\backslash M$ mit einer induzierten Topologie. Im allgemeinen ist dieser Raum keine glatte Mannigfaltigkeit. Zum Beispiel betrachten wir den reellen zweidimensionalen Raum $\mathbb{RP}^2$ mit der Aktion der Tetraedergruppe $\mathbb{T}$.

Jedoch gibt es eine disjunkte Zerlegung von $K\backslash M$ in glatte Mannigfaltigkeiten. Um diese Zerlegung genauer zu beschreiben, betrachten wir Untergruppen Σ von K und die Menge

$$M_{(\Sigma)} = \{m \in M \mid \tau(m) = [\Sigma]\},$$

wobei $[\Sigma]$ für die Konjugationsklasse von Σ in K steht.

Lemma 4.3.1 *$M_{[\Sigma]}$ ist eine glatte, K–invariante Mannigfaltigkeit in M.*

Beweis: $M_{[\Sigma]}$ hat die Gestalt

$$M_{[\Sigma]} = K(M_{[\Sigma]} \cap \mathrm{Fix}(\Sigma).$$

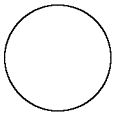

Abbildung 4.1: Der zweidimensionale projektive Raum mit Fixräumen bezüglich der Aktion von $\mathbb{T}$.

Abbildung 4.2: Der Qoutient des zweidimensionalen projektiven Raumes bezüglich der Aktion von $\mathbb{T}$.

Die Inklusion $\supset$ ist trivial, für die andere Richtung sei $m \in M_{[\Sigma]}$, dann gibt es ein $\gamma \in K$ mit $\mathrm{Stab}(m) = \gamma\Sigma\gamma^{-1}$. Dann ist $\gamma m \in \mathrm{Fix}(\Sigma)$ und damit $m \in K(M_{[\Sigma]} \cap \mathrm{Fix}(\Sigma)$. Nach dem Scheibensatz 1.5.33 ist lokal ein Gruppenorbit und daher diffeomorph zu K/Σ. □

Sei $\pi : M \to K\backslash M$ die kanonische Projektion, also

$$\pi : M \to K\backslash M : m \mapsto Km.$$

Wir brauchen nun die Zerlegung von $M\backslash K$ in Orbittypen. Um dies definieren zu können benötigen wir die folgende Definition.

Definition 4.3.2 *(i) Eine semi–algebraische Teilmenge S des $\mathbb{R}^n$ wird gegeben durch endlich viele polynomiale Gleichungen und Ungleichungen, d.h. es gibt $p_1, \ldots, p_s$ und $q_1, \ldots, q_t$ reellwertige Polynome auf $\mathbb{R}^n$ mit*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots s \text{ und } q_j(x) > 0, j = 1, \ldots, t\}.$$

(ii) Eine Stratifizierung von S ist eine disjunkte, lokal endlich Zerlegung

$$S = \bigcup E_i,$$

wobei jedes E_i eine glatte Mannigfaltigkeit ist und es gilt für jedes i ist

$$\overline{E_i} \setminus E_i$$

eine endliche Vereinigung von E_j.

Lemma 4.3.3 *(i) Die Menge der $M^{(\Sigma)}$, wbei Σ die Menge der Isotropieuntergruppen von K bezüglich der Aktion auf M durchläuft bildet eine Stratifizierung von M.*

(ii) $M \setminus K$ wird durch $(M \setminus K)_{[\Sigma]} = \pi(M_{[\Sigma]})$ stratifiziert.

Beweis:

(i) Die erste Aussage ist trivial vgl. 2.5.

(ii) Der zweiten Aussage liegt der Scheibensatz 1.5.33 zugrunde. Aufgrund dieses Satzes ist die Umgebung eines Punktes als Produkt einer Scheibe S mit einer Umgebung U aus dem Orbit aufzufassen, dabei hat man eine natürliche Aktion von Σ auf der Scheibe S. Lokal ist der Orbitraum diffeomorph zum Qotienten $S \setminus \Sigma$. Jeder Punkt auf deiser Scheibe hat eine Isotropie, welche eine Untergruppe von Σ ist, die Punkte auf dem betrachteten Orbit liegen im Abschluß der Punkte auf der Scheibe mit prinzipalen Orbittyp. Damit erhält man die gewünschten Aussagen aus der linearen Darstellung von Σ auf der Scheibe.

□

Wie zuvor bezeichnen wir die K–invarianten, glatten Funktionen auf M mit $C^\infty(M)^K$. Jede solche Funktion f definiert eine Funktion auf $K \setminus M$ durch

$$g(Km) = f(m).$$

Diese Zuordnung ist wohldefiniert und definiert die Menge $C^\infty(K \setminus M)$. Lineare Funktionale auf $C^\infty(K \setminus M)$ identifizieren wir mit glatten Vektorfeldern auf $K \setminus M$.

Definition 4.3.4 *(i) Zu $\xi \in K \setminus M$ sei $(K \tilde{\setminus} M)(\xi)$ die Menge der Keime von glatten Funktionen, welche auf bei ξ definiert sind. Dabei heißen zwei glatte Funktionen g_1, g_2 ξ–äquivalent, wenn es eine Umgebung von ξ gibt, auf welcher die beiden übereinstimmen. Die Äquivalenzklasse heißt Keim vin g_1.*

(ii) Zu $\xi \in K \setminus M$ sei $(K \setminus M)(\xi)$ das Ideal der Keime glatter Funktionen in $C^\infty(K \setminus M)$, welche bei ξ verschwinden.

(iii) Eine lineare Abbildung von $\nu : (K \tilde{\setminus} M)(\xi) \to \mathbb{R}$ mmit den Eigenschaften

$$\nu(g_1 + g_2) = \nu(g_1) + \nu(g_2), \;\; \nu(\lambda g) = \lambda \nu(g)$$

und

$$\nu(g_1 g_2) = g_1 \nu(g_2) + g_2 \nu(g_1)$$

heißt Tangentialvektor bei ξ.

(iv) *Die Menge aller Tangentialvektoren bei ξ bildet den Tangentialraum $T_\xi(K\backslash M)$. $T(K\backslash M)$ ist die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume.*

(v) *Jedem Stratum σ auf $K\backslash M$ wird zugeordnet das Ideal $I(\sigma)$ all der $C^\infty(K\backslash M)$–Funktionen welche auf σ verschwinden.*

(vi) *EinVektorfeld auf $K\backslash M$ ist eine stetige Abbildung $K\backslash M \to T(K\backslash M)$.*

(vii) *Ein Vektorfeld v heißt stratumerhaltend, wenn $g \in I(\sigma)$ impliziert, $vg \in I(\sigma)$. Die Menge der Stratumerhaltenden Vektorfelder auf $K\backslash M$ wird mit $\mathcal{X}(K\backslash M)$ bezeichnet.*

Mit der Abbildung π kann man K–äquivariante Vektorfelder auf M auf solche auf $K\backslash M$ projizieren. Die entsprechende Projektion sei π_*. Die projizierten Vektorfelder sind stratumerhaltend. Es gilt der folgende satz von Schwarz. Sei TM^K die Menge der K–äquivarianten Vektorfelder auf M.

Satz 4.3.5 $\pi_* : TM^K \to \mathcal{X}(K\backslash M)$ *ist surjektiv.*

Beweis: siehe SCHWARZ [22]. □

Dieser Satz erlaubt es äquivariante Vektorfelder auf M zu konstruieren. In unserer speziellen Situation ist $M = G/H$ und wir wollen K–äquivariante Vektorfelder von stratumerhaltenden Vektorfeldern auf $K\backslash G/H$ erhalten. Dies führt uns zurück zur Dualität: wir liften glatte, stratumerhaltende Vektorfelder auf $K\backslash G/H$ zurück auf K–äquivariante Vektorfelder auf G/H oder zurück auf H–äquivariante Vektorfelder auf G/K. Dazu brauchen wir den folgenden Satz.

Satz 4.3.6 *Die Raüme $K\backslash G/H$ und $H\backslash G/K$ sind isomorph, ein Isomorphismus ist gegeben durch:*

$$chi : K\backslash G/H \to H\backslash G/K_K[[g]_H] \mapsto {}_H[[g^{-1}]_K].$$

Dieser Diffeomorphismus bildet Strata auf Strata ab.

Beweis: Es seien $\pi_{H,K} : G \to H\backslash G/K$ und $\pi_{K,H} : G \to K\backslash G/H$ die kanonischen Projektoren. Wir betrachten zu nächst das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g \to g^{-1}"] \arrow[d, "\pi_{K,H}"'] & G \arrow[d, "\pi_{H,K}"] \\ K\backslash G/H \arrow[r, "\chi"] & H\backslash G/K. \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert, die Abbildung χ ist wohldefiniert und injektiv. Aus der Tatsache, daß das Diagramm kommutiert, schließen wir, daß χ stetig und dann sogar ein Homöomorphismus ist.

Um zu schließen, daß zusammenhangskomponenten von Strata wieder auf Zusammenhangskomponenten von Strata abgebildet werden, gehen wir in zwei Schritten vor.

Sei S eine Zusammenhangskomonente eines Stratums bezüglich der K Aktion auf G/H. Sei $[g]_H \in S$. Dann gilt für den Stabilisator

$$\operatorname*{Stab}_H([g^{-1}]_K) = g^{-1}Kg \cap H = g^{-1}(K \cap gHg^{-1})g = g^{-1} \operatorname*{Stab}_K([g]_H)g$$

und ähnlich für $[d]_H \in S$. Sei $stab(S) = \{k \in K \mid kS = S\}$. Dann gibt es $u_g, u_d \in N_G(stab(S)$, $t \in G$ und $h_g, h_d \in H$ mit

$$g = u_g t h_g \quad d = u_d t h_d.$$

Wir bemerken, daß für eine Zusammenhangskomponente des Stratums gilt, daß der Stabilisator eines Punktes, mit dem der Menge zusammenfällt. Daher gilt

$$\operatorname*{Stab}_H([g^{-1}]_K) = g^{-1} \operatorname*{Stab}_K([g]_H)g = h_g^{-1}t^{-1}h_d^{-1} stab(S)$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] T. Bröcker & T. tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1985.

[2] F. H. Busse. Pattern of convection in spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 72, 65-85, 1975.

[3] F. H. Busse & N. Riahi. Pattern of convection in spherical shells, II. *J. Fluid Mech.*, 123, 283-301, 1982.

[4] P. Chossat & R. Lauterbach. The instability of axisymmetric solutions in problems with spherical symmetry. *SIAM J. Math. Anal.*, 20, 31-38, 1989.

[5] P. Chossat, R. Lauterbach & I. Melbourne. Steady-state bifurcation with **O**(3)-symmetry. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 113(4), 313-376, 1991.

[6] J. P. Conway. *Functions of one complex variable.* Springer, 1978.

[7] M. G. Crandall & P. H. Rabinowitz. The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 67, 53-72, 1978.

[8] B. Fiedler & K. Mischaikov. Dynamics of bifurcations for variational problems with **O**(3)-equivariance: A Conley index approach. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 119, 145-196, 1992.

[9] M. Field. Equivariant bifurcation theory and symmetry breaking. *J. Dyn. Diff. Equat.*, 1, 369-421, 1989.

[10] M. Field & R. W. Richardson. Symmetry breaking and the maximal subgroup conjecture. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 105(1), 61-94, 1989.

[11] M. Golubitsky & I. Stewart. Hopf bifurcation in presence of symmetry. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 87(2), 107-165, 1985.

[12] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, volume 840 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer Verlag, 1981.

[13] M. W. Hirsch, C. C. Pugh & M. Shub. *Invariant Manifolds*, volume 583 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer Verlag, 1977.

[14] E. HOPF. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems. *Ber. Math. Phys. Kl. d. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig*, 94, 3-22, 1942.

[15] E. IHRIG & M. GOLUBITSKY. Pattern selection with **O**(3)-symmetry. *Physica 13D*, 1-33, 1984.

[16] T. KATO. *Perturbation Theory for Linear Operators*, volume 132 of *Grundl. d. math. Wiss.* Springer Verlag, 1976.

[17] H. KIELHÖFER. Generalized Hopf bifurcation in Hilbert space. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1, 498-513, 1979.

[18] H. KIELHÖFER. Hopf bifurcation at multiple eigenvalues. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 69, 53-83, 1979.

[19] H. KIELHÖFER & R. LAUTERBACH. The principle of reduced stability. *J. Funct. Anal.*, 53, 99-111, 1983.

[20] S. LANG. *Algebra*. Addison–Wesley, 1970.

[21] R. LAUTERBACH & P. CHOSSAT. Exclusion of relative equilibria. In P. Chossat, editor, *Dynamics, Bifurcation and Symmetry, New Trends and New Tools*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[22] G. SCHWARZ. Lifting smooth homotopies. *IHES*, 51, 37-135, 1980.

[23] K. YOSIDA. *Functional Analysis*, volume 123 of *Grundl. d. math. Wissenschaften*. Springer Verlag, 1978.