Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Winter 2012/13

Symplektische Geometrie

Übungsblatt 9

1. Seien $A : X \to Y$ und $B : Y \to X$ beschränkte lineare Abbildungen zwischen Banachräumen mit $AB = \mathbb{1}_Y$. Beweisen Sie: Es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass zu jeder beschränkten linearen Abbildung $C : X \to Y$ mit $\|C - A\| < \epsilon$ ebenfalls eine beschränkte lineare Abbildung $D : Y \to X$ mit $CD = \mathbb{1}_Y$ existiert!

2. Sei $J : B \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ eine glatte Familie von fast-komplexen Strukturen auf $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, parametrisiert durch $z \in B = B(0,1) \subset \mathbb{C}$, sei $A \in L^\infty(B, \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n))$, und sei $p > 2$. Adaptieren Sie den Beweis des Ähnlichkeitssatzes um zu zeigen, dass es für jede Lösung $u \in W^{1,p}(B, \mathbb{C}^n)$ der Gleichungen

$$\frac{1}{2}(\partial_s u(z) + J(z)\partial_t u(z)) + A(z)u(z) = 0 \quad , \quad u(0) = 0 \tag{1}$$

ein $\epsilon > 0$ und Abbildungen $\Phi \in W^{1,p}(B_\epsilon, \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n))$ und $f \in C^\infty(B_\epsilon, \mathbb{C}^n)$ gibt, so dass

$$\Phi(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}, \quad \overline{\partial} f = 0, \quad \text{und} \quad u(z) = \Phi(z)f(z).$$

Hinweis: Verwenden Sie eine glatte Familie $\Psi : B \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ mit $\Psi(z)J(z) = i\Psi(z)$, und betrachten Sie die Gleichung für die durch $u(z) := \Psi(z)v(z)$ definierte Funktion $v \in W^{1,p}(B, \mathbb{C}^n)$, welche sich aus (1) ergibt.

3. Verwenden Sie Aufgabe **2)**, um folgende Aussagen zu beweisen:

a) Für eine nichtkonstante Lösung $u \in W^{1,p}(B, \mathbb{C}^n)$ der Gleichung (1) existiert ein $\delta > 0$, so dass $u(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\delta \setminus \{0\}$.

b) Für eine nichtkonstante Lösung $u \in C^\infty(B, \mathbb{C}^n)$ der Gleichung (1) mit $A = 0$ (d.h. eine J-holomorphe Kurve) existiert ein $\delta > 0$, so dass $du(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\delta \setminus \{0\}$.
Hinweis: Leiten Sie die Gleichung nach s ab, um eine Gleichung vom selben Typ für $v = \partial_s u$ zu erhalten.