Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 8

1. a) Mit dem Satz von Gauß, angewendet auf das Vektorfeld $V = x^3 \frac{\partial}{\partial x}$ und die Untermannigfaltigkeit $M = B^3$ erhalten wir

$$\int_{S^2} x^4 \, \mu_{S^2} = \int_{B^3} 3x^2 \, dxdydz = \int_{-1}^{1} 3x^2 \cdot \pi(1-x^2) \, dx = \frac{4\pi}{5}.$$

b) Gemeint war natürlich die *Fläche* $T_{r,R}$, mit der nachträglich korrigierten Definition (die erste Definition beschrieb den Volltorus). Wir betrachten die Parametrisierung $h : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to T = T_{r,R}$,

$$h(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Formel $g = \det(Dh^T Dh)$ ergibt sich für die zurückgezogene Volumenform

$$h^*\mu_T = \sqrt{g} \, d\vartheta d\varphi = r(R + r\cos\varphi) \, d\vartheta d\varphi,$$

so dass man die Fläche als

$$\int_T \mu_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\varphi) \, d\vartheta d\varphi = 4\pi^2 r R$$

berechnet.

2. a) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die angegebene Teilmenge der Potenzmenge von X. Wir prüfen für $\mathcal{A}$ die drei Eigenschaften für σ-Algebren nach: Offenbar ist wegen $X = f^{-1}(Y)$ der Raum X ein Element von $\mathcal{A}$. Ist $A \in \mathcal{A}$, so wissen wir $A = f^{-1}(E)$ für ein $E \in Y$, und somit ist

$$X \setminus A = X \setminus f^{-1}(E) = f^{-1}(Y \setminus E) \tag{1}$$

ebenfalls in $\mathcal{A}$, weil $\mathcal{A}_Y$ nach Voraussetzung auch $Y \setminus E$ enthält. Schließlich folgt aus der Beziehung

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right), \tag{2}$$

dass $\mathcal{A}$ auch abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist. Somit ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

b) Hier benutzt man praktisch die gleiche Argumentation wie im Teil **a)**. Sei $\mathcal{A}' \subset \mathcal{P}(X)$ die angegebene Teilmenge der Potenzmenge von Y. Wegen $f^{-1}(Y) = X$ wissen wir, dass $Y \in \mathcal{A}'$. Die Gleichung (1) zeigt, dass $\mathcal{A}'$ abgeschlossen unter Komplementbildung ist, und die Gleichung (2) zeigt, dass $\mathcal{A}'$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist.

3. **a)** Sei $\mathcal{A}$ die von allen kompakten Mengen erzeugte σ-Algebra. Da jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und somit eine Borelmenge ist, wissen wir, dass $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ enthalten ist.
Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, geben wir zwei Möglichkeiten an. Entweder man überlegt sich, dass jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sich als abzählbare Vereinigung der kompakten Teilmengen $A \cap \overline{B(0,n)}$ mit $n \geq 1$ schreiben lässt, also in $\mathcal{A}$ liegt. Da $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter Komplementbildung ist, folgt daraus auch, dass jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{A}$ ist. Somit gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.
Alternativ schreibt man jeden offenen Ball $B(p,r)$ als abzählbare Vereinigung

$$B(p,r) = \bigcup_{n \geq 1} \overline{B(p, r - 1/n)}$$

kompakter Mengen. Ist nun $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Teilmenge, so wählt man zu jedem Punkt $p \in U$ einen Ball $B_p = B(q(p), r(p))$ mit $p \in B_p \subset U$, so dass B_p einen Mittelpunkt $q(p) \in \mathbb{Q}^n$ und einen rationalen Radius $r(p) \in \mathbb{Q}$ hat. Die Menge aller so erhaltenen Bälle $\{B_p\}_{p \in U}$ ist bijektiv zur Teilmenge $\{(q(p), r(p)) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q} \mid p \in U\} \subset \mathbb{Q}^{n+1}$, also abzählbar. Damit ist also jede offene Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung von Bällen, und somit nach dem vorangegangenen Schritt eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen. Dies beweist wieder $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.

b) Wir werden zeigen, dass $\overline{M} \setminus M$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann ist $M = \overline{M} \setminus (\overline{M} \setminus M)$ als Differenz zweier abgeschlossener Mengen ebenfalls eine Borelmenge. Wir betrachten nur den Fall dass M keinen Rand hat, denn im allgemeinen ist $M = (M \setminus \partial M) \cup \partial M$ eine Vereinigung von zwei Untermannigfaltigkeiten ohne Rand (von verschiedener Dimension).
Ist $C = \overline{M} \setminus M$ nicht abgeschlossen, so existiert eine Folge $p_n \in C$ mit $p_n \to p \notin C$. Wegen $p_n \in C \subset \overline{M}$ folgt hieraus $p \in M$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p wie in der Bedingung (2) für Untermannigfaltigkeiten, d.h. es existiert eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $M \cap U = f^{-1}(0)$. Insbesondere ist $M \cap U$ eine abgeschlossene Teilmenge von U.
Ist n groß genug, so gilt $p_n \in U$. Da $p_n \in \overline{M}$, existiert eine Folge $q_{n,k} \in M$ mit $q_{n,k} \to p_n$. Da U eine offene Umgebung von p_n ist, liegen die $q_{n,k}$ für hinreichend großes k in $U \cap M$. Da aber $U \cap M$ abgeschlossen in U ist, folgt hieraus $p_n \in M$, im Widerspruch zur Wahl der p_n in $C = \overline{M} \setminus M$. Dieser

Widerspruch zeigt, dass $\overline{M} \setminus M$ abgeschlossen ist, und wie eingangs erwähnt folgt hieraus die Behauptung.

4. **a)** $\mathcal{A}$ enthält die leere Menge und somit auch X. Außerdem ist es nach Definition abgeschlossen unter Komplementbildung. Sei schließlich A_i eine abzählbare Folge von Elementen aus $\mathcal{A}$. Sind alle A_i abzählbare Teilmengen von X, so ist auch $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ eine abzählbare Teilmenge von X. Ist andererseits A_{i_0} nicht abzählbar, so ist $X \setminus A_{i_0}$ abzählbar, und es gilt

$$X \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \subset X \setminus A_{i_0}.$$

Also ist auch diese Menge abzählbar, und somit $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ein Element von $\mathcal{A}$. Wir haben also alle drei Eigenschaften einer σ-Algebra nachgeprüft.

b) Offenbar enthält $\mathcal{A}$ die einelementigen Mengen, also auch die von ihnen erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}'$. Andererseits ist natürlich auch jede höchstens abzählbare Menge eine abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen, und somit enthält $\mathcal{A}'$ auch alle abzählbaren Mengen und ihre Komplemente. Daher gilt die umgekehrte Inklusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

c) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gibt es eine Teilmenge $A \subset X$ mit abzählbarem Komplement und ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in A$ gilt, so ist f messbar, denn für *jede* Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ gilt dann:

$$\begin{cases} f^{-1}(E) \text{ ist höchstens abzählbar, falls } c \notin E, \text{ und} \\ f^{-1}(E) \text{ hat ein höchstens abzählbares Komplement, falls } c \in E. \end{cases}$$

Ist andererseits f messbar, so betrachten wir

$$\alpha := \inf\{a \mid f^{-1}((a,\infty)) \text{ ist abzählbar}\} \quad \text{und}$$
$$\beta := \sup\{b \mid f^{-1}((-\infty,b)) \text{ ist abzählbar}\}.$$

Da X überabzählbar ist, gilt $\beta \leq \alpha$. Wäre $\beta < \alpha$, so wären die beiden Teilmengen

$$f^{-1}((-\infty, \frac{\beta+\alpha}{2}]) \quad \text{und} \quad f^{-1}((\frac{\beta+\alpha}{2}, \infty))$$

überabzählbar, was der Messbarkeit von f widerspricht. Also folgt $\alpha = \beta$, und weiterhin ist nach der Definition von α und β

$$f^{-1}((-\infty,\alpha)) \cup f^{-1}((\alpha,\infty)) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}((-\infty, \alpha - \frac{1}{n})) \cup f^{-1}((\alpha + \frac{1}{n}, \infty))$$

abzählbar, so dass $f^{-1}(\alpha)$ abzählbares Komplement besitzt. Hieraus folgt insbesondere, dass $\alpha \neq \pm\infty$, d.h. $\alpha \in \mathbb{R}$ (sonst wäre $X = f^{-1}(\mathbb{R})$ abzählbar), und die Behauptung ist bewiesen.