Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 7

1. Die Fläche M lässt sich durch die Abbildung $h : (a,b) \times (0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, gegeben als

$$h(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t \\ f(t)\cos\varphi \\ f(t)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

parametrisieren. Wir berechnen nun die Gramsche Determinante als $g = \det(Dh^T Dh)$. Mit

$$Dh(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

erhalten wir $g = f^2(t)(1+f'(t)^2)$, so dass sich für die zurückgezogene Volumenform $h^*\mu_M$ die Formel

$$h^*\mu_M = f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}dt \wedge d\varphi$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$\mathrm{vol}(M) = \int_0^{2\pi}\int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt\,d\varphi = 2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

wie behauptet.
Bemerkung: Dies ist streng genommen ein uneigentliches Integral. Um die in der Vorlesung behandelte Theorie anwendbar zu machen, hätte man im Prinzip in zwei Schritten vorgehen müssen: Zunächst betrachtet man die Einschränkung von f auf die abgeschlossenen Intervalle $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ und erhält Flächen mit Rand, für die die analoge Formel richtig ist. Anschliessend überlegt man sich zusätzliche Voraussetzungen an f, unter denen der Grenzwert für $n \to \infty$ existiert.

2. *1. Lösung:* Wir benutzen die Karte $h : (0,2\pi) \times (0,\frac{\pi}{2}) \to M$,

$$h(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi\cos\vartheta \\ a\sin\varphi\cos\vartheta \\ a\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

und erhalten mit

$$Dh(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\cos\vartheta & -a\cos\varphi\sin\vartheta \\ a\cos\varphi\cos\vartheta & -a\sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & a\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

die Gramsche Determinante

$$g = \det(Dh^T Dh) = a^4\cos^2\vartheta.$$

Also hat das zu berechnende Integral die Form

$$\int_M (x+y+z)\mu_M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\varphi\cos\vartheta + a\sin\varphi\cos\vartheta + a\sin\vartheta\,)\cdot a^2\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Da die Integrale von Sinus und Kosinus über die volle Periode 2π verschwinden, erhalten wir

$$\int_M (x+y+z)\mu_M = 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = \pi a^3\sin^2\vartheta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^3.$$

2. Lösung: Wir bemerken, dass das Integral von der Form

$$\int_{S^2(0,a)\cap\{z\geq 0\}} \langle V, N_{S^2(0,a)}\rangle \mu_{S^2(0,a)}$$

ist, wobei $N = \frac{1}{a}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$ der äußere Normalenvektor an die Sphäre $S^2(0,a)$ und $V = a\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ein global definiertes konstantes Vektorfeld ist. Insbesondere gilt $\operatorname{div} V = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3$, und wir erhalten mit dem Satz von Gauß

$$\int_{S^2(0,a)\cap\{z\geq 0\}} \langle V, N_{S^2(0,a)}\rangle \mu_{S^2(0,a)} = \int_{B^2(0,a)\times\{0\}} a\, dxdy = a\operatorname{vol}(B^2(0,a)) = \pi a^3,$$

da M zusammen mit $B^2(0,a)\times\{0\}$ den Rand eines Gebietes in $\mathbb{R}^3$ bilden.

3. In Polarkoordinaten hat die Gleichung der Kardioide die Form

$$r^2 = r + r\cos\varphi \quad , \text{d.h.} \quad r = 1+\cos\varphi.$$

Man beachte, dass die zweite Gleichung auch für $r = 0$ gültig bleibt. Die Kardioide lässt sich also mit Hilfe der Abbildung $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t)$$

parametrisieren. Diese Parametrisierung ist positiv für die induzierte Orientierung von C als Rand des eingeschlossenen Gebietes D.

a) Mit Hilfe des Satzes von Stokes erhalten wir

$$\operatorname{vol} D = \int_D dx \wedge dy = \int_{\partial D} -y\,dx = \int_0^{2\pi} \gamma^*(-y\,dx).$$

Die zurückgezogene Form berechnet man als

$$\begin{aligned}\gamma^*(-y\,dx) &= -(1+\cos t)\sin t\,[-(1+\cos t)\sin t - \sin t\cos t]\;dt\\ &= (1+3\cos t+2\cos^2 t)\sin^2 t\,dt.\end{aligned}$$

Für das Integral ergibt sich also

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} D &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + 3\sin^2 t\cos t + 2\sin^2 t\cos^2 t\,dt\\ &= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) Rechnet man mit Polarkoordinaten, so ergibt sich aus der Kurvengleichung für das Gebiet D die Beschreibung durch die Ungleichungen

$$0 \le r \le 1+\cos\varphi,$$

so dass sich die Fläche mit der Volumenform $r\,dr\,d\varphi$ als

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} D &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi\\ &= \pi + \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\\ &= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

berechnen lässt.

4. a) Ist $p \in F$ und ist (e_1, e_2) eine positive orientierte Orthonormalbasis von T_pF, so gilt nach Definition der Volumenform μ_F

$$\langle(\operatorname{rot} V)(p), N(p)\rangle \mu_F(e_1, e_2) = \langle(\operatorname{rot} V)(p), N(p)\rangle.$$

Andererseits ist $(N(p), e_1, e_2)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_p\mathbb{R}^3$, so dass auch

$$\begin{aligned}
(i_{\operatorname{rot} V}\mu_{\mathbb{R}^3})(e_1, e_2) &= \mu_{\mathbb{R}^3}((\operatorname{rot} V)(p), e_1, e_2) \\
&= \det \begin{pmatrix} \langle N(p), (\operatorname{rot} V)(p)\rangle & \langle N(p), e_1\rangle & \langle N(p), e_2\rangle \\ \langle e_1, (\operatorname{rot} V)(p)\rangle & \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, (\operatorname{rot} V)(p)\rangle & \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \langle N(p), (\operatorname{rot} V)(p)\rangle & 0 & 0 \\ \langle e_1, (\operatorname{rot} V)(p)\rangle & 1 & 0 \\ \langle e_2, (\operatorname{rot} V)(p)\rangle & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \langle N(p), (\operatorname{rot} V)(p)\rangle
\end{aligned}$$

gilt. Da jede n-Form auf einem n-dimensionalen Vektorraum durch den Wert auf einer Basis eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung.

b) Wir argumentieren ganz analog zu Teil **a)**. Da T ein positiv orientiertes Einheitstangentialvektorfeld an R ist, gilt nach Definition der Volumenform μ_R

$$\langle V, T\rangle \mu_R(T) = \langle V, T\rangle.$$

Schreibt man aber $T = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ und $V = V^1\frac{\partial}{\partial x} + V^2\frac{\partial}{\partial y} + V^3\frac{\partial}{\partial z}$, so gilt mit der Notation von Aufgabe **3. a)** von Blatt 2

$$\begin{aligned}
\beta_V(T) &= (V^1\,dx + V^2\,dy + V^3\,dz)(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}) \\
&= V^1 \cdot a + V^2 \cdot b + V^3 \cdot c = \langle V, T\rangle.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Bemerkung, dass 1-Formen auf R durch die Auswertung auf T bereits vollständig bestimmt sind, folgt die Behauptung.

c) Aus der schon zitierten Aufgabe **3. a)** von Blatt 2 wissen wir, dass $d\beta_V = \iota_{\operatorname{rot} V}\mu_{\mathbb{R}^3}$ gilt. Mit den obigen Rechnungen erhalten wir also

$$\int_F \langle \operatorname{rot} V, N_F\rangle\,\mu_F = \int_F d\beta_V = \int_R \beta_V = \int_R \langle V, T_R\rangle \mu_R,$$

wobei wir in der mittleren Gleichung den Satz von Stokes aus der Vorlesung verwendet haben.