Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 4

1. **a)** Der Beweis ist eine direkte Kopie des Beweises im eindimensionalen Fall: Da $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ stetig und B kompakt ist, finden wir Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$ mit

$$m = \min\{f(x) \mid x \in B\} \quad \text{und } M = \max\{f(x) \mid x \in B\}.$$

Dann gilt aber

$$m = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B m\, dx \le \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B f(x)\, dx \le \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B M\, dx \ = M.$$

Da B zusammenhängend ist, muss $f(B) = [m, M]$ gelten, und somit gibt es einen Punkt $p \in B$, welcher die Behauptung erfüllt.

b) Der Beweis benutzt nur, dass

(i) B kompakt ist (damit das Minimum m und das Maximum M auf B angenommen werden, und außerdem B endliches Volumen hat),

(ii) B Jordan-messbar ist und positives Volumen hat (damit die rechte Seite des Ausdrucks definiert ist; die Positivitätsannahme kann man durch Multiplikation beider Seiten mit $\mathrm{vol}(B)$ vermeiden), und

(iii) B zusammenhängend ist (damit der Punkt $p \in B$ existiert).

Die Aussage gilt also für jede Teilmenge $B \subset \mathcal{O}$ mit diesen drei Eigenschaften.

2. Gilt $\Delta u = \Delta v$, so ist $u - v$ harmonisch. Nach Voraussetzung ist $u - v$ auf dem Rand des Balls nicht positiv. Wäre $u(x) > v(x)$ für ein $x \in B^2(0, r)$, so wäre das Maximum von $u - v$ auf $\overline{B^2(0, r)}$ positiv, würde also im Inneren von $B^2(0, r)$ angenommen. Dies steht im Widerspruch zum Maximumsprinzip.

3. **a)** Wir betrachten das Katenoid K_a als Urbild von 0 unter der Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 \cosh^2(\frac{z}{a}),$$

und berechnen

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2a\cosh(\frac{z}{a})\sinh(\frac{z}{a}) \end{pmatrix}.$$

Da $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \geq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, erfüllen alle Punkte $(x,y,z) \in K_a$ die Bedingung $x^2+y^2 \geq a^2 > 0$, so dass x und y nicht gleichzeitig verschwinden können. Also ist DF in allen Punkten von K_a regulär, und somit ist K_a nach dem allgemeinen Kriterium (1) von Satz 1 eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 in $\mathbb{R}^3$.

b) Eine einfache Rechnung zeigt, dass $h(\mathbb{R}^2) \subset K_a$. Ist umgekehrt $(x,y,z) \in K_a$, so liegt der Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ auf dem Kreis um 0 vom Radius $r = a\cosh(\frac{z}{a})$. Jeder solche Punkt ist von der Form $(r\cos(w_2), r\sin(w_2))$ für einen geeigneten Winkel $w_2 \in \mathbb{R}$. Diese Überlegungen zeigen, dass $h(\mathbb{R}^2) = K_a$. Als nächstes berechnen wir die Ableitung

$$Dh(w_1,w_2) = \begin{pmatrix} \sinh(\frac{w_1}{a})\cos(w_2) & -a\cosh(\frac{w_1}{a})\sin(w_2) \\ \sinh(\frac{w_1}{a})\sin(w_2) & a\cosh(\frac{w_1}{a})\cos(w_2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass die zweite Spalte wegen $\cosh(t) \geq 1$ niemals verschwindet, so dass Dh überall vollen Rang (d.h. Rang 2) hat.

Da h bezüglich w_2 die Periode 2π besitzt, muss man für die Karten zwei Intervalle (a_1,b_1) und (a_2,b_2) für w_2 so auswählen, dass $b_i - a_i \leq 2\pi$ (damit die Einschränkung von h auf $W_i = \mathbb{R} \times (a_i,b_i)$ injektiv wird) und andererseits z.B. $[0,2\pi) \subset (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2)$ gilt[1] (damit die Karten insgesamt K_a überdecken). Wir können also zum Beispiel

$$W_1 = \mathbb{R} \times (-\pi,\pi) \quad \text{und} \quad W_2 = \mathbb{R} \times (0,2\pi)$$

wählen.
Um schliesslich einzusehen, dass h die beiden offenen Mengen W_1 und W_2 homöomorph auf ihr jeweiliges Bild abbildet, kann man entweder explizite Umkehrabbildungen angeben (was etwas umständlich ist), oder bemerken, dass die Fortsetzung $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$H(w_1,w_2,w_3) = \begin{pmatrix} (a\cosh(\frac{w_1}{a}) + w_3)\cos(w_2) \\ (a\cosh(\frac{w_1}{a}) + w_3)\sin(w_2) \\ w_1 \end{pmatrix}$$

Umgebungen $V_i = W_i \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ von $W_i \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ diffeomorph auf offene Umgebungen U_i von $h(W_i) \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $U_i \cap K_a = h(W_i)$ abbildet, woraus ebenfalls die Behauptung folgt.

[1] Die genaue Bedingung an die Intervalle lautet: Für jedes $t \in [0,2\pi)$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ so dass $t + 2k\pi \in (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2)$, was etwas schwächer ist.

4. Zunächst bemerken wir noch einmal, dass die Tangentialvektoren $(x, v) \in T_x S^2$ an die Sphäre im Punkt x tatsächlich durch die Eigenschaft $\langle x, v\rangle = 0$ charakterisiert sind, denn $T_x S^2 = \ker D\varrho(x)$ (wobei $\varrho(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ das Quadrat der Radiusfunktion auf $\mathbb{R}^3$ ist), und es gilt

$$D\varrho(x) = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 2x^3 \end{pmatrix}$$

und somit $D\varrho(x)(v) = 2\langle x, v\rangle$. Also ist $v \in \ker D\varrho(x)$ genau dann, wenn $\langle x, v\rangle = 0$.

Wir betrachten nun die Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$G(x, v) := \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle \\ \langle x, v\rangle \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung dieser Abbildung hat die Matrix

$$DG(x, v) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ v & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 2x^3 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & v^2 & v^3 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}.$$

In allen Punkten $(x, v) \in TS^2 = G^{-1}(1, 0)$ hat diese Matrix vollen Rang, so dass wieder nach dem Kriterium (1) von Satz 1 die Teilmenge $TS^2 \subset \mathbb{R}^6$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 4 ist.

5. Wir betrachten die Abbildung $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, gegeben durch $F(z, w) = w^n - f(z)$, und stellen fest, dass diese komplex differenzierbar ist, mit komplexer Ableitung[2] $D_{\mathbb{C}}F(z, w) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ von der Form

$$D_{\mathbb{C}}F(z, w) = \begin{pmatrix} -f'(z) & nw^{n-1} \end{pmatrix}.$$

In den Nullstellen $(z, w) \in \Sigma = F^{-1}(0)$ gilt entweder $w \neq 0$, oder z ist eine Nullstelle von f. Da f nur einfache Nullstellen besitzt, ist in letzteren Punkten $f'(z) \neq 0$. In beiden Fällen hat also $D_{\mathbb{C}}F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ vollen Rang über $\mathbb{C}$. Interpretiert man nun F als Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, so wissen wir aus der Analysis II (oder rechnen einfach nach), dass die reelle Ableitung $D_{\mathbb{R}}F(z, w) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ die Form

$$D_{\mathbb{R}}F(z, w) = \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei $-f'(z) = a + b\mathbf{i}$ und $nw^{n-1} = c + d\mathbf{i}$ die Einträge der komplexen Ableitung sind. Da nach obiger Überlegung eine dieser komplexen Zahlen von Null verschieden ist, hat der entsprechende 2x2-Minor nicht verschwindende Determinante ($a^2 + b^2$ bzw. $c^2 + d^2$), und somit hat auch $D_{\mathbb{R}}F$ in allen Punkten von Σ vollen Rang. Die Behauptung folgt nun wieder aus Satz 1, Kriterium (1).

[2] Die hier verwendete Notation $D_{\mathbb{C}}F$ und $D_{\mathbb{R}}F$ ist *nicht* allgemein üblich, sie wurde nur hier zur Verdeutlichung verwendet.