Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

# Höhere Analysis

## Lösungsskizzen 2

**1. a)**

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) dx\wedge dy \\ &= \frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\wedge dy = 0, \quad \text{und} \\ d\alpha_2 &= dx\wedge dx + dy\wedge dy = 0. \end{aligned}$$

**b)** $f^*(\alpha_1) = d\varphi, \quad f^*(\alpha_2) = r\,dr$

Man beachte, dass $\alpha_2\wedge\alpha_1 = dx\wedge dy$ und $f^*(\alpha_2)\wedge f^*(\alpha_1) = r\,dr\wedge d\varphi$, konsistent mit der Transformationsregel für Integrale in diesem Beispiel.

**2. a)** Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ und $J = (j_1 < \cdots < j_k)$ die Beziehung

$$dx^I(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad I = J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Ist also $j \notin I$, so gilt für eine beliebiges (k-1)-Tupel $L = (l_1 < \cdots < l_{k-1})$

$$dx^I(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{l_{k-1}}}) = 0,$$

denn der Multiindex $(j, l_1, \dots, l_{k-1})$ ist keine Umordnung von $I$. Ist andererseits $j \in I$, so gilt für $L = (l_1 < \cdots < l_{k-1})$

$$dx^I(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{l_{k-1}}}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } I\setminus\{j\} \neq L \\ (-1)^{s-1} & \text{falls } j = i_s \text{ und } L = (i_1,\dots,\widehat{i_s},\dots,i_k), \end{cases}$$

wobei $(-1)^{s-1}$ gerade das Signum der Permutation ist, welche $(i_s, i_1, \dots, \widehat{i_s}, \dots, i_k)$ wieder in die Reihenfolge $(i_1,\dots,i_k)$ bringt. Da eine $(k-1)$-Form durch ihre Werte auf den Tupeln $\frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{l_{k-1}}}$ für beliebige $L = (l_1 < \cdots < l_{k-1})$ charakterisiert ist, folgt die Behauptung.

**b)** Wegen der Multilinearität genügt es, die Behauptung für $V = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\omega = dx^I$ und $\eta = dx^L$ mit $|I| = k$ zu beweisen. In diesem Fall gilt aber nach Teil **a)**

$$i_V(\omega \wedge \eta) = \begin{cases} (-1)^{s-1} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_s}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^L & \text{falls } j = i_s \text{ und } I \cap L = \varnothing \\ (-1)^{k+t-1} dx^I \wedge dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{l_t}} \wedge \cdots \wedge dx^{l_m} & \text{falls } j = l_t \text{ und } I \cap L = \varnothing \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bedingung $I \cap L = \varnothing$ ist nötig, damit $\omega \wedge \eta \neq 0$ gilt.
Andererseits gilt

$$(i_V\omega) \wedge \eta = \begin{cases} (-1)^{s-1} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_s}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^L & \text{falls } j = i_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$(-1)^k \omega \wedge i_V\eta = \begin{cases} (-1)^{k+t-1} dx^I \wedge dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{l_t}} \wedge \cdots \wedge dx^{l_m} & \text{falls } j = l_t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit die angegebenen Formen von Null verschieden sind, muss also im ersten Fall $(I \setminus \{j\}) \cap L = \varnothing$ und im zweiten Fall $I \cap (L \setminus \{j\}) = \varnothing$ gelten. Um die Behauptung zu beweisen, müssen wir also noch den Fall $I \cap L = \{j\}$ betrachten, in dem die linke Seite der Gleichung verschwindet (weil $\omega \wedge \eta = 0$), während beide Terme auf der rechten Seite nichttrivial sind. Man prüft nun aber nach, dass diese sich genau um ein Vorzeichen unterscheiden, so dass ihre Summe verschwindet und die Behauptung auch in diesem Fall folgt.

**c)** Aus Teil **a)** folgt

$$\begin{aligned} d(i_V dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) &= d\left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} V^s \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^s} \wedge \cdots \wedge dx^n\right) \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \frac{\partial V^s}{\partial x^s} \, dx^s \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^s} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial V^s}{\partial x^s}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt benutzt wird, dass alle anderen Beiträge zu $dV^s$ nichts beitragen, weil die zugehörigen Differentiale $dx^j$ für $j \neq s$ bereits unter den schon vorhandenen $dx^i$ auftauchen. Die Behauptung folgt nun direkt aus der Definition.

**d)**

$$\begin{aligned}
& d(i_{hV} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\
= \;& d(h \cdot i_V dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\
= \;& h \cdot d(i_V dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) + dh \wedge i_V dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\
= \;& h \cdot \operatorname{div}(V) \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n + \sum_{s=1}^n \frac{\partial h}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial V^s}{\partial x^s} \cdot (-1)^{s-1} \, dx^s \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^s} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
= \;& (h \cdot \operatorname{div}(V) + dh(V)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,
\end{aligned}$$

was zur ersten Behauptung äquivalent ist. Die zweite Behauptung ergibt sich durch Einsetzen direkt aus **c)**.

**e)** Für $n \geq 2$ bemerken wir zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x^s} \|x\|^n = n \|x\|^{n-2} \cdot x^s,$$

so dass[1]

$$\operatorname{div}\Big(\frac{x^s}{\|x\|^n} \frac{\partial}{\partial x^s}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^s} \left( \frac{x^s}{\|x\|^n} \right) = \frac{\|x\|^n - n\|x\|^{n-2} \cdot (x^s)^2}{\|x\|^{2n}},$$

woraus durch Summation über $s$ sofort $\operatorname{div}(V) = 0$ folgt.
Im Fall $n = 1$ haben wir $V = \pm \frac{\partial}{\partial x}$ auf $\mathbb{R}_\pm$, womit sich $i_V dx = \pm 1$ und somit ebenfalls $\operatorname{div}(V) = 0$ ergibt.

**3. a)** Aus **2. a)** folgt sofort

$$\begin{aligned}
& i_{\operatorname{rot}(V)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
= \;& \left( \frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 - \left( \frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2,
\end{aligned}$$

und andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}
d\beta_V &= d(V^1 dx^1 + V^2 dx^2 + V^3 dx^3) \\
&= -\frac{\partial V^1}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial V^1}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad + \frac{\partial V^2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \frac{\partial V^3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial V^3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3,
\end{aligned}$$

und durch Zusammenfassen und Koeffizientenvergleich erhält man die Behauptung.

[1] in $(x^s)^2$ ist das $s$ ein Index, die 2 ein Exponent

**b)** Sei $\beta_V$ die 1-Form zum Vektorfeld $V$ wie in Teil **a)**. Dann gilt

$$d\left(i_{\mathrm{rot}(V)}(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)\right) = d(d\beta_V) = 0,$$

und somit folgt aus der Definition der Divergenz $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(V)) = 0$.

**c)** Die erste Gleichung folgt aus der Kommutativität der zweiten partiellen Ableitungen für glatte Funktionen, die zweite aus einer sorgfältigen Rechnung direkt aus den Definitionen: Einerseits gilt $\beta_{h\cdot V} = h \cdot \beta_V$ und somit

$$d\beta_{h\cdot V} = hd\beta_V + dh \wedge \beta_V,$$

wobei

$$\begin{aligned} dh \wedge \beta_V &= \left(\sum_s \frac{\partial h}{\partial x^s}\, dx^s\right) \wedge \left(\sum_t V^t\, dx^t\right) \\ &= \sum_{s<t} \left(\frac{\partial h}{\partial x^s} V^t - \frac{\partial h}{\partial x^t} V^s\right) dx^s \wedge dx^t. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} (\mathrm{grad}\, h) \times V &= \left(\frac{\partial h}{\partial x^1} \cdot V^2 - \frac{\partial h}{\partial x^2} \cdot V^1\right) \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &\quad - \left(\frac{\partial h}{\partial x^1} \cdot V^3 - \frac{\partial h}{\partial x^3} \cdot V^1\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial h}{\partial x^2} \cdot V^3 - \frac{\partial h}{\partial x^3} \cdot V^2\right) \frac{\partial}{\partial x^1}, \end{aligned}$$

woraus sich

$$i_{\mathrm{grad}\, h \times V} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dh \wedge \beta_V$$

ergibt. Mit der obigen Rechnung und **a)** folgt nun die Behauptung.

**d)** Ist $\mathrm{rot}(V) = 0$, so folgt aus **a)** auch $d\beta_V = 0$. Mit dem Poincaréschen Lemma schliessen wir nun $\beta_V = df$ für ein geeignetes $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Durch Koeffizientenvergleich sieht man aber, dass in diesem Fall $V = \mathrm{grad}\, f$ gilt.

**e)** Ist $\mathrm{div}(V) = 0$, so ist die 2-Form $\omega = i_V(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ geschlossen. Wieder mit dem Poincaré-Lemma erhält man eine 1-Form $\alpha = \alpha_1\, dx^1 + \alpha_2\, dx^2 + \alpha_3\, dx^3$ mit $d\alpha = \omega$. Definiert man nun

$$W := \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

so gilt $\alpha = \beta_W$ im Sinne von **a)** und somit wegen $d\alpha = i_V(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ auch $\mathrm{rot}(W) = V$. Hier benutzt man, dass die Zuordnung $V \to i_V dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ injektiv ist. Insbesondere ist also die Rotation durch die Gleichung in **a)** eindeutig bestimmt.