Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 5

1. *(4 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{O} \to (0, \infty)$ eine C^r-Funktion mit $r \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann die Teilmenge

$$M := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x^{n+1} \leq f(x^1, \dots, x^n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine $(n+1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, und geben Sie den Rand an! Warum ist es wichtig, dass $\mathcal{O}$ offen ist?

2. *(8 Punkte)* Es sei $h : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ die Polarkoordinatenabbildung

$$h(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das Bild von h an!

b) Beschreiben Sie die Vektorfelder $h_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$, $h_*\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)$ und $h_*\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ in den Standardkoordinaten (x, y, z) des $\mathbb{R}^3$!

c) Auf welche offenen Mengen im $\mathbb{R}^3$ lassen sich diese Vektorfelder glatt (d.h. C^∞) fortsetzen?

d) Drücken Sie die Standardvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ in den Koordinaten (r, ϑ, φ) aus![1]

3. *(4 Punkte)* Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie:

a) Ist $k = n$, so gilt $\partial M = \mathrm{Fr}(M)$, wobei $\mathrm{Fr}(M) = \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$ der topologische Rand von $M \subset \mathbb{R}^n$ ist.

b) Ist $k < n$, so gilt $\mathrm{Fr}(M) = \overline{M}$. Insbesondere stimmen in diesem Fall ∂M und $\mathrm{Fr}(M)$ nicht überein.

c) Die Aussage in **a)** kann falsch sein, wenn M nicht kompakt ist.

---

[1] Genaugenommen sind hier Ausdrücke für $h_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ usw. gefragt. Die Abbildung h^{-1} muss dafür *nicht* bestimmt werden.