Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

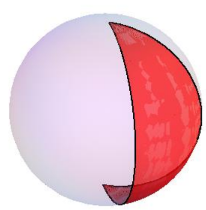
Höhere Analysis

Weihnachtsserie

Diese Aufgabenserie zählt als Bonusblatt. Wenn Sie zwei Aufgaben sinnvoll bearbeiten, kann damit ein bisheriges nichtbestandenes Blatt ausgeglichen werden.
Frohe Weihnachten! *Dieses Blatt sieht länger aus, als es ist...*

1. Auf der Standardsphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ beschreiben die Großkreise (d.h. die Schnitte von S^2 mit 2-dimensionalen linearen Unterräumen) gerade die *lokal* kürzesten Verbindungen zwischen ihren Punkten. Diese spielen also die Rolle der "Geraden" in der sphärischen Geometrie, so dass "sphärische Dreiecke" gerade Gebiete in S^2 sind, welche von drei (Teilen von) Großkreisen berandet werden.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sektors einer Sphäre, der zwischen zwei Halbkreisen liegt, in Abhängigkeit des Winkels zwischen diesen beiden Halbkreisen!



b) Ein sphärisches Dreieck kann als Durchschnitt dreier sphärischer Sektoren beschrieben werden, deren Scheitelpunkte gerade die Ecken des Dreiecks sind. Fertigen Sie eine Skizze an, und überzeugen Sie sich, dass die drei Sektoren zusammen mit ihren am Nullpunkt gespiegelten Bildern die ganze Sphäre überdecken!
Hinweis: Falls Sie Schwierigkeiten haben, dies zu zeichnen, so veranschaulichen Sie es sich zunächst mit abwaschbarer Farbe auf einem "realen" Ball!

c) Kombinieren Sie die Überlegungen in Teil **a)** und **b)** mit sorgfältigem Zählen, um eine Formel für die Fläche eines sphärischen Dreiecks in Abhängigkeit von seinen Innenwinkeln zu beweisen!

Bitte wenden!

2. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeit $M = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$, d.h.

$$M = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4.$$

a) Welche der folgenden 1-Formen sind auf M geschlossen, welche davon exakt? *Hinweis: Betrachten Sie Integrale über geeignete geschlossene Kurven!*

$$\alpha_1 = x\,dy, \quad \alpha_2 = x\,dy - \frac{1}{2}(z\,dw - w\,dz), \quad \alpha_3 = y\,dz - x\,dw, \quad \alpha_4 = x\,dz + y\,dw$$

b) Welche der Formen α_i werden exakt, wenn man sie auf das Bild $C \subset M$ der geschlossenen Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to M$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t), \sin(t))$ einschränkt?

c) Die k-te de-Rham-Kohomologie von M ist der reelle Vektorraum

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) := \frac{\ker d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)}{\operatorname{Im} d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)}.$$

Welche Dimension hat der Unterraum in $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$, welcher von den Äquivalenzklassen der geschlossenen Formen unter den α_i aufgespannt wird?

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A \subset X$ und $m \geq 0$ definieren wir

$$h_{m,\epsilon}(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_i))^m \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \operatorname{diam}(A_i) < \epsilon \right\},$$

wobei $\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in B\}$ den Durchmesser der Menge B bezeichnet, und $\operatorname{diam}(\varnothing) = 0$ gesetzt wird. Sei nun

$$h^*_m(A) := \sup_{\epsilon > 0} h_{m,\epsilon}(A).$$

a) Zeigen Sie, dass $h^*_m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X ist! Dieses nennt man das *m-dimensionale Hausdorff-Maß* von A.

b) Sei nun (X, d) der $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik, und sei $W = [0, 1]^n$ der Standardwürfel. Zeigen Sie, dass $h^*_n(W) < \infty$!

c) Zeigen Sie, dass zu jeder nichtleeren beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ genau ein $m(A) \in [0, n]$ existiert, so dass

$$h^*_m(A) = \begin{cases} \infty & \text{falls } m < m(A) \\ 0 & \text{falls } m > m(A) \end{cases}$$

gilt! Diese Zahl bezeichnet man als die *Hausdorff-Dimension* von A. *Hinweis: Argumentieren Sie, dass aus $h^*_m(A) < \infty$ für ein $m \geq 0$ folgt, dass $h^*_M(A) = 0$ für alle $M > m$, und benutzen Sie* **b)**.

d) Versuchen Sie zu beweisen, dass die Cantor-Menge $C \subset [0, 1]$ die Hausdorff-Dimension $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ besitzt!