Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Winter 2012/13

Symplektische Geometrie

Übungsblatt 8

1. *(Zusammenhänge und Cauchy-Riemann-Operatoren)*
Sei $(E, J) \to (\Sigma, j)$ ein komplexes Vektorbündel über einer Riemannschen Fläche. Ein Zusammenhang auf E ist eine $\mathbb{R}$-Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T\Sigma, E))$$

so dass für $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ glatt und $s \in \Gamma(E)$ stets $\nabla(f \cdot s) = df \cdot s + f \cdot \nabla s$ gilt. Zeigen Sie:

a) Die Differenz $A = \nabla - \nabla'$ zweier Zusammenhänge ist eine $C^\infty(\Sigma)$-lineare Abbildung $A : \Gamma(E) \to \Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T\Sigma, E))$.

b) Für jeden Zusammenhang ∇ auf E ist

$$D := \nabla + J \circ \nabla \circ j \tag{1}$$

ein reell linearer Cauchy-Riemann-Operator auf (E, J).

c) Der in (1) definierte Operator D ist ein komplex linearer Cauchy-Riemann-Operator, falls ∇ ein komplexer Zusammenhang ist, d.h. falls $\nabla J = 0$ gilt (dies bedeutet, dass $\nabla(Js) = J(\nabla s)$).

d) Die Differenz $B = D - D'$ zweier rell linearer Cauchy-Riemann-Operatoren ist eine $C^\infty(\Sigma)$-lineare Abbildung

$$B : \Gamma(E) \to \Gamma(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E)).$$

2. *(Holomorphe Geradenbündel über Flächen)*
Beweisen Sie:

a) Das Kotangentialbündel $K_\Sigma = T^*\Sigma$ einer Riemannschen Fläche (Σ, j) ist ein holomorphes Geradenbündel. Dieses nennt man das *kanonische Bündel von Σ*.

Bitte wenden!

b) Definiert man $U \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ als die Teilmenge

$$U := \{([z], w) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{C} :\; w = \lambda z\},$$

so ist U mit der offensichtlichen Projektion $\pi : U \to \mathbb{C}P^1$, $\pi([z], w) = [z]$ ein holomorphes Geradenbündel. Dieses nennt man das *universelle Geradenbündel*.

c) Seien $\mathcal{U}_i := \{[z_0 : z_1] \mid z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^1$ die beiden offenen Teilmengen der Standardüberdeckung von $\mathbb{C}P^1$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ definiert man ein holomorphes Geradenbündel $E_k \to \mathbb{C}P^1$, indem man die trivialen Bündel $E|_{\mathcal{U}_0} = \mathcal{U}_0 \times \mathbb{C}$ und $E|_{\mathcal{U}_1} = \mathcal{U}_1 \times \mathbb{C}$ mit der Übergangsabbildung

$$\begin{aligned} \psi_k : E|_{\mathcal{U}_0} \supset E|_{\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1} &\to E|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_0} \subset E|_{\mathcal{U}_1} \\ ([z_0 : z_1], v) &\mapsto \left([z_0 : z_1], \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^k \cdot v \right) \end{aligned}$$

verklebt.
Behauptung: Das Bündel E_k besitzt genau dann einen holomorphen Schnitt $s : \mathbb{C}P^1 \to E_k$, wenn $k \geq 0$ gilt. In diesem Fall ist die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorrraumes der holomorphen Schnitte gleich $k+1$.

d) Zu welchen der Bündel $E_k \to \mathbb{C}P^1$ sind das kanonische und das universelle Bündel über $\mathbb{C}P^1$ isomorph?