Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 9

1. **a)** Jedes $E \in \mathcal{A}$ ist in $\widehat{\mathcal{A}}$, denn die angegebene Bedingung ist mit $A = B = E$ erfüllt. Insbesondere enthält $\widehat{\mathcal{A}}$ den ganzen Raum X.
Sei $E \in \widehat{\mathcal{A}}$, und seien $A \subset E \subset B$ mit $A, B \in \mathcal{A}$ und $m(B \setminus A) = 0$ gewählt. Dann gilt

$$X \setminus B \subset X \setminus E \subset X \setminus A,$$

und

$$(X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = (X \setminus A) \cap B = B \setminus A,$$

so dass auch $m((X \setminus A) \setminus (X \setminus B)) = 0$ gilt. Also enthält $\widehat{\mathcal{A}}$ auch $X \setminus E$.
Sei nun $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eine Folge von Mengen mit $E_i \in \widehat{\mathcal{A}}$, und seien $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ wie in der Definition von $\widehat{\mathcal{A}}$ gewählt. Dann gilt

$$A = \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i B_i = B,$$

mit $A, B \in \mathcal{A}$, und

$$B \setminus A = \bigcup_i (B_i \setminus A) \subset \bigcup_i (B_i \setminus A_i).$$

Daraus folgt aber $m(B \setminus A) \leq \sum_i m(B_i \setminus A_i) = 0$, denn alle Summanden verschwinden. Also gilt $E = \cup_i E_i \in \widehat{\mathcal{A}}$.

b) Zunächst zeigen wir, dass $\widehat{m}$ wohldefiniert ist. Sei also $E \in \widehat{\mathcal{A}}$ gegeben und $A \subset E \subset B$ und $A' \subset E \subset B'$ zwei Schachtelungen wie in der Definition von $\widehat{\mathcal{A}}$. Dann gilt $m(A) = m(B)$ und $m(A') = m(B')$. Außerdem haben wir $A' \subset E \subset B$ und somit $B' \setminus B \subset B' \setminus A'$, woraus $m(B' \setminus B) = 0$ folgt. Dies impliziert aber $m(B) = m(B')$, woraus wir mit der ersten Überlegung $m(A) = m(A')$ folgern. Also ist $\widehat{m}(E)$ wohldefiniert.
Des weiteren prüft man leicht nach, dass $\widehat{m} : \widehat{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ ein Maß ist. Die Eigenschaft $\widehat{m}(\varnothing) = 0$ ist klar aus der Definition, und Monotonie folgt aus der Monotonie von m: Sind $C_1 \subset C_2$ Mengen aus $\widehat{\mathcal{A}}$, so finden wir $A_1 \subset C_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset C_2 \subset B_2$ mit $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ und $m(B_i \setminus A_i) = 0$. Aus letzterer Eigenschaft folgt insbesondere $m(A_i) = m(B_i)$, so dass wegen $A_1 \subset C_1 \subset C_2 \subset B_2$ auch

$$\widehat{m}(C_1) = m(A_1) \leq m(B_2) = m(A_2) = \widehat{m}(C_2)$$

folgt. Ebenso einfach folgt die Additivität von $\widehat{m}$ für abzählbare disjunkte Vereinigungen aus der analogen Eigenschaft von m.
Ist nun $N \in \widehat{\mathcal{A}}$ eine Nullmenge und $N' \subset N$, so existiert $B \in \mathcal{A}$ mit $N \subset B$ und $m(B) = 0$. Dann folgt aber $\varnothing \subset N' \subset B$ und $m(B \setminus \varnothing) = m(B) = 0$, so dass N' ebenfalls $\widehat{\mathcal{A}}$-messbar ist und Maß 0 besitzt. Also ist $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{m})$ vollständig.

2. **a)** Offenbar gilt nach der Definition $m_1(\varnothing) = \int_X 0 \cdot dm = 0$, sowie $m_1(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir müssen also noch zeigen, dass für eine disjunkte Vereinigung von messbaren Mengen $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ auch

$$m_1(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m_1(A_i)$$

gilt. Dazu schreiben wir $\chi_A = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}$, und erhalten

$$m_1(A) = \int_X f \cdot \chi_A \, dm = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} f \cdot \chi_{A_i} \, dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f \cdot \chi_{A_i} \, dm = \sum_{i=1}^{\infty} m_1(A_i),$$

wobei wir im entscheidenden Schritt die Folgerung aus dem Satz über monotone Konvergenz aus der Vorlesung (das Integral der Summe nichtnegativer messbarer Funktionen ist gleich der Summe der Integrale) benutzt haben.

b) Zunächst bemerken wir, dass für jede einfache Funktion $s = \sum_{j=1}^{r} d_j \chi_{A_j}$ die Aussage wahr ist, denn

$$\int_X s \cdot f \, dm = \sum_{j=1}^{r} d_j \int_X \chi_{A_j} \cdot f \, dm = \sum_{j=1}^{r} d_j \, m_1(A_j) = \int_X s \, dm_1.$$

Sei nun $\{s_n\}_{n \geq 1}$ eine Folge einfacher Funktionen mit $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots \leq g$ und $g = \lim_{n\to\infty} s_n$. Dann konvergieren die Funktionen $s_n \cdot f$ monoton gegen $g \cdot f$. Wir verwenden nun zweimal den Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz (je einmal für m_1 und m) sowie die Wahrheit der Aussage für einfache Funktionen und erhalten

$$\int_X g \, dm_1 = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, dm_1 = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot f \, dm = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n \cdot f \, dm = \int_X g \cdot f \, dm,$$

wie behauptet.

3. Für $n \geq 1$ definieren wir $B_n := \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$ und $A_n := B_n \setminus B_{n+1}$. Außerdem setzen wir $A_0 := X \setminus B_1$. Dann sind alle A_n und B_n messbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{A_n} \leq f \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\chi_{A_n}.$$

sowie

$$X = \dot{\bigcup_{n\geq 0}} A_n \quad , \text{ so dass} \quad \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) = m(X) < \infty.$$

Außerdem ist wegen $B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ jede Menge A_n in genau n der Mengen B_k enthalten, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot m(A_n).$$

Nehmen wir zunächst an, f sei integrierbar. Dann gilt für die einfachen Funktionen $s_k := \sum_{n=1}^{k} n\chi_{A_n}$ stets $s_k \leq f$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n{\cdot}m(A_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} n{\cdot}m(A_n) = \lim_{k\to\infty} \int_X s_k\, dm \leq \int_X f\, dm < \infty.$$

Ist andererseits die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$ endlich, so ist wegen $m(X) < \infty$ auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) m(A_n) = m(X) + \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \infty.$$

Nun folgt aber

$$\int_X f\, dm \leq \int_X \sum_{n=0}^{\infty} (n{+}1){\cdot}\chi_{A_n}\, dm = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X (n{+}1){\cdot}\chi_{A_n}\, dm = \sum_{n=0}^{\infty} (n{+}1){\cdot}m(A_n) < \infty,$$

so dass f integrierbar ist. Hier haben wir im zweiten Schritt wieder die Folgerung aus dem Satz über monotone Konvergenz aus der Vorlesung benutzt.