Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Wiederholungsaufgaben

Diese Aufgaben sind als Anregung bei der Aufarbeitung des Stoffes gedacht – sie sind also **explizit nicht** in erster Linie als Vorschau auf die Klausuren gemeint. Einige der folgenden Aufgaben waren allerdings Teil der Prüfung in vergangenen Jahren. Der zweite Teil besteht aus einer Liste von Verständnisfragen, von denen fast alle bei Beherrschung des Stoffes einfach sein sollten.

1. Sei

$$A := \left\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\},$$

und sei das Vektorfeld V auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$V(x,y,z) = 3x^2 z \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - 2x)\frac{\partial}{\partial y} + z^3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\partial A} \langle V(p), N(p) \rangle \, \mu_{\partial A},$$

wobei N das äußere Normalenvektorfeld zu A entlang des Randes ∂A bezeichnet. *Hinweis: Wenn Sie Symmetrien geschickt ausnutzen, lässt sich der Rechenaufwand klein halten.*

2. Wir betrachten die Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 6, 2y^2 + z^2 = 3\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Beweisen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist!

b) Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pM und den Normalraum N_pM im Punkt $p = (2,-1,1) \in M$!

c) Zeigen Sie: Die Einschränkung $\alpha|_M$ der 1-Form

$$\alpha = 2x\,dx - 2y\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$$

auf M verschwindet, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ und jeden Tangentialvektor $v \in T_pM$ gilt $\alpha(v) = 0$.

Bitte wenden!

3. Sei $B^n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitsball in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Weisen Sie nach, dass das Integral

$$\int_{B^n(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\, dx$$

endlich ist, und bestimmen Sie für $n \in \{1,2,3\}$ seinen Wert!

4. Betrachten Sie die Fläche

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| = 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

a) Beweisen oder widerlegen Sie: S ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

b) Sei $S^+ := \{(x,y,z) \in S \mid z > 0\}$. Beweisen Sie, dass S^+ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S^+!

5. Sei $C \in \mathbb{R}$, und sei $\{g_j\}_{j \geq 1}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ der Grenzwert $f(x) = \lim_{j\to\infty} g_j(x)$ existiert.

a) Zeigen Sie: Gilt $|g_j(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $j \in \mathbb{N}$, so ist f über jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar.

b) Finden Sie hinreichende Bedingungen an die g_j, so dass $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$!

6. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge, so dass für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\ell(A \cap I) \leq \frac{1}{2}\ell(I)$$

gilt. Zeigen Sie, dass A eine Lebesgue-Nullmenge sein muss!

7. Sei $(X, \mathcal{A}, \mathbf{m})$ ein Maßraum. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass man unter den messbaren Funktionen mit Hilfe der Norm

$$\|f\|_\infty := \inf\{t \in (0,\infty) \mid \mathbf{m}(\{x \in X \mid f(x) > t\}) = 0\} \in [0,\infty]$$

einen Raum $L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ auszeichnen kann, wobei wir wie immer Funktionen, welche paarweise fast überall übereinstimmen, zu Äquivalenzklassen zusammenfassen. Beweisen Sie die in der Vorlesung gemachten Aussagen über $L^\infty(X)$:

a) $(L^\infty(X), \|\,.\,\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Siehe nächstes Blatt!

b) Ist $\mathbf{m}(X) < \infty$, so gilt $L^\infty(X) \subset L^p(X)$ für jedes $p \geq 1$.

c) Ist (X, d) ein metrischer Raum mit mindestens einem Häufungspunkt, so ist der Raum $\mathcal{C}(X)$ der beschränkten stetigen Funktionen nicht dicht in $L^\infty(X)$.

Antworten zu den Rechnungen:

1) $\frac{6^3}{5}\pi$, 3) π, 2π, π^2, 4c) $\frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1)$

Bitte wenden!

Viele der folgenden Verständnisfragen sind (zum Teil mit leichten Abwandlungen) den Übungsblättern von Herrn Lauterbach aus dem WS 2009/10 entnommen. Bei jeder Aussage ist zu entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist. (Idealerweise sollten Sie auch eine Begründung oder ein Gegenbeispiel angeben können...)
Sorgfältiges Lesen und Überlegen sind wichtig!

8. *(Differential– und Integralrechnung auf Untermannigfaltigkeiten)*

a) Die Zuordnung
$$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$
ist eine alternierende 2-Form auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

b) Jede exakte Differentialform vom Grad $k \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ ist geschlossen.

c) Jede geschlossene Differentialform vom Grad $k \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ ist exakt.

d) Jede exakte 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist geschlossen.

e) Jede geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist exakt.

f) Jede Differentialform vom Grad $k > n$ auf $\mathbb{R}^n$ verschwindet.

g) Die durch die Formel
$$\alpha := -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$
definierte 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist geschlossen.

h) Die Einschränkung der 1-Form α aus der vorherigen Teilaufgabe auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \geq 0\}$ ist exakt.

i) Der Wert des Integrals einer 1-Form auf $\mathbb{R}^n$ über eine Kurve hängt nur vom Anfangs– und Endpunkt der Kurve ab.

j) Verschwindet das Integral einer 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$ über jede geschlossene Kurve in U, so ist die Form exakt.

k) Das Bild einer stetig differenzierbaren Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

l) Das Produkt $M \times N$ zweier Untermannigfaltigkeiten $M, N \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$.

m) Der Durchschnitt $M \cap N$ zweier Untermannigfaltigkeiten $M, N \subset \mathbb{R}^n$ ist wieder eine Untermannigfaltigkeit.

Siehe nächstes Blatt!

n) Zwei Sphären unterschiedlicher Radien in $\mathbb{R}^n$ sind nicht homöomorph.

o) Sind $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ offen und gibt es einen Diffeomorphismus $F : X \to Y$, so gilt $n = m$.

p) Die Untermannigfaltigkeiten $[0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ sind nicht diffeomorph.

q) Offene Teilmengen einer Untermannigfaltigkeit sind selbst Untermannigfaltigkeiten.

r) Jeder k-dimensionale Unterraum ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

s) Für einen k-dimensionalen Unterraum ist die Gramsche Determinante eine konstante Funktion.

t) Jede Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Orientierung.

u) Jede zusammenhängende Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ hat höchstens zwei Orientierungen.

v) Der topologische Rand einer nichtleeren Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ ist nicht leer.

w) Jede beschränkte Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ hat nichtleeren topologischen Rand.

x) Man kann die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch eine Karte parametrisieren.

y) Ist V ein C^1-Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\operatorname{div}(V)$ eine reellwertige Funktion auf U.

z) Ist V ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ mit $\operatorname{div}(V) = 0$, so existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $x(t) = x_0 + ct$ das Anfangswertproblem $\dot{x} = V(x)$, $x(0) = x_0$ löst.

9. *(Maß– und Integrationstheorie)*

a) Für $X = \mathbb{Q}$ und $\mathcal{E} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\}$ gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(X)$.

b) Für $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{E} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(X)$.

c) Sind A_i, $i \in \mathbb{N}$ messbare Teilmengen in $(X, \mathcal{A}, \mathbf{m})$, so gilt

$$\mathbf{m}(\cup_{i\in\mathbb{N}} X_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{m}(\cup_{i=1}^{n} X_i).$$

d) Sind A_i, $i \in \mathbb{N}$ messbare Teilmengen in $(X, \mathcal{A}, \mathbf{m})$, so gilt

$$\mathbf{m}(\cap_{i\in\mathbb{N}} X_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{m}(\cap_{i=1}^{n} X_i).$$

Bitte wenden!

e) Jede Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist abzählbar.

f) Existiert der punktweise Grenzwert einer Folge messbarer Funktionen, so ist dieser messbar.

g) Der Abschluß einer Borelmenge ist eine Borelmenge.

h) Jede Lebesgue-Nullmenge ist eine Borelmenge.

i) Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem metrischen Raum, welche überall den Wert unendlich annimmt, ist Borel-messbar.

j) In einem Maßraum ist jede Teilmenge einer Nullmenge messbar.

k) Eine beschränkte Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(X) \subset \mathbb{N}$ ist eine einfache Funktion.

l) Sind f und g einfache Funktionen, so sind für $m, n \in \mathbb{N}$ auch $f^n \cdot g^m$ einfache Funktionen.

m) Die Menge der einfachen Funktionen auf einem Maßraum bildet einen Vektorraum.

n) Ist $\{f_n\}$ eine punktweise konvergente Folge einfacher Funktionen, so ist $f = \lim f_n$ eine einfache Funktion.

o) Ist $\{f_n\}$ eine gleichmäßig konvergente Folge einfacher Funktionen, so ist $f = \lim f_n$ eine einfache Funktion.

p) Die in der Vorlesung konstruierte nicht Lebesgue-messbare Teilmenge $A \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ ist auch als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ nicht messbar.

q) Eine monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist (Lebesgue-)fast überall stetig.

r) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$, so ist die Einschränkung auf jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ in $L^1(K)$.

s) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

t) Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ sind beschränkt.

u) Es gibt in $\mathbb{R}$ unbeschränkte, offene Teilmengen mit endlichem Lebesgue-Maß.

v) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin (0,1] \\ \alpha_n & \text{für } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \end{cases} .$$

Siehe nächstes Blatt!

(i) Mit $\alpha_n = n$ ist f eine einfache Funktion.

(ii) Für beliebige Konstanten $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ ist f (Lebesgue-)messbar.

(iii) Mit $\alpha_n = n$ ist $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(iv) Mit $\alpha_n = \sqrt{n}$ ist $f \in L^1(\mathbb{R})$.

w) Es gibt eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ welche nicht integrierbar ist, so dass f^2 integrierbar ist.

x) Es gibt eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ welche nicht integrierbar ist, so dass f^2 integrierbar ist.

y) $\mathbb{R}$ ist ein Banach-Raum.

z) $\mathbb{R}^n$ ist mit dem üblichen Skalarprodukt ein Hilbert-Raum.

α) Der Vektorraum $L^p([0,1])$ ist nicht endlich-dimensional.

β) $L^2([0,1])$ ist bezüglich $\| \, . \, \|_1$ dicht in $L^1([0,1])$.

γ) Einfache Funktionen liegen dicht in $L^1(\mathbb{R})$.

δ) Wir bezeichnen mit ℓ_n das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

(i) Ist $X_n \subset B^n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ der größte einbeschriebene Würfel (bezüglich der Standardmetrik), so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n(X_n) = \infty.$$

(ii) Ist $Y_n = B^n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitsball (bezüglich der Standardmetrik), so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n(Y_n) = \infty.$$

(iii) Ist $Z_n = B^n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitsball (bezüglich der Maximumsnorm $\| \, . \, \|_\infty$), so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n(Z_n) = \infty.$$