Universität Hamburg Winter 2012/13
Janko Latschev

Höhere Analysis

Lösungsskizzen 1

1. Die drei Mengen M_i sind jeweils als Urbilder eines Punktes $p \in \mathbb{R}^k$ unter einer glatten Abbildung $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Ein solches Urbild ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-k$, falls p ein regulärer Wert der Abbildung F_i ist, d.h. falls die Ableitung DF in allen Punkten von M_i surjektiv ist (dieses Kriterium ist hinreichend aber nicht notwendig!). Der Tangentialraum in einem Punkt $x \in M_i$ ist dann gerade der Kern von $DF_i(x)$.

a) $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist die Abbildung $F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, so dass $DF_1 = (2x_1, -2x_2, -2x_3)$ nur im Punkt $(0,0,0)$ verschwindet. M_1 ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2, und

$$T_{(1,0,0)}M_1 = \operatorname{span}((0,1,0)^T, (0,0,1)^T).$$

b) $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $F_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2, (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2)^T$. Diese hat als Ableitung

$$DF_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 6x_3 \\ 2x_1 - 1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

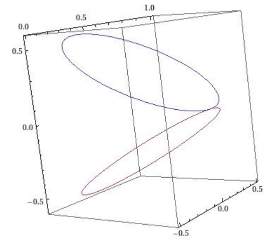
Im Punkt $(1,0,0)$ hat diese Matrix Rang 1. Das obige Kriterium versagt also. Andererseits überlegt man sich, dass M_2 der Schnitt des Ellipsoids

$$M_{2,1} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 1\}$$

und des Kreiszylinders

$$M_{2,2} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 + \frac{1}{2})^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}\}$$

ist. Das Resultat dieses Schnittes ist im folgenden Bild zu sehen. Man beachte, dass M_2 aus zwei Ellipsen zusammengesetzt ist, die sich genau im Punkt $(1,0,0)$ (tangential) berühren. Dies kann (und sollte) man natürlich auch rechnerisch nachprüfen.



Insgesamt ist M_2 also keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, denn $(1,0,0)$ hat in M_2 keine zu einem Intervall homöomorphe Umgebung.

c) $F_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_2, 3x_1 - x_3^2 - x_4^2)$, mit der Ableitung

$$DF_3 = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2x_3 & -2x_4 \end{pmatrix}.$$

Für einen Punkt in M_3 gilt wegen der zweiten Gleichung $x_1 \geq 1$, so dass die ersten beiden Spalten von DF auf ganz M_3 linear unabhängig sind. Also ist $\binom{0}{3} \in \mathbb{R}^2$ ein regulärer Wert und M_3 eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2, und es gilt

$$T_{(1,0,0,0)}M_3 = \operatorname{span}((0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T).$$

2. a) $t\dot{x} = x - te^{\frac{x}{t}}$, $x(e) = 0$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung. Mit $u = \frac{x}{t}$ erhält man

$$\dot{u} = -\frac{1}{t}e^u.$$

Nach Trennung der Variablen integriert diese Gleichung zu $e^{-u} = \ln(t) + C$, d.h. $u = -\ln(\ln(t) + C)$. Mit $u(e) = \frac{x(e)}{e} = 0$ ergibt sich $\ln(1 + C) = 0$, d.h. $C = 0$. Insgesamt folgt also $u = -\ln(\ln(t))$, so dass

$$x(t) = -t\ln(\ln(t))$$

die Lösung der Gleichung ist. Diese ist für $t > 1$ definiert.

b) $\dot{x} + 2x = x^2e^t$, $x(0) = 1$

Für die im Hinweis angegebene Funktion $z(t) = \frac{1}{x(t)}$ gilt

$$\dot{z} = -\frac{\dot{x}}{x^2} = \frac{2}{x} - e^t = 2z - e^t.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, welche man durch Variation der Konstanten löst. Das vereinfachte System $\dot{z} = 2z$ hat die Lösung $z = Ce^{2t}$, und mit dem Ansatz $z(t) = C(t)e^{2t}$ erhält man die Differentialgleichung $\dot{C} = -e^{-t}$. Also folgt $C(t) = D + e^{-t}$ für eine Konstante $D \in \mathbb{R}$, und somit $z(t) = De^{2t} + e^t$. Insgesamt ergibt sich

$$x(t) = \frac{1}{De^{2t} + e^t}.$$

Aus dem Anfangswert $x(0) = 1$ schliessen wir $D = 0$, so dass sich als Lösung letztlich

$$x(t) = e^{-t}$$

ergibt. Diese ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

c) $2x\dot{x} \cdot \sin(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} - x^2 \cos(t)$, $x(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2\sqrt{2}}$
Diese Gleichung ist wieder nicht in einer der Standardformen, allerdings kann man sie mit $y(t) = x^2 \sin(t)$ umschreiben als

$$\dot{y} = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Als Lösung ergibt sich $y(t) = \tan(t) + C$, und somit die möglichen Lösungen

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos(t)} + \frac{C}{\sin(t)}}.$$

Aus der Anfangsbedingung $x(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2\sqrt{2}}$ folgt nun $C = 1$ und

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{\cos(t)} + \frac{1}{\sin(t)}}.$$

Die Lösung ist auf dem offenen Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ definiert.

3. a) Die angegebene Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = t^2 + 1$, und somit die Eigenwerte $\pm i$. Aus der linearen Algebra (oder zumindest aus Büchern über lineare Algebra) weiss man (oder man rechnet es von Hand nach), dass die reelle Jordansche Normalform einer solchen Matrix A die Gestalt[1]

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J$$

[1] die Normalform ist hier bis auf ein Vorzeichen eindeutig, d.h. $-J$ wäre auch möglich

hat. Um eine Matrix B mit $A = B^{-1}JB$ zu finden, kann man zum Beispiel das unterbestimmte lineare Gleichungssystem $BA = JB$ lösen. Wir betrachten stattdessen die äquivalente Gleichung

$$AB^{-1} = B^{-1}J. \tag{1}$$

Multipliziert man eine Matrix mit den Spalten s_1 und s_2 von rechts mit J, so erhält man die Matrix mit den Spalten s_2 und $-s_1$. Multipliziert man dagegen von links mit A, so erhält man die Spalten As_1 und As_2. Wir sehen also, dass wir für die Lösung der Gleichung (1) die erste Spalte der Matrix B^{-1} als beliebigen Vektor $s_1 \neq 0$ wählen und dann $s_2 = As_1$ setzen können. Die Matrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt zum Beispiel diese Bedingungen, und wir erhalten

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Für das Exponential von $(t-t_0)A$ gilt

$$e^{(t-t_0)A} = B^{-1}e^{(t-t_0)J}B.$$

Außerdem hatten wir am Schluss von Analysis II gesehen, dass

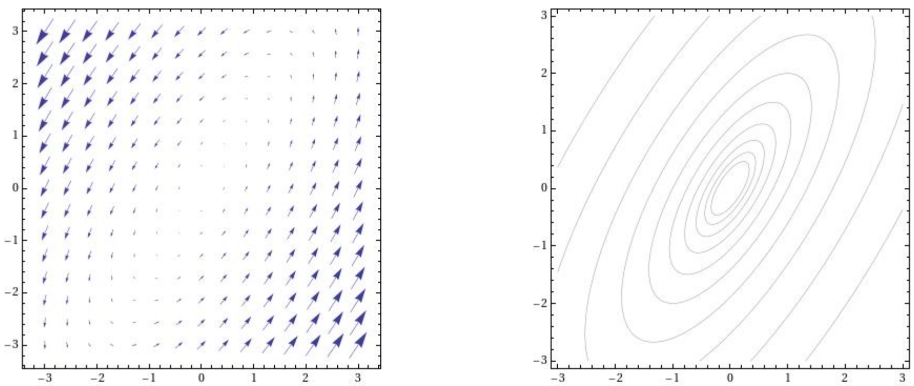
$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -(t-t_0) \\ (t-t_0) & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(t-t_0) & -\sin(t-t_0) \\ \sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{pmatrix}$$

gilt. Also erhalten wir als allgemeine Lösung in Abhängigkeit vom Anfangswert $x(t_0) = x_0 = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t-t_0) & -\sin(t-t_0) \\ \sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos(t-t_0) + \sin(t-t_0))x^1 - \sin(t-t_0)x^2 \\ 2\sin(t-t_0)x^1 + (\cos(t-t_0) - \sin(t-t_0))x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Während die Matrix B in Teil **a)** der Aufgabe nicht eindeutig bestimmt ist, sollte dieses Ergebnis aber in jedem Fall so aussehen.

Einen besseren Eindruck vom Verhalten der Lösungen erhält man durch eine Skizze:



Links das Vektorfeld Ax auf $\mathbb{R}^2$, rechts die Lösungskurven der Differentialgleichung, welche natürlich überall tangential an das Vektorfeld verlaufen.