Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 6

1. *(6 Punkte)*

a) Konstruieren Sie zu einer gegebenen offenen Umgebung $W \subset \mathbb{R}^k$ von $p \in \mathbb{R}^k$ eine Funktion $\varrho : \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$, so dass $\varrho(p) > 0$ gilt und $\operatorname{supp} \varrho$ eine kompakte Teilmenge von W ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die Funktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$$

die Klasse C^∞ besitzt (siehe Analysis II, Blatt 1, Aufgabe 4).

b) Beweisen Sie, dass man bei der Konstruktion einer Zerlegung der Eins eine endliche Familie von Karten

$$\{h_i : W_i \to M\}_{i=1}^R \quad \text{mit} \qquad M = \bigcup_{i=1}^R h_i(W_i)$$

vorgeben kann, so dass die einzelnen Funktionen ϱ_i der Zerlegung dann kompakten Träger in den Bildern $h_i(W_i)$ genau dieser Karten haben.

c) Beweisen Sie, dass eine k–dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ genau dann orientierbar ist, wenn auf ihr eine nirgends verschwindende k–Form existiert!

2. *(8 Punkte)* Wir betrachten die Standardsphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und bezeichnen mit $N \in S^n$ den Punkt $N = (0, \ldots, 0, 1)$.

a) Geben Sie in den Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^{n+1}$ eine explizite Beschreibung (mit Begründung) für die stereographische Projektion

$$p_+ : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n,$$

welche jedem Punkt x im Definitionsbereich den eindeutigen Schnittpunkt der Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch die Punkte N und x mit $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zuordnet!

Bitte wenden!

b) Finden Sie auch eine Formel für die Umkehrabbildung $h_+ : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$!

c) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Riemannschen Metrik auf S^n in der karte h_+!

d) Beschreiben Sie die Volumenform von S^n in der Karte h_+!

3. *(4 Punkte)* Sei $n > 2$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche (Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$) *ohne Rand*.

a) Beweisen Sie: Ist $H \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum der Dimension $n-1$ mit $M \cap H = \{p\}$, so gilt $T_pM = T_pH$.

b) Stimmt die Aussage in **a)** auch für $n = 2$?

c) *(Zusatz, 0 Punkte)* Wie lässt sich die Aussage in **a)** für Untermannigfaltigkeiten höherer Kodimension $(n - k > 1)$ verallgemeinern?