Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 6

1. a) Es genügt, den Fall $p = 0$ zu betrachten. Da W eine offene Umgebung von $p \in \mathbb{R}^k$ ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $B(0, \delta) \subset W$. Für $\epsilon = \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$ gilt dann $[-\epsilon, \epsilon]^k \subset \operatorname{Int} B(0, \delta) \subset W$. Ist nun $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die im Hinweis angegebene Funktion, so hatt $\eta_1(t) := \eta(t + \epsilon)) \cdot \eta(\epsilon - t)$ als Träger gerade das Intervall $[\epsilon, \epsilon]$. Die Funktion

$$\varrho(x^1, \dots, x^k) := \prod_{i=1}^{k} \eta_1(x^i)$$

hat dann die gewünschten Eigenschaften.

b) Sind die Karten gegeben, so wählen wir zu jedem Punkt $p \in M$ einen Index $i = i(p) \in \{1, \dots, N\}$ mit $p \in h_i(W_i)$. Nach Teil **a)** können wir zu jedem Punkt $p \in M$ nun eine Funktion $\varrho_p : W_{i(p)} \to [0, \infty)$ mit kompaktem Träger in W_i und $\varrho_p(h^{-1}(p)) > 0$ konstruieren. Die Funktionen $\overline{\varrho_p} := \varrho_p \circ h^{-1}_{i(p)}$ haben dann kompakten Träger in $U_{i(p)} := h_{i(p)}(W_{i(p)})$ und setzen sich somit zu glatten Funktionen auf ganz M fort, welche außerhalb von $U_{i(p)}$ verschwinden. Wie im Beweis des Satzes von der Zerlegung der Eins bilden die Mengen $\overline{\varrho_p}^{-1}((0, \infty))$ eine offene Überdeckung von M, so dass man endlich viele dieser Mengen auswählen kann, welche M bereits überdecken. Seien $p_1, \dots, p_L$ die zugehörigen Punkte. Wir setzen nun

$$\tilde{\varrho}_i := \sum_{i(p_j)=i} \overline{\varrho_{p_j}} \quad \text{und} \quad \varrho_i := \frac{\tilde{\varrho}_i}{\sum \tilde{\varrho}_i}.$$

Dies ist die gesuchte Zerlegung der Eins.

c) Ist M orientierbar und kompakt, so existiert nach Satz 7 ein endlicher Atlas aus positiv orientierten Karten $h_i : W_i \to M$. Sei $\{\varrho_i\}$ die Zerlegung der Eins zu diesem Atlas wie in Teil **b)**. Ist nun $\omega_i := (\varrho_i \circ h_i) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k \in \Omega(W_i)$ die mit $\varrho_i \circ h_i$ multiplizierte Standardvolumenform auf W_i, so setzen sich die Formen $\eta_i := (h_i^{-1})^*(\omega_i)$ durch 0 glatt auf ganz M fort. Die Summe $\eta := \sum_{i=1}^r \eta_i$ ist dann eine nirgends verschwindende k-Form auf M, denn in allen Punkten $q \in h_i(W_i) \cap h_j(W_j)$ sind die Formen $\eta_i(q)$ und $\eta_j(q)$ nichtnegative Vielfache voneinander (hier benutzen wir die Positivität der Karten), und in jedem Punkt $p \in M$ ist mindestens ein Summand ungleich 0.

Ist umgekehrt $\omega \in \Omega^k(M)$ eine nirgends verschwindende k-Form, so definieren wir eine Basis $(b_1, \ldots, b_k)$ von T_pM als positiv, falls $\omega(p)(b_1, \ldots, b_k) > 0$ ist. Dies definiert eine Orientierung auf M, denn in jeder zusammenhängenden Karte $h : W \to M$ ist $h^*\omega$ ein nirgends verschwindendes Vielfaches von $dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k$, und somit sind die Standardvektorfelder $\frac{\partial}{\partial y^i}$ in jedem Punkt gleich orientiert (d.h. entweder stets positiv oder stets negativ für alle $q \in W$.

2. **a)** Die Formel für die stereograpfische Projektion $p_* : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ lautet

$$p_+(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Die kürzeste Begründung ist, dass diese Formel in der (x_1, x_{n+1})-Koordinatenebene richtig ist (sie stimmt da mit der in der Vorlesung angegebenen Formel für $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ überein), und außerdem invariant unter Rotationen in der $(x_1, \ldots, x_n)$-Hyperebene ist.

b) Die Formel für $h_+ : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$ lautet

$$h_+(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

c) Zunächst untersuchen wir, ob h_+ eine positiv orientierte Karte ist. Da es genügt, dies in einem Punkt zu untersuchen, wählen wir dafür den Punkt $q = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, da dort die Ableitung die besonders einfache Form

$$Dh(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Insbesondere wird die Standardbasis $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ von $T_q\mathbb{R}^n$ auf die Basis $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ von $T_{(1,0,\ldots,0)}S^n$ abgebildet. Da der äußere Normalenvektor im Punkt $h(q) = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gerade $N(h(q)) = \frac{\partial}{\partial x^1}$ ist, sieht man leicht, dass h_+ genau dann positiv orientiert ist, wenn n ungerade ist (man muss $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}$ mit den $(n-1)$ nachfolgenden Vektoren permutieren, um die Standardbasis für $T_{h(q)}\mathbb{R}^{n+1}$ zu erhalten).
Die Koeffizienten der Metrik g_{ij} in der Karte h_+ haben die Form

$$g_{ij} = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2}\, \delta_{ij}.$$

d) Mit der Formel aus Satz 11 der Vorlesung erhalten wir

$$h_+^*(\mu_{S^n}) = (-1)^{n-1}\sqrt{\det(g_{ij})}\, dy_n \wedge \cdots \wedge dy_n \;=\; \frac{(-1)^{n-1}2^n}{(1+\|y\|^2)^n}\, dy_n \wedge \cdots \wedge dy_n,$$

wobei das Vorzeichen die Orientierung korrigiert.

3. **a)** Es genügt zu zeigen, dass $T_pM \subset T_pH$ gilt. Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine affine Funktion mit $H = L^{-1}(0)$. Nach der ersten der äquivalenten Bedingungen aus Satz 1 besitzt p eine Umgebung $U \in \mathbb{R}^n$ mit einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, so dass $Df \neq 0$ auf U und $M \cap U = f^{-1}(0)$. Sind $\operatorname{grad} f$ und $\operatorname{grad} L$ im Punkt p linear unabhängig, so definiert die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x) = (f(x), L(x))$ lokal in einer kleinen Umgebung $U' \subset U$ von p eine $(n-2)$-dimensionale Untermanngifaltigkeit $F^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cap L^{-1}(0) \cap U' = M \cap H \cap U'$ von $\mathbb{R}^n$. Da wir $n > 2$ angenommen haben, besteht eine solche Untermannigfaltigkeit aus mehr als einem Punkt. Dies widerspricht der Annahme, dass $M \cap H = \{p\}$.

b) Nein, denn zum Beispiel für $M = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ erfüllt jede Gerade H welche nicht parallel zu M ist die Voraussetzung, aber keine von diesen Geraden erfüllt die Behauptung.

c) Die Verallgemeinerung der Aussage aus **a)** lautet: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k mit $1 < k < n$, und ist H eine affine Hyperebene mit $H \cap M = \{p\}$, so gilt $T_pM \subset T_pH$.
Der Beweis wird analog zu **a)** geführt: Ist der Gradient der definierenden Funktion von H im Punkt p linear unabhängig von den Gradienten der Komponenten einer lokalen definierenden Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ von M, so ist der Schnitt $H \cap M$ lokal nahe p eine $k-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, besteht also für $k > 1$ aus mehr als einem Punkt.