Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 7

1. *(3 Punkte)* Sei

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = (f(x))^2\}$$

die von der glatten Funktion $f : (a, b) \to (0, \infty)$ erzeugte Rotationsfläche. Beweisen Sie folgende Formel für ihre Fläche (ihr 2-dimensionales Volumen):

$$\mathrm{vol}(M) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

2. *(3 Punkte)* Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_M (x + y + z)\mu_M,$$

wobei M die obere Hemisphäre $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$ ist!

3. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie den Flächeninhalt des durch die Kardioide

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x\}$$

begrenzten Gebietes in $\mathbb{R}^2$

a) durch Anwendung des Satzes von Stokes auf die 1-Form $\alpha = -y\,dx$, und

b) durch Übergang zu Polarkoordinaten.

In beiden Fällen benötigen Sie eine Parametrisierung der Kurve.

4. *(4 Punkte)* Wir wollen nun noch die klassische Version des Satzes von Stokes herleiten. Dazu sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge, und V sei ein auf $\mathcal{O}$ definiertes glattes Vektorfeld. Wir betrachten eine Fläche $F \subset \mathcal{O}$ mit glattem Rand $R = \partial F$. Die Fläche F sei durch den Normalenvektor $N = N_F$ orientiert, und R sei als Rand von F orientiert.

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle \operatorname{rot} V, N_F \rangle \mu_F \quad \text{und} \quad i_{\operatorname{rot} V} \mu_{\mathbb{R}^3}$$

als 2-Formen auf F übereinstimmen, wobei μ_F die Volumenform der Fläche F und $\mu_{\mathbb{R}^3}$ die Standardvolumenform von $\mathbb{R}^3$ ist.
Hinweis: Es genügt, für $p \in F$ beide Formen auf einer positiv orientierten Orthonormalbasis von T_pF auszuwerten (warum?).

b) Wir bezeichnen mit $T = T_R$ das (eindeutige) positiv orientierte Einheitstangentialvektorenfeld an $R = \partial F$. Zeigen Sie, dass auch

$$\langle V, T_R \rangle \mu_R \quad \text{und} \quad \beta_V$$

als 1-Formen auf dem Rand R von F übereinstimmen, wobei $\beta_V \in \Omega(\mathcal{O})$ die zu V assozierte 1-Form wie in Aufgabe **3.a)** von **Blatt 2** ist.

c) Folgern Sie nun den *klassischen Satz von Stokes*

$$\int_F \langle \operatorname{rot} V, N_F \rangle \, \mu_F = \int_R \langle V, T_R \rangle \mu_R$$

aus der in der Vorlesung behandelten allgemeinen Version.