Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 9

1. *(4 Punkte)* Sei $(X, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum. Sei $\widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(X)$ die Familie aller Teilmengen $E \subset X$, so dass Teilmengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset E \subset B$ und $m(B \setminus A) = 0$ existieren.

a) Zeigen Sie, dass $\widehat{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist!

b) Wir definieren $\widehat{m} : \widehat{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ durch

$$\widehat{m}(C) = \begin{cases} m(C) & \text{falls } C \in \mathcal{A} \\ m(A) & \text{falls } A \subset C \subset B \text{ mit } A, B \in \mathcal{A}, m(B \setminus A) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\widehat{m}$ wohldefiniert ist, und dass $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{m})$ ein vollständiger Maßraum ist!

2. *(4 Punkte)* Sei $(X, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie:

a) Durch
$$m_1(A) := \int_X f \cdot \chi_A \, dm$$
wird ein neues Maß $m_1 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert wird.

b) Für jede $\mathcal{A}$-messbare Funktion $g : X \to [0, \infty]$ gilt
$$\int_X g \, dm_1 = \int_X g \cdot f \, dm.$$

3. *(4 Punkte)* Sei $(X, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum mit $m(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass eine messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ genau dann integrierbar ist, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in X \mid f(x) \geq n\})$$

konvergiert.