Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Winter 2012/13

Symplektische Geometrie

Übungsblatt 10

1. Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ der konformen Automorphismen der Sphäre $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, deren Elemente sich als

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \text{ mit } \quad ad - bc = 1 \tag{1}$$

schreiben lassen und auch Möbiustransformationen genannt werden. Dabei sind die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ bis auf gemeinsame Multiplikation mit -1 eindeutig bestimmt. Beweisen Sie:

a) Jede Möbiustransformation ist durch ihre Werte in drei verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in S^2$ eindeutig bestimmt.

b) Für die Ableitung einer Möbiustransformation wie in (1) gilt $\varphi'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$.

c) Bezüglich der Fubini-Study-Metrik $g_{\mathrm{FS}} = \frac{1}{1+|z|^2} g_{\mathrm{st}}$ auf $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erfüllt die Norm des Differentials die Gleichung

$$\|d\varphi(z)\| = \sqrt{2}\,|\varphi'(z)| \frac{1+|z|^2}{1+|\varphi(z)|^2} = \sqrt{2}\,\frac{1+|z|^2}{|az-b|^2 + |cz+d|^2}.$$

d) Ist φ_k eine Folge von Möbiustransformationen, so dass

$$\sup_k \sup_{z \in S^2} \|du_k(z)\| < \infty,$$

so existiert eine Teilfolge, welche auf ganz S^2 uniform mit allen Ableitungen gegen ein $\varphi \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ konvergiert.

e) Ist φ_k eine Folge von Möbiustransformationen, welche keine uniform konvergente Teilfolge besitzt, so existieren Punkte $x, y \in S^2$ und eine Teilfolge φ_{k_n}, so dass die φ_{k_n} auf kompakten Teilmengen von $S^2 \setminus \{x\}$ uniform gegen die konstante Funktion $\varphi(z) = y$ konvergieren.

Hinweis: Für die letzten beiden Teilaufgaben ist es hilfreich, sich durch Übergang zu einer Teilfolge und Komposition mit einer konvergenten Folge von Rotationen $\varrho_{k_n} \in \mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *in die Situation zu bringen, dass* $u_{k_n}(\infty) = \infty$.

Bitte wenden!

2. Beweisen Sie:

a) Ist $n > 1$, so existiert keine Abbildung $f : S^n \to T^n$ vom Grad $\neq 0$.

b) Ist $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung der Form

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei P und Q Polynome sind, welche keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, so hat f den Abbildungsgraf $d(f) = \max(\deg P, \deg Q)$.