Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
J. Latschev

WS 2014/15

Vortragsthemen

Proseminar
"De-Rham-Kohomologie und ihre Anwendungen"

Spielregeln:

- Dies ist ein mathematisches Proseminar. Gleichberechtigte Lernziele sind einerseits das Erlernen der mathematischen Inhalte und andererseits die zielpublikumsgerechte Präsentation des im Selbststudium angeeigneten Wissens. Wichtig für das Erreichen beider Ziele ist die **kritische Auseinandersetzung mit dem Text**.

- Die Vortragszeit beträgt jeweils 80 Minuten. Die übrigen 10 Minuten bleiben für Fragen, Diskussionen und Ergänzungen. Eine aktive Beteiligung an der Diskussion wird erwartet und ist Teil der Seminarleistung.

- Zu jedem Vortrag wird von dem oder der Vortragenden ein Begleittext ausgearbeitet, welcher die Inhalte verständlich zusammenfasst. Dieser sollte so kurz wie möglich und so lang wie nötig sein, und ist mir 2 Wochen vor dem Vortragstermin abzugeben. Er soll insbesondere alle die Beweise enthalten, welche eventuell aus Zeitgründen im Vortrag nicht oder nur in verkürzter Form präsentiert werden.

Alle Literaturangaben beziehen sich auf das Buch "From Calculus to Cohomology" von Madsen und Tornehave.

1. Alternierende Multilinearformen auf einem Vektorraum (§2, S.7–14)

Geben Sie eine Einführung in die Theorie der alternierenden Formen auf einem Vektorraum.

2. De-Rham-Kohomologie für offene Mengen (§3, S.15–24)

Führen Sie Differentialformen im $\mathbb{R}^n$ ein, beschreiben Sie ihre grundlegenden Eigenschaften und definieren Sie die de-Rham-Kohomologie einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie auch das Poincaré-Lemma.

3. Kettenkomplexe und ihre Homologie (§4, S.25–31)

Geben Sie eine Einführung in die algebraische Sprache der Kettenkomplexe und Kettenabbildungen. Zeigen Sie, dass eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen eine lange exakte Folge von Homologiegruppen induziert. Diskutieren Sie auch den Begriff der Kettenhomotopie für Abbildungen und dessen Bedeutung.

4. Die Mayer-Vietoris-Sequenz (§5, S.33–37)

Beweisen Sie den Satz von Mayer und Vietoris für offene Zerlegungen, und geben Sie Beispiele für Anwendungen. Diskutieren Sie insbesondere neben den im Buch gegebenen Beispielen auch andere, zum Beispiel $B^3(0,R)\setminus\overline{B^3(0,r)}$ und $B^3(0,R)\setminus(\overline{B^2(0,r)}\times\mathbb{R})$ für $0<r<R$ oder eine offene Umgebung eines eingebetteten Torus $T^2\subset\mathbb{R}^3$.

5. Homotopien (§6, S.39–46)

Definieren Sie den Begriff der Homotopie von stetigen Abbildungen, und beschreiben Sie dessen Bedeutung in Bezug auf die induzierten Abbildungen auf der de-Rham-Kohomologie. Diskutieren Sie einige Folgerungen aus der Theorie.

6. Anwendungen der bisherigen Theorie (§7, S.47–55)

Diskutieren Sie die in diesem Kapitel beschriebenen Anwendungen der de-Rham-Kohomologie in der Topologie.

7. Glatte Mannigfaltigkeiten (§8, S.57–63, Anhang A, S.221–225)

Definieren Sie den Begriff der glatten Manigfaltigkeit und geben Sie Beispiele. Beweisen Sie den Einbettungssatz für kompakte M, und diskutieren Sie die dafür notwendigen Aussagen zu glatten Zerlegungen der Eins aus dem Anhang.

8.+9. Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten I+II (§9, S.65–82)

Übertragen Sie den Begriff der Differentialform von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf glatte Mannigfaltigkeiten und diskutieren Sie Beispiele. Definieren Sie Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit und erläutern Sie den Zusammenhang zur Existenz von Volumenformen.

Beweisen Sie die Existenz von Tubenumgebungen von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ und stellen Sie erste Konsequenzen daraus vor.

10. Integration auf Mannigfaltigkeiten (§10, S. 83–95)

Erläutern Sie die Integration auf Mannigfaltigkeiten, beweisen Sie den Satz von Stokes, und ziehen Sie Folgerungen aus diesem.

11. Satz von Sard und Eigenschaften des Abbildungsgrades (§11, S. 97–102)

Beweisen Sie den im Text behandelten Spezialfall des Satzes von Sard und folgern Sie daraus eine alternative Beschreibung des Abbildungsgrades.

12. Verschlingungszahlen (§11, S. 102–106)

Führen Sie Verschlingungszahlen ein, beweisen Sie deren elementare Eigenschaften und geben Sie Beispielrechnungen an.

13. Der Index eines Vektorfeldes (§11, S. 106–112)

Definieren Sie den Index eines Vektorfeldes an einer Nullstelle und geben Sie Beispiele. Diskutieren Sie die Invarianz der Indexsumme unter Störungen und Konsequenzen daraus.