Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 11

1. Zunächst überlegen wir uns, dass $(E, \|\,.\,\|)$ ein normierter Raum ist. $\|f\|$ ist offenbar nichtnegativ, und aus $\|f\| = 0$ folgt $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)| = 0$, woraus $f = 0$ folgt. Die Dreiecksungleichung folgt aus dem Fakt, dass $(f+g)' = f' + g'$, zusammen mit der Dreiecksungleichung für die Supremums-Norm $\|\,.\,\|_\infty$. Schließlich ist die Eigenschaft $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ ebenfalls offensichtlich, so dass $\|\,.\,\|$ eine Norm ist.
Sei nun $\{f_n\}_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in E. Dann bilden sowohl die f_n als auch die Ableitungen f_n' Cauchy-Folgen in $C([0,1])$ bezüglich der Supremumsnorm, konvergieren also gleichmäßig gegen Funktionen f und g in $C([0,1])$. Es bleibt zu zeigen, dass f differenzierbar mit $f' = g$ ist. Dazu könnten wir uns auf einen Satz aus Analysis I berufen (die Ableitungen konvergieren gleichmäßig und die Funktionswerte konvergieren in mindestens einem –sogar in jedem– Punkt), wir wollen dies aber noch einmal direkt zeigen.
Zunächst bemerken wir, dass wir für jedes $x \in [0,1]$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f_m(x) = f_m(0) + \int_0^x f_m'(t)\,dt$$

schreiben können. Da wegen der gleichmäßigen Konvergenz der f_m' die Abschätzung $f_m'(t) \leq g(t) + 1$ uniform in t für hinreichend große $m \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir mit dem Satz über die dominierte Konvergenz

$$\begin{aligned} f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) &= \lim_{m\to\infty} \left(f_m(0) + \int_0^x f_m'(t)\,dt \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} f_m(0) + \lim_{m\to\infty} \int_0^x f_m'(t)\,dt \\ &= f(0) + \int_0^x g(t)\,dt. \end{aligned}$$

Hieraus sieht man wieder mit dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung, dass f stetig differenzierbar mit Ableitung g ist.

2. **a)** Gilt $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ für ein Skalarprodukt $(\,.\,,\,.\,)$, so haben wir für $x, y \in E$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\ &= (x,x) + 2(x,y) + (y,y) + (x,x) - 2(x,y) + (y,y) \\ &= 2(x,x) + 2(y,y) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Gilt umgekehrt die Parallelogrammgleichung für alle $x, y \in E$, so definieren wir

$$(x,y) := \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Dies ist offenbar symmetrisch in x und y und erfüllt $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ sowie $(x, -y) = -(x,y)$. Es bleibt zu zeigen, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt definiert, d.h. linear in beiden Variablen ist. Dazu folgern wir aus der Parallelogrammgleichung zunächst für alle $x, y_1, y_2 \in E$

$$\begin{aligned}&(x,y_1) + (x,y_2) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y_1\|^2 + \|x+y_2\|^2 - (\|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2)\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\left(\|x + \frac{y_1+y_2}{2}\|^2 + \|\frac{y_1-y_2}{2}\|^2 - \left(\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\|^2 + \|\frac{y_1-y_2}{2}\|^2\right)\right) \\ &= 2\cdot\frac{1}{4}\left(\|x + \frac{y_1+y_2}{2}\|^2 - \|x - \frac{y_1+y_2}{2}\|^2\right) \\ &= 2(x, \frac{y_1+y_2}{2}).\end{aligned}$$

Andererseits folgt direkt aus der Definition $(x, 0) = 0$, so dass mit $y = y_1$ und $y_2 = 0$ aus dieser Gleichung $(x,y) = 2(x, \frac{y}{2})$ für alle $x, y \in E$ folgt. Daraus ergibt sich nun

$$(x,y_1) + (x,y_2) = (x, y_1 + y_2),$$

woraus mit $y = y_1 = y_2$ per Induktion $(x, ny) = n(x,y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, was aber äquivalent ist (betrachte $z = ny$) zu $\frac{1}{n}(x,z) = (x, \frac{1}{n}z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt aus diesen beiden Gleichungen $(x, \frac{p}{q}y) = \frac{p}{q}(x,y)$ für alle positiven rationalen Zahlen, und mit der eingangs erwähnten Beziehung $(x,-y) = -(x,y)$ und der Stetigkeit der Norm folgt nun $(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit haben wir Linearität in der zweiten Variablen gezeigt, und Linearität in der ersten Variablen folgt nun aus der bereits bewiesenen Symmetrie.

b) In $L^p([0,1])$ betrachten wir die Funktionen $f(t) = 1$ und $g(t) = t$. Dann gilt

$$\|f\|_p = 1\,, \quad \|g\|_p = \|f-g\|_p = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f+g\|_p = \left(\frac{2^{p+1}-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Also folgt

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 - 2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2) = \left(\frac{2^{p+1}-1}{p+1}\right)^{\frac{2}{p}} - 2 - \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Nun kann man leicht nachrechnen, dass die rechte Seite nur für $p = 1$ und $p = 2$ verschwindet. Alternativ argumentiert man, dass der Grenzwert des Ausdrucks auf der rechten Seite für $p \to \infty$ gleich 1 ist, so dass zumindest für alle großen $p \in \mathbb{R}$ die Parallelogrammgleichung für diese Funktionen nicht gilt. Um ein Gegenbeispiel in $L^1([0,1])$ zu konstruieren, kann man die Funktion g durch $2g$ ersetzen.
Ähnliche Argumente funktionieren auch in $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm, oder auf endlich-dimensionalen Vektorräumen mit Maximums- oder p-Norm mit $p \neq 2$.

3. a) Für den Exponenten p erhalten wir

$$\int_0^1 |f(t)|^p \, dt = \int_0^1 \frac{1}{t \ln^{2p}(\frac{t}{2})} \, dt = \frac{1}{1-2p} \ln^{1-2p}\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\ln^{1-2p}(\frac{1}{2})}{1-2p} < \infty,$$

wobei wir benutzt haben, dass $p \geq 1 > \frac{1}{2}$. Also liegt f in $L^p((0,1))$.
Andererseits zeigt man (z.B. mit der Regel von L'Hospital), dass für $\alpha, \beta > 0$

$$\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln^\beta\left(\frac{t}{2}\right) = 0.$$

Sei nun $r > p$ gegeben. Wir setzen $\alpha = \frac{r-p}{p}$ und $\beta := 2r$, und erhalten wegen der Konvergenz ein $\delta > 0$ so dass $t^{\frac{r-p}{p}} \ln^{2r}\left(\frac{t}{2}\right) < 1$ für $t \in (0, \delta)$. Dann folgt aber

$$\int_0^1 |f(t)|^r \, dt \geq \int_0^\delta |f(t)|^r \, dt = \int_0^\delta \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t^{\frac{r-p}{p}} \ln^{2r}(\frac{t}{2})} \, dt > \int_0^\delta \frac{1}{t} \, dt = \infty.$$

Also liegt f nicht in L^r für $r > p$.

b) Um die Endlichkeit der Integrale zu untersuchen, betrachten wir jeweils die beiden Teilintegrale

$$\int_0^1 |g(t)|^r \, dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int_1^\infty |g(t)|^r \, dt.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{r}{p}}(1-\ln(t))^r} \, dt.$$

Ist $r > p$, so finden wir analog zum Teil **a)** ein $\delta > 0$ mit $t^{\frac{r-p}{p}}(1-\ln(t))^r < 1$ für $t \in (0, \delta)$, und wir erhalten wieder

$$\int_0^1 |g(t)|^r \, dt \geq \int_0^\delta |g(t)|^r \, dt > \int_0^\delta \frac{1}{t} \, dt = \infty,$$

so dass das Integral nicht konvergiert. Für $r = p > 1$ gilt

$$\int_0^1 |g(t)|^p \, dt = \int_0^1 \frac{1}{t(1-\ln(t))^p} \, dt = -\frac{1}{1-p}(1-\ln(t))^{1-p}\Big|_0^1 = \frac{1}{p-1} < \infty,$$

und somit $g \in L^p((0,1])$. Nun erhalten wir aus einem Satz aus der Vorlesung $g \in L^r((0,1])$ für $1 \leq r \leq p$. Insgesamt sehen wir also, dass $g \in L^r((0,1])$ genau dann, wenn $r \leq p$.
Für das zweite Integral stellen wir fest, dass für $r = p > 1$

$$\int_1^\infty |g(t)|^p \, dt = \int_1^\infty \frac{1}{t(1+\ln(t))^p} \, dt = \frac{1}{1-p}(1+\ln(t))^{1-p}\Big|_1^\infty = \frac{1}{p-1} < \infty.$$

Da $g(t) \leq 1$ für $t \in [1, \infty)$, folgt $|g(t)|^r \leq |g(t)|^p$ für $r \geq p$, so dass $g \in L^r([1,\infty))$ für $r \geq p$. Schließlich betrachten wir noch $r < p$. Dazu überlegen wir uns zunächst (z.B. wieder mit der Regel von L'Hospital), dass für $\alpha, \beta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha}{(1+\ln(t))^\beta} = \infty.$$

Mit $\alpha = 1 - \frac{r}{p}$ und $\beta = r$ erhalten wir also ein $T > 1$, so dass für alle $t \geq T$ die Ungleichung

$$\frac{t^\alpha}{(1+\ln(t))^\beta} \geq 1$$

erfüllt ist, so dass für $t \geq T$

$$|g(t)|^r = \frac{1}{t^{\frac{r}{p}}(1+\ln(t))^r} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^\alpha}{(1+\ln(t))^\beta} \geq \frac{1}{t}$$

gilt. Dann folgt aber

$$\int_1^\infty |g(t)|^r \, dt \geq \int_T^\infty |g(t)|^r \, dt \geq \int_T^\infty \frac{1}{t} \, dt = \infty,$$

so dass $g \notin L^r([1,\infty))$ für $r < p$. Insgesamt folgt also $g \in L^r([1,\infty))$ genau dann, wenn $r \geq p$.
Da $L^r((0,\infty))$ aber gerade aus den Funktionen besteht, deren Einschränkungen sowohl in $L^r((0,1])$ als auch in $L^r([r,\infty))$ liegen, erhalten wir aus den obigen Überlegungen die Behauptung, nämlich dass $g \in L^r((0,\infty))$ genau dann, falls $r = p$.

c) Für die Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$ gilt

$$\|f_n\|_r = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^{\frac{r}{p}}}{\ln^r(n+1)} \, dt \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n^{\frac{r}{p}}}{\ln^r(n+1)} \right)^{\frac{1}{r}} = \frac{n^{\frac{r-p}{rp}}}{\ln(n+1)}.$$

Für $1 \leq r \leq p$ gilt $\frac{r-p}{rp} \leq 0$, so dass $n^{\frac{r-p}{rp}} \leq 1$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_r \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge für $r \leq p$ in $L^r([0,1])$ gegen die Funktion $f = 0$. Ist $r > p$, so haben wir $\frac{r-p}{rp} > 0$, und somit (L'Hospital)

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_r = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{r-p}{rp}}}{\ln(n+1)} = \infty,$$

so dass die $\|f_n\|_r$ keine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bilden. Dann kann die Funktionfolge in L^r aber nicht konvergieren.