Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 3

1. Mögliche Lösungen sind:

a) $\alpha_1(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xyz$.

b) $\alpha_2 = -xdz - (xz^2 + e^x)\, dy$.

Jede andere Lösung ergibt sich in **a)** durch Addition einer Konstanten und in **b)** durch Addition des Differentials df einer geeigneten Funktion.
Wenn man in Teil **b)** die Integration aus dem Beweis des Poincaréschen Lemmas anwendet, so führt der Term $e^x\, dx \wedge dy$ auf die kompliziertere Lösung

$$\begin{aligned} P(e^x\, dx \wedge dy) &= \left(\int_0^1 te^{tx}\, dt \right) (x\, dy - y\, dx) \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2} y\, dx & \text{falls } x = 0 \\ \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x - 1}{x^2} \right)(x\, dy - y\, dx) & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und man muss separat diskutieren, warum diese Lösung glatt auf ganz $\mathbb{R}^3$ ist. Das kann man zum Beispiel damit begründen, dass das Integral nach den Regeln aus Analysis II beliebig oft nach dem Parameter x abgeleitet werden kann, also in der Tat eine glatte Funktion von x definiert. Alternativ argumentiert man induktiv mit der L'Hospitalschen Regel.

2. **a)** Für die Parametrisierung $\gamma : [-1,1] \to C$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, erhalten wir $\gamma^* dx = dt$ und $\gamma^* dy = 2t\, dt$, so dass $\gamma^*((x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy) = (t^2 - 2t^3 + 2t(t^4 - 2t^3))\, dt$ folgt. Es ergibt sich

$$\int_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy = \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3 + 2t(t^4 - 2t^3))\, dt = -\frac{14}{15}.$$

b) Mit der Parametrisierung $\gamma : [0,1] \to C$, $\gamma(t) = (\pi t, \pi(1-t))$ erhalten wir

$$\int_\gamma \sin(y)\, dx + \sin(x)\, dy = \int_0^1 \pi \sin(\pi(1-t)) - \pi \sin(\pi t)\, dt = 0,$$

da für alle $t \in \mathbb{R}$ wegen der Symmetrie $\sin(\pi t) = \sin(\pi(1-t))$ der Sinusfunktion der Integrand verschwindet.

c) Wir parametrisieren $C_\pm$ durch $\gamma_\pm : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_\pm(t) = (\cos(\pi t), \pm\sin(\pi t))$, und erhalten

$$\int_{C_\pm} \frac{1}{x^2+y^2}(x\,dy - y\,dx) = \pm\pi.$$

3. **a)** Ist $\Gamma : [0,1]^2 \to \mathcal{O}$ die Homotopie zwischen den beiden Kurven, so gilt wegen $d\alpha = 0$

$$0 = \int_\Gamma d\alpha = \int_{\partial\Gamma} \alpha = \int_{\gamma_0} \alpha - \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{c_1} \alpha - \int_{c_0} \alpha,$$

wobei $c_0(t) = x_0$ und $c_1(t) = x_1$ jeweils konstante Abbildungen sind. Darum verschwinden auch die beiden letzten Integrale, und wir erhalten die Behauptung.

b) Nach Aufgabe **2. c)** sind die Integrale einer auf $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definierten und geschlossenen (vgl. Blatt 2) 1-Form über $C_\pm$ verschieden, so dass die beiden Kurven nach Teil **a)** in $\mathcal{O}$ nicht homotop relativ zu ihren Endpunkten sein können.

4. **a)** $f([0,1]^2) = S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Man rechnet leicht nach, dass jeder Punkt im Bild von f wirklich Norm 1 hat, also in der Sphäre liegt. Für die umgekehrte Inklusion überlegt man sich folgendes: Die Funktion $t \mapsto \cos(\pi t)$ bildet das Intervall $[0,1]$ bijektiv auf das Intervall $[-1,1]$ ab. Also gibt es zu jedem Punkt $p = (x,y,z) \in S^2$ ein eindeutiges $t_p \in [0,1]$ mit $z = \cos(\pi t_p)$. Ist $p = (0,0,\pm 1)$, so ist es das Bild von $(s,0)$ bzw. von $(s,1)$ für jedes $s \in [0,1]$. Ist $-1 < z < 1$, so definieren wir

$$a := \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{und} \quad b := \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist dann äquivalent zu $a^2 + b^2 = 1$, d.h. es gibt ein eindeutiges $s_p \in [0,1)$ mit $a = \cos(2\pi s_p)$, $b = \sin(2\pi s_p)$. Nach Konstruktion haben wir dann $f(s_p, t_p) = p$.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die ganze Sphäre im Bild von f liegt.

b) Für die vier Teile des Randes von f gilt

$$f \circ I^1_{(1,0)}(x) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ 0 \\ \cos(\pi x) \end{pmatrix} \qquad f \circ I^1_{(1,1)}(x) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ 0 \\ \cos(\pi x) \end{pmatrix}$$

$$f \circ I^1_{(2,0)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f \circ I^1_{(2,1)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir $\partial f = c_+ - c_-$, wobei $c_\pm : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ die konstanten Abbildungen $c_\pm(x) = (0,0,\pm 1)$ sind.

c) $d\omega = 0$.

d) Man berechnet
$$f^*\omega = -2\pi^2 \sin(\pi t)\, ds \wedge dt.$$
Hier ist es wichtig, dass man die zurückgezogene Form $f^*\omega$ als Vielfaches von $ds \wedge dt$ schreibt (und nicht etwa von $dt \wedge ds$), bevor man zum Riemann-Integral übergeht. Als Ergebnis erhält man also
$$\int_f \omega = \int_0^1 \int_0^1 -2\pi^2 \sin(\pi t)\, ds\, dt = -4\pi.$$

e) Nein, denn $\partial f \neq 0$. (Man kann auch mit dem Satz von Stokes und den Teilaufgaben **c)** und **d)** argumentieren.)

f) Nein, denn sonst hätten wir
$$\int_f \omega = \int_f d\alpha = \int_{\partial f} \alpha = 0,$$
da ∂f eine Summe aus konstanten 1-Würfeln ist, über die jedes Integral einer 1-Form verschwindet. Dies steht im Widerspruch zu **d)**.