Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 10

1. Die äußere Regularität des Lebesgue-Maßes hat zur Folge, dass für eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung $U_\epsilon \subset \mathbb{R}$ von N mit $\ell(U_\epsilon) < \epsilon$ existiert. Jede offene Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist aber eine höchstens abzählbare Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen (a_i, b_i), $i \in \mathbb{N}$.
Das Bild jedes Intervalls $I = (a, b)$ unter der stetigen Abbildung f ist aber wieder zusammenhängend, also ebenfalls ein Intervall. Dieses wird begrenzt durch das Infimum und das Supremum der Einschränkung $f|_I$, welche an zwei Punkten x bzw. y in $\overline{I} = [a, b]$ angenommen werden. Hat nun f die Lipschitzkonstante L, so gilt für die Differenz $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L \cdot \ell(I)$. Für jedes $\epsilon > 0$ ist $f(U_\epsilon)$ als Vereinigung von abzählbar vielen Intervallen eine Borelmenge. Mit diesen Argumenten erhalten wir

$$\ell(f(U_\epsilon)) \leq \sum_{i \geq 1} L \cdot (b_i - a_i) < L\epsilon.$$

Insbesondere ist auch der Durchschnitt $D := \bigcap_{n \geq 1} f(U_{\frac{1}{n}})$ messbar, und hat nach einem Satz aus Kapitel 3 Lebesgue-Maß 0. Da D auch $f(N)$ enthält, ist also (wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes) auch $f(N)$ Lebesgue-messbar mit Maß 0.

2. **a)** Das Komplement von A ist eine disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle: Alle Zahlen in $[\frac{3}{10}, \frac{4}{10})$ haben $a_1 = 3$. Unter den Zahlen mit $a_1 \neq 3$ gibt es 9 Teilintervalle der Länge $\frac{1}{100}$ mit Zahlen, für die $a_2 = 3$ gilt. Fährt man so fort, sieht man, dass die Teilmenge der Zahlen, für die $a_i \neq 3$ für $i \leq k$ und $a_{k+1} = 3$ gilt, gerade aus 9^k Teilintervallen der Länge $\frac{1}{10^{k+1}}$ besteht. Da alle diese Intervalle disjunkt sind, erhalten wir

$$\ell([0, 1] \setminus A) = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 1,$$

d.h. A hat das Lebesgue-Maß 0. (Als Komplement einer abzählbaren Vereinigung von Intervallen ist A Borel-messbar, so dass die Rechnung zulässig ist.)

b) Da die Cantor-Menge C das Lebesgue-Maß 0 besitzt, können wir sie für die Berechnung des Integrals ignorieren. Das Komplement von C hat genau 2^{n-1} Teilintervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$, so dass das Integral von f über deren Vereinigung gerade $\frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ beträgt. Also erhalten wir für das Integral von f

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

3. **a)** Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ell((-\infty, x) \cap A) = \int_{-\infty}^{x} \chi_A(t)\,dt.$$

Da $0 \leq \chi_A(t) \leq 1$, ist f (schwach) monoton wachsend und für $x < y$ gilt

$$f(y) - f(x) = \int_x^y \chi_A(t)\,dt \leq \int_x^y 1\,dt = y - x,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$. Nimmt man $\ell(A) < \infty$ an (was implizit vorausgesetzt war - sonst kann man leicht Gegenbeispiele konstruieren), folgt aus einem Satz von Kapitel 3

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ell((-\infty, x) \cap A) = 0$$

und ähnlich $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell(A)$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $\alpha \in (0, \ell(A))$ das gewünschte $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = \alpha$.

b) Da $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A \cap [n, n+1]$, und $\ell(A) > 0$, existiert ein n mit $\ell(A \cap [n, n+1]) > 0$. Auf $A' = A \cap [n, n+1]$ betrachten wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Q}$. Sei $B \subset A'$ eine Teilmenge, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Dann gilt

$$A' \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (B + r) \subset [n-1, n+2].$$

Da die Vereinigung nach Konstruktion disjunkt ist, impliziert die erste Inklusion $\ell(B) > 0$, während die zweite Inklusion $\ell(B) = 0$ impliziert. Dieser Widerspruch zeigt, dass B nicht messbar sein kann.

c) Würde für alle Paare von Punkten $x, y \in A$ stets $x - y \in \mathbb{Q}$ gelten, so wäre $A \subset x + \mathbb{Q}$ für jedes $x \in A$, und müsste also Lebesgue-Maß 0 besitzen. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

d) Sei $A \subset [a,b]$. Enthält A kein Paar von Punkten mit $x-y \in \mathbb{Q}$, so betrachten wir die abzählbare Vereinigung von Mengen

$$B := \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (A+q).$$

Offenbar gilt einerseits nach Konstruktion $B \subset [a, b+1]$, andererseits ist B eine disjunkte Vereinigung von verschobenen Kopien von A, so dass $\ell(B) = \infty$ gelten müsste. Dieser Widerspruch zeigt, dass A ein Paar von Punkten x und y mit $x - y \in \mathbb{Q}$ enthalten muss.

4. Wir konstruieren eine Folge f_n, indem wir der Reihe nach die charakteristischen Funktionen der Intervalle $[0,1]$, $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$, $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ usw. betrachten, d.h. für $m \geq 1$ und $1 \leq k \leq m$ ist

$$f_{k+\frac{m(m-1)}{2}} = \chi_{[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}]}.$$

Dann nimmt $f_n(x)$ für jedes $x \in [0,1]$ unendlich oft sowohl den Wert 1 als auch den Wert 0 an, so dass die Funktionenfolge in keinem Punkt konvergiert. Andererseits gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein m mit $\frac{1}{m} < \epsilon$, so dass für $n > \frac{m(m-1)}{2}$ das Integral von f_n kleiner als ϵ ist. Also konvergieren die Integrale gegen 0.