Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 8

1. *(5 Punkte)* Berechnen Sie

a)

$$\int_{S^2} x^4 \, \mu_{S^2},$$

wobei (x, y, z) die Koordinaten auf $\mathbb{R}^3$ sind.

b) für $0 < r < R$ die Fläche des Torus

$$T_{r,R} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists!\, p = (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|p\|^2 = R^2 \text{ und } (x-u)^2+(y-v)^2+z^2 = r^2\},$$

orientiert als Rand des Volltorus.

2. *(2 Punkte)* Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathcal{A}_Y$ eine σ-Algebra in Y, so ist

$$\{f^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{A}_Y\}$$

eine σ-Algebra in X.

b) Ist $\mathcal{A}_X$ eine σ-Algebra in X, so ist

$$\{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X\}$$

eine σ-Algebra in Y.

3. *(5 Punkte)* Beweisen Sie:

a) Die Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ stimmt genau mit der σ-Algebra überein, welche von allen kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ erzeugt wird.

b) Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Borelmenge.

Bitte wenden!

4. *(4 Punkte)* Sei X eine überabzählbare Menge, und sei

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

b) $\mathcal{A}$ ist genau die von den einelementigen Mengen $\{x\}$ mit $x \in X$ erzeugte σ-Algebra.

c) *(Zusatz, 0 Punkte)* Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn eine Teilmenge mit höchstens abzählbarem Komplement existiert, auf welcher f konstant ist.