Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Winter 2016/17

Janko Latschev

Grundlagen der Mathematik

Übungsblatt 4

Präsenzaufgaben

(P6) Die Injektivität einer Abbildung $f : X \to Y$ haben wir durch die Bedingung

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

definiert.

a) Drücken Sie diese Bedingung in Worten aus.

b) Formulieren Sie die Bedingung um, indem Sie die Implikation durch ihre Kontraposition ersetzen (d.h. unter Verwendung der zweiten Tautologie aus Aufgabe **(A6)** von Blatt 2).

c) Drücken Sie auch die neue Formulierung in Worten aus.

d) Formulieren Sie die Aussage „$f : X \to Y$ ist nicht injektiv“ als logische Formel sowie in Worten (hier ist die dritte Tautologie aus Aufgabe **(A6)** nützlich).

e) Geben Sie mehrere verschiedene Beispiele für injektive und nicht injektive Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

(P7) Geben Sie für die Verknüpfungen $f_j \circ g_j$ der folgenden Abbildungen f_j und g_j jeweils Definitions- und Wertebereich an und bestimmen Sie eine möglichst einfache Formel für den Wert der Abbildung $f_j \circ g_j$ an einem Punkt ihres Definitionsbereichs.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := x^2 - 2x + 2$ und $g_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x, h) := x + h$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y, z) := \frac{x^2 - y^2}{z}$ und
$g_2 : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $g_2(x, h) := (x + h, x, h)$.

Hinweis: Sollten Sie mit dieser Art von Aufgabe Probleme haben, dann sollten Sie sich weitere ähnliche Aufgaben ausdenken und diese mit Kommilitoninnen und/oder Kommilitonen besprechen.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 14.11.16, zu Beginn der Vorlesung

(A10) Abbildungen mit vorgegebenen Eigenschaften (2+2+2 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
&M_1 := \mathbb{N}, \\
&M_2 := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}, \\
&M_3 := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 26\}, \\
&M_4 := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 13\}, \\
&M_5 := \mathbb{Z}, \\
&M_6 := \{n \in \mathbb{N} \mid 500 \leq n \leq 512\}.
\end{aligned}$$

Finden Sie Beispiele der angegebenen Art, wobei Sie Definitions- und Wertebereich jeweils aus der obigen Liste frei auswählen dürfen ($M_i = M_j$ ist erlaubt), insgesamt aber jede Menge mindestens einmal verwendet werden muss:

a) zwei Abbildungen $M_i \to M_j$, die injektiv aber nicht surjektiv sind,

b) zwei Abbildungen $M_i \to M_j$, die surjektiv aber nicht injektiv sind,

c) zwei bijektive Abbildungen $M_i \to M_j$.

(A11) Eigenschaften von Verknüpfungen (2+2+2+2 Punkte)

Wir betrachten zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sowie deren Verknüpfung $g \circ f : X \to Z$. In der Vorlesung haben wir bewiesen: Sind f und g injektiv, so ist auch die Verknüpfung $g \circ f$ injektiv. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sind f und g surjektiv, so ist auch die Verknüpfung $g \circ f$ surjektiv.

Bemerkung: Hieraus folgt mit der Aussage über Injektivität aus der Vorlesung: Sind f und g bijektiv, so ist auch die Verknüpfung $g \circ f$ bijektiv.

b) Ist die Verknüpfung $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

c) Ist die Verknüpfung $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

Hinweis: Für die Aussagen in **b)** *und* **c)** *ist es einfacher, diese zuerst mit Hilfe der zweiten Tautologie aus Aufgabe* **(A6)** *von Blatt 2 umzuformulieren, und dann die so erhaltenen Aussagen zu beweisen. Diese Beweisstrategie nennt man* Beweis durch Kontraposition.

d) Geben Sie ein konkretes Beispiel einer ***bijektiven*** Verknüpfung $g \circ f$ zweier selbst gewählter Abbildungen f und g, so dass f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Siehe nächstes Blatt!

(A12) Mengenoperationen als Abbildungen **(4+2 Punkte)**

Für Teilmengen einer gegebenen nichtleeren Grundmenge X können wir die Mengenoperationen (Vereinigung, Durchschnitt, Differenz) jeweils als Abbildungen

$$\begin{aligned} V &: \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad V(A,B) := A \cup B \\ S &: \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad S(A,B) := A \cap B \\ D &: \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad D(A,B) := A \setminus B \end{aligned}$$

auffassen, wobei $\mathcal{P}(X)$ wie immer die Potenzmenge von X bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass V, S und D surjektiv, aber nicht injektiv sind.
(Hinweis: In Ihren Argumenten sollte klar werden, für welche Teilaussagen Sie die Voraussetzung benötigen, dass X nicht leer ist.)

b) Beschreiben Sie für eine Teilmenge $C \subseteq X$ das Urbild $D^{-1}(C) \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ (in Worten).