Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

# Höhere Analysis

## Lösungsskizzen 12

**1.** Gesucht ist das Quadrat des Abstandes der Funktion $x^3$ zum Unterraum $E \subset L^2([-1,1])$, welcher von den Funktionen $1$,$x$ und $x^2$ aufgespannt wird. Dies lässt sich mit Hilfe der Projektion $\mathrm{pr}_E : L^2 \to E$ schreiben als

$$d = \|x^3 - \mathrm{pr}_E(x^3)\|_2^2$$

Da $x^3$ ungerade ist, ist es orthogonal zu den geraden Funktionen 1 und $x^2$ (dies kann man natürlich auch direkt nachrechnen). Also gilt (vgl. den Beweis des Satzes über die orthogonale Projektion im Hilbert-Raum)

$$\mathrm{pr}_E(x^3) = \frac{(x^3, x)_{L^2}}{(x,x)_{L^2}} \cdot x,$$

das heisst

$$\mathrm{pr}_E(x^3) = \frac{\int_{-1}^1 x^4\,dx}{\int_{-1}^1 x^2\,dx} \cdot x = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} \cdot x = \frac{3}{5}x.$$

Es folgt

$$d = \int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5}x)^2\,dx = \int_{-1}^1 x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2\,dx = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175}.$$

**2.** **a)** Die Abbildung $P$ ist differenzierbar, und es gilt $DP_{f_0}(g) = 4f_0^3 \cdot g$ für jedes $f_0 \in C([0,1])$ (wie man leicht vermutet). Für den Beweis bemerken wir zunächst, dass diese Abbildung in der Tat stetig ist, denn es gilt

$$\|4f_0^3 \cdot g\|_\infty \le 4\|f_0\|_\infty^3 \cdot \|g\|_\infty,$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass die Supremumsnorm des Produkts zweier Funktionen nicht größer ist als das Produkt der Supremumsnormen. Somit ist die Operatornorm der Abbildung $g \mapsto 4f_0^3 \cdot g$ nach oben durch $4\|f_0\|^3$ beschränkt. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
0 \le \|P(f) - P(f_0) - 4f_0^3(f - f_0)\|_\infty &= \|f^4 - f_0^4 - 4f_0^3(f-f_0)\|_\infty \\
= \|(f-f_0)(f^3 + f^2 f_0 + f f_0^2 - 3f_0^3)\|_\infty &= \|(f-f_0)^2(f^2 + 2ff_0 + 3f_0^2)\|_\infty \\
\le \|f - f_0\|_\infty^2 \|f^2 + 2ff_0 + 3f_0^2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$0 \leq \frac{\|P(f) - P(f_0) - 4f_0^3(f-f_0)\|_\infty}{\|f-f_0\|_\infty} \leq \|f-f_0\|_\infty \|f^2+2ff_0+3f_0^2\|_\infty \overset{f\to f_0}{\longrightarrow} 0,$$

und somit ist die Behauptung bewiesen.

**b)** Für diese Abbildung kann man vermuten, dass $DQ_{f_0}(g) = 2(g, f_0)_{L^2}$ gilt. Um zu beweisen, das die angegebene Vermutung wirklich die Ableitung von $Q$ beschreibt, genügt folgende einfache Rechnung (wir schreiben $(\,.\,,\,.\,)$ für das $L^2$-Skalarprodukt):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|Q(f) - Q(f_0) - 2(f-f_0, f_0)|}{\|f-f_0\|_2} \\ &= \frac{|(f,f) - (f_0,f_0) - 2(f-f_0,f_0)|}{\|f-f_0\|_2} = \frac{\|f-f_0\|_2^2}{\|f-f_0\|_2} = \|f-f_0\|_2 \overset{f\to f_0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

**3. a)** Ist $f \in C_c(\mathbb{R})$, so ist $f$ gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,\delta > 0 : \; |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Da man $\delta$ falls nötig verkleinern kann, ist dies gleichbedeutend mit

$$\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,0 < \delta < 1\,\forall\,|h| < \delta : \; \|T_h f - f\|_\infty < \epsilon.$$

Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so dass der Träger von $f$ in $[a+1, b-1]$ enthalten ist, so enthält $[a,b]$ den Träger von $T_h f - f$ für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$. Zusammen mit der obigen Abschätzung folgt daraus

$$\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\,|h| < \delta : \|T_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq (b-a)\epsilon$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit der behaupteten Konvergenz.

**b)** Wir betrachten nun $g \in L^1(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$. Da $C_c(\mathbb{R})$ dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, finden wir $f \in C_c(\mathbb{R})$ mit $\|g-f\|_1 < \epsilon$. Da aber $T_h$ eine Isometrie von $L^1(\mathbb{R})$ ist, folgt hieraus auch $\|T_h g - T_h f\|_1 < \epsilon$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass wie in Teil **a)** die Ungleichung $\|T_h f - f\|_1 < \epsilon$ für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ gilt, so erhalten wir für diese $h \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\|T_h g - g\|_1 \leq \|T_h g - T_h f\|_1 + \|T_h f - f\|_1 + \|f - g\|_1 < 3\epsilon.$$

Da dies für jedes $\epsilon > 0$ funktioniert, ist die Konvergenz gezeigt.

**4. a)** Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, so gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ und fast alle $t \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|g(x-t)| \leq \|g\|_\infty < \infty$. Daraus folgt aber

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\,dt \leq \|g\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt = \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1.$$

Also ist die Funktion $f(t)g(x-t)$ absolut integrierbar, so dass das Integral von $f(t)g(x-t)$ selbst ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und offenbar durch $\|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$ uniform beschränkt ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt - \int_{\mathbb{R}} f(y-t)g(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t) - (T_{y-x}f)(x-t)g(t)|\,dt \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(t) - T_{y-x}f(t)|\,dt \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \|f - T_{y-x}f\|_1 \xrightarrow{y \to x} 0, \end{aligned}$$

wobei wir das Ergebnis der Aufgabe **3. b)** benutzt haben. Damit ist auch die Stetigkeit von $f * g$ gezeigt.

**b)** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $0 < \ell(E) < \infty$ annehmen, so dass nach Teilaufgabe **a)** die Faltung $\chi_E * \chi_{-E}$ definiert ist. Es gilt

$$\chi_E * \chi_{-E}(0) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(t)\chi_{-E}(-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(t)^2\,dt = \ell(E) > 0.$$

Da die Faltung $\chi_E * \chi_{-E}$ nach Teilaufgabe **a)** stetig ist, gilt also $\chi_E * \chi_{-E} > 0$ in einer ganzen Umgebung $U$ von $0 \in \mathbb{R}$.
Ein Punkt $z \in \mathbb{R}$ ist aber genau dann in der Menge $E - E$ enthalten, wenn $z = x - y$ mit $x, y \in E$, d.h. falls der Integrand $h_z(t) = \chi_E(t)\chi_{-E}(z-t)$ in der oben betrachteten Faltung $\chi_E * \chi_{-E}(z)$ für mindestens ein $t \in \mathbb{R}$ (nämlich zum Beispiel für $t = x$) positiv (d.h. gleich 1) ist. Nun muss aber für jedes $z \in U$ der Integrand $h_z(t)$ in mindestens einem Punkt (genau genommen sogar auf einer messbaren Menge mit positivem Maß) positiv sein, und somit ist die ganze Umgebung $U$ in der Menge $E - E$ enthalten.