Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 5

1. M wird von zwei Karten überdeckt: Für die erste wählen wir die in $\mathbb{H}^{n+1}$ offene Teilmenge

$$W_1 := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathcal{O} \mid 0 \le x^{n+1} < f(x^1, \dots, x^n)\} \subset \mathbb{H}^{n+1}$$

und $h_1 : W_1 \to \mathbb{R}^{n+1}$ als die Identität, d.h. $h_1(x) = x$. Für die zweite Karte wählen wir $W_2 = W_1$, aber diesmal setzen wir

$$h_2(x) = (x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n) - x^{n+1}).$$

Für beide Karten hat die Ableitung Dh_i überall vollen Rang, sie sind offensichtlich injektiv, und ihre Bilder überdecken ganz M. Die Abbildungen setzen sich mit derselben Formel als Diffeomorphismus auf eine Umgebung von $W_1 = W_2$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ fort, z.B. auf

$$W := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathcal{O} \mid -1 < x^{n+1} < f(x^1, \dots, x^n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

so dass die Bedingung (3R) erfüllt ist. Der Rand von M besteht aus den beiden Komponenten $\{x^{n+1} = 0\}$ und $\{x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)\}$.
Es ist wichtig dass $\mathcal{O}$ offen ist, damit die Menge $W_1 = W_2 \subset \mathbb{H}^{n+1}$ offen ist. In Randpunkten von $\mathcal{O}$ wären die Abbildungen h_i keine Karten. Dies macht man sich zum Beispiel anhand der Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1$ klar.

2. **a)** Das Bild von h ist die Teilmenge $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \ge 0, z \in \mathbb{R}\}$.

b) Die Ableitung von h im Punkt (r, ϑ, φ) hat die Matrix

$$Dh(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix},$$

und die Bilder der Standardvektorfelder $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ sind die Spalten dieser Matrix. Also gilt

$$\begin{aligned}
h_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) &= \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial z}\\
h_*\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) &= r\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial z}\\
h_*\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) &= -r\sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $h_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ sind bis auf Division durch r die Komponenten von h, also gilt

$$h_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

und dieses Vektorfeld setzt sich glatt auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fort. Schreibt man auch bei den anderen beiden Vektorfeldern die Komponenten als Funktionen von x, y und z, so erhält man

$$h_*\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) = \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}$$

und

$$h_*\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dabei setzt sich $h_*\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)$ auf das Komplement der z-Achse $\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ fort, während $h_*\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ sich auf ganz $\mathbb{R}^3$ fortsetzt.

c) Dieser Teil wurde oben bereits diskutiert.

d) Um die Standardvektorfelder in den Polarkoordinaten auszudrücken, muss man die Matrix der Ableitung Dh invertieren. Wir erhalten

$$(Dh(r,\vartheta,\varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\vartheta \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} & 0 \end{pmatrix},$$

so dass wir folgende Lösung erhalten:

$$\begin{aligned}
h_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\\
h_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\\
h_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta}.
\end{aligned}$$

3. **a)** Ist $x \in M \setminus \partial M$, so gibt es eine offene Umgebung im $\mathbb{R}^n$, die das Bild einer Karte für M ist, so dass x ein innerer Punkt von M ist. Also gilt $\mathrm{Fr}(M) \subset \partial M$.
Ist umgekehrt $x \in \partial M$, so ist es in einer geeigneten Karte $h : W \to \mathbb{R}^n$ das Bild eines Punktes in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \partial \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$. Somit enthält jede Umgebung sowohl Punkte von M (Bilder unter h von Punkten in W mit $x^n > 0$) als auch Punkte von $\mathbb{R}^n \setminus M$ (Bilder unter h von Punkten in W mit $x^n < 0$). Also gilt $x \in \mathrm{Fr}(M)$. Insgesamt folgt also die Behauptung.

b) Nach Bedingung (2) in Satz 1 hat jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U' \in \mathbb{R}^n$, so dass ein Diffeomorphismus $\Phi : U' \to V \subset \mathbb{R}^n$ existiert, welcher $U' \cap M$ auf $V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ abbildet. Wegen $\overline{V \setminus (\mathbb{R}^k \times \{0\})} = \overline{V}$ folgt hieraus $\overline{U' \setminus M} = \overline{U'}$. Also folgt $\overline{\mathbb{R}^n \setminus M} = \mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Fr}(M) = M$ gilt. Andererseits folgt aus der Kompaktheit von M dass $M = \overline{M}$.

c) Beispiel: Die Teilmenge $M = [0,1] \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand, aber $\mathrm{Fr}(M)$ ist größer als ∂M, denn der topologische Rand enthält auch die Punkte in $[0,1] \times \{0,1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Die Motivation für die Voraussetzung der Kompaktheit von M lag darin, eine intrinsische Bedingung an M zu formulieren. Natürlich hätte man auch verlangen können, dass M eine Untermannigfaltigkeit mit Rand und eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, um die Aussagen **a)** und **b)** zu beweisen.